Math. P. 633 m

(Mathem.
System. p. 150.)

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

zum

öffentlichen Gebrauche und Selbſtunterrichte.

Mit metrologiſchen Tafeln

über die Maße, Gewichte, und Münzen verſchiedener Staaten, beſonders des Königreichs Baiern, und des alten Roms und Griechenlands.

Von

J. B. Weigl,

Profeſſor am königl. baierſchen Gymnaſium zu Amberg.

Sulzbach,

im Verlage der J. E. Seidelſchen Kunſt- und Buchhandlung.

1812.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Allen

Vorſtehern, Lehrern und Freunden

der

vaterländiſchen Studienanſtalten

mit

Hochachtung und Ergebenheit

gewidmet

von

dem Verfaſſer und Verleger.

Vorrede.

Gegenwärtiges Lehrbuch der Arithmetik und Algebra iſt zunächſt für die Bedürfniſſe der Studirenden auf königl. baierſchen Gymnaſien berechnet. Daher behandelt daſſelbe alles, was „das Allgemeine Normativ der Einrichtung der öffentlichen Unterrichtsanſtalten in dem Königreiche Baiern“ für Gymnaſien vorſchreibt. Die am Ende des Werkes beygefügten metrologiſchen Tafeln enthalten nicht nur die geſetzlichen Beſtimmungen über vaterländiſches Maß und Gewicht, ſondern auch — was man in andern Lehrbüchern vergeblich ſucht — die Maß-, Gewicht- und Münz-Syſteme der alten Römer, Griechen und Hebräer, derer Kenntniß für die Erklärung der Klaſſiker, und ſelbſt für die bibliſche Exeges ſo mannigfaltigen Nutzen hat.

Da das Buch für Anfänger und Schüler, zum Theil auch für ſolche beſtimmt iſt, welche ſich in den Elementen der Mathematik ſelbſt unterrichten wollen, ſo befliß ich mich der möglich größten Ordnung und Deutlichkeit, und opferte dieſer, zwar niemals die

Gründ

Gründlichkeit, doch manchmal die Kürze auf. Die Erfahrung mehrerer Jahre hat mich überzeugt, daß vieles, was an ſich noch ſo einleuchtend ſcheint, für den Schüler doch noch einer Erklärung bedarf, und daß in dem mathematiſchen Studium an der richtigen Auffaſſung der erſten Grundſätze das Meiſte gelegen iſt. Dieß iſt die Urſache, warum ich beſonders am Anfange etwas weitläufiger war, oder ſo manche, dem Anſcheine nach, geringfügigen Beyſpiele und Anmerkungen hinſetzte.

Daß in dieſem Buche nicht alles neu, oder von mir ſey, brauche ich nicht erſt zu ſagen. Ich benutzte von den mathematiſchen Schriften des In- und Auslandes die mir bekannt ſind, was mir dienlich ſchien; überdieß verdanke ich viele, mir ſchätzbare, Anmerkungen und Zuſätze meinen Freunden und Herrn Kollegen an der hieſigen Studienanſtalt. — Ob deſſen ungeachtet das Ganze, im Durchſchnitte, auf Originalität Anſpruch machen dürfe, mögen Kenner entſcheiden.

Sollte nun der Inhalt eben ſo, wie der mäßige Preis von 1 Thlr. 6 ggr. dieſe Schrift zu einem Schulbuche eignen, und ſollte ſie das Glück haben, auf mehreren vaterländiſchen Studienanſtalten als Lehrbuch eingeführt zu werden (an einer und der andern iſt es bereits geſchehen): ſo würde ich, ohne der beſſern Einſicht irgend eines Lehrers vorzugreifen, für den ſtufen-

weiſen

weiſen Unterricht, innerhalb ſechs bis ſieben Jahre, folgende Ordnung vorſchlagen:

I. Für die Primärſchulen.

1) Das erſte Hauptſtück des erſten und fünften Abſchnittes, nebſt Vorkenntniſſen von den gemeinen und Decimalbrüchen; mit Auslaſſung der Buchſtabenrechnung.

2) Das dritte Hauptſtück des erſten Abſchnittes bis auf den dritten Artikel; das erſte und zweyte Hauptſtück, und das leichteſte aus dem dritten Hauptſtücke des fünften Abſchnittes, mit den nöthigen Vorkenntniſſen aus dem vierten Abſchnitte.

II. Für die Sekundärſchulen.

3) Das erſte, dritte und vierte Hauptſtück des erſten Abſchnittes, und das erſte Hauptſtück des zweyten Abſchnittes, nebſt den Anfangsgründen der Proportionslehre mit allgemeinen Größen.

III. Für die Gymnaſialklaſſen.

4) Die Einleitung, der ganze erſte Abſchnitt, vom zweyten Hauptſtück angefangen, nebſt Vorkenntniſſen von den Gleichungen.

5) Der zweyte Abſchnitt ganz.

6) Der dritte Abſchnitt ganz.

7) Der vierte Abſchnitt, nebſt dem zweyten und dritten Hauptſtücke des fünften Abſchnittes.

Uebri-

Uebrigens, welche Aufnahme das Buch auch immer finden möge, ſagt mir mein innerſtes Bewußtſeyn, daß ich aus der uneigennützigſten Abſicht ſchrieb, und bey vieler Mühe und großem Zeitaufwande wenigſtens das ernſte Beſtreben hatte, der ſtudirenden Jugend meines Vaterlandes das Studium der Mathematik leicht, angenehm und nützlich zu machen.

Schrieb's

Amberg den 7. May 1812.

der Verfaſſer.

Inhalt.

Einleitung. Von der Mathematik überhaupt.

Seite

Vorbegriffe. A. Ueber den Gegenſtand 1
B. Ueber die Theile 3
C. Ueber den Werth 7
D. Ueber die Methode, und Terminologie der Mathematik 8

Erſte Abtheilung. Elementar- oder niedere Arithmetik.

Erſter Abſchnitt. Vorbegriffe. Von den verſchiedenen Zahlen und ihrer Bezeichnung 16

Erſtes Hauptſtück. Von den Rechnungsarten überhaupt, und mit ganzen Zahlen insbeſonders . . . 22

Erſter Artikel. Von den entgegengeſetzten Größen . 23
Zweyter Artikel. Addition 26
Dritter Artikel. Subtraction 30
Vierter Artikel. Multiplikation 39
Fünfter Artikel. Diviſion einfacher ganzer Zahlen und Größen 49

Zweytes Hauptſtück. Rechnungsarten mit zuſammengeſetzten Buchſtaben und Zahlengrößen

Erſter Artikel. Addition 63
Zweyter Artikel. Subtraction 65
Dritter Artikel. Multiplikation 67
Vierter Artikel. Diviſion ſolcher Größen . . . 71
Fünfter Artikel. Von den Eigenſchaften der Zahlen rückſichtlich ihrer Theilbarkeit 75
Sechster Artikel. Von dem Zerfällen complexer Größen 86

Drittes Hauptſtück. Von den Fractionen überhaupt 89

Erſter Artikel. Von den gemeinen Fractionen

A. Vorbegriffe und Vorübungen 94
B. Stammrechnungsarten

I. Addition 102
II. Subtraction 104
III. Multiplikation 106
IV. Diviſion 109

Zweyt-

Seite

Zweyter Artikel. Von den Decimalen

A. Vorbegriffe und Vorübungen 115

B. Stammrechnungsarten

I. Addition und Subtraction 121

II. Multiplikation 122

III. Diviſion 123

Dritter Artikel. Von den Sexageſimalen.

A. Vorbegriffe und Vorübungen 127

B. Stammrechnungsarten

I. Addition 130

II. Subtraction 130

III. Multiplikation 131

IV. Diviſion 134

Viertes Hauptſtück. Von der Verbindung der Größen.

Erſter Artikel. Von den Permutationen . . . 138

Zweyter Artikel. Von den Kombinationen

A. im weitern 141

B. im engern Sinne 142

Zweyter Abſchnitt. Von den Würden oder Potenzen.

Erſtes Hauptſtück. Von dem Quadrate und Kubus.

Erſter Artikel. Von dem Quadrate 144

Zweyter Artikel. Vom Kubus 158

Zweytes Hauptſtück. Eigentliche Würdenlehre.

Erſter Artikel. Würdenlehre monomiſcher Größen,

A) als Würden 173

B) als Wurzelgrößen 184

C) Stammrechnungsarten mit Irrationalzahlen . . 195

Zweyter Artikel. Würdenlehre binomiſcher

A) als zu potenzirender Größen 198

B) als Wurzelgrößen 217

Dritter Artikel. Würdenlehre polynomiſcher Größen 222

Zweyte Abtheilung. Höhere Arithmetik oder Algebra.

Vorbegriffe 231

Dritter Abſchnitt. Elementaralgebra 235

Erſtes Hauptſtück. Beſtimmte Analytik 236

Erſter Artikel. Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe. 237

Zweyter Artikel. Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen 253

Dritter Artikel. Quadratiſche Gleichungen . . 268

Vierter Artikel. Kubiſche Gleichungen 291

Fünfter Artikel. Biquadratiſche Gleichungen . . 323

Anhang.

Seite

Anhang. I. Allgemeine Grundſätze für die Gleichungen vom n Grade 340
II. Von den Wurzelſchranken 342
III. Von Auflöſung der Gleichungen durch Approximation 346

Zweytes Hauptſtück. Unbeſtimmte Analytik
Vorbegriffe 352
Erſter Artikel. Unbeſtimmte Probleme mit mehrern unbekannten Größen und einer einzigen Gleichung . . 353
Zweyter Artikel. Unbeſtimmte Probleme mit mehrern unbekannten Größen und zwey Gleichungen (Regula Coeci oder Virginum) 363

Vierter Abſchnitt. Von den Proportionen und Progreſſionen.
Vorbegriffe 371
Erſtes Hauptſtück. Von den arithmetiſchen Proportionen und Progreſſionen 376
Erſter Artikel. Von den arithm. Proportionen . . 377
Zweyter Artikel. Von den arithm. Progreſſionen . 380
Dritter Artikel. Von den vieleckigen Zahlen . . 387
Vierter Artikel. Von den arithmetiſchen Progreſſionen des zweyten Grades 389
Zweytes Hauptſtück. Von den geometriſchen Proportionen und Progreſſionen
Erſter Artikel. Von den geometr. Verhältniſſen . . 393
Zweyter Artikel. Von den geometr. Proportionen . 396
Dritter Artikel. Von den geometr. Progreſſionen . 407
Vierter Artikel. Von der Summation der unendlichen abnehmenden Reihen 414
Drittes Hauptſtück. Von den Logarithmen.
Vorbegriffe 418
Erſter Artikel. Von den briggiſchen Logarithmen . 421
Zweyter Artikel. Ueber den Gebrauch der logarithmiſchen Tafeln 432

Dritte Abtheilung. Fünfter Abſchnitt. Praktiſche Rechenkunſt.
Einleitung 439
Erſtes Hauptſtück. Anwendung der Rechnungsarten auf benannte Zahlen 440
Erſter Artikel. Von den verſchiedenen Maßen . . 441
A. Längenmaß 441
B. Flächenmaß 442
C. Körpermaß 443
D. Zeitrechnung 447
E. Geldrechnung 448

Zwey-

Seite

Zweyter Artikel. Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Reduciren und Reſolviren 451
II. Addition 453
III. Subtraction 454
IV. Multiplikation 456
V. Diviſion 458

Zweytes Hauptſtück. Anwendung der Proportionslehre

Erſter Artikel. Anwendung der arithm. Proportion 461

Zweyter Artikel. Anwendung der geom. Proportion 463

A. Regel de Tri 466
B. Wälſche Praktik 470
C. Ueber den Gebrauch der Reductionstabellen . 475
D. Zuſammengeſetzte Proportionen 477
E. Regula falsi 483
F. Reeſiſche Regel 484
G. Fernerer Gebrauch der Reductionstabellen 490
H. Gewinn-, Verluſt-Tararechnungen 495
I. Von der Diviſion in proportionale Theile . . 499
K. Von der Vermiſchungsregel 503

Drittes Hauptſtück. Anwendung der Lehre von den Progreſſionen und Logarithmen

Erſter Artikel. Zinsrechnungen 509

Zweyter Artikel. Discontorechnungen 520

Dritter Artikel. Ziel- oder Terminrechnungen . 526

Metrologiſche Tafeln über die Maße, Gewichte und Münzen.

Erſte Abtheilung . . . Neuerer Staaten.

Zweyte Abtheilung . . . Der alten Römer, Griechen, Hebräer.

Tafeln der Quadrat- und Kubik-Zahlen und Wurzeln von 1 bis 1000.

Ein-

Einleitung.

Von der Mathematik überhaupt.

§. 1.

Die Einleitung (τὰ προλεγόμενα) enthält die nothwendigen Vorbegriffe

A) über den Gegenſtand

B) über die Theile

C) über den Werth

D) über die Methode und Terminologie der Mathematik.

§. 2.

A) Ueber den Gegenſtand.

Mathematik (μάθημα, μάθησις) iſt die Wiſſenſchaft der Größen (Scientia Quantorum).

So wie bey den Alten die Schriften der Dichter κατ' ἐξοχήν den Namen ποιήματα (opera, Werke) führten; ſo hieß auch die Mathematik, wegen der Evidenz ihrer Lehren vorzugsweiſe ἡ Μάθησις, die Wiſſenſchaft.

Erklärungen.

1. Wiſſenſchaft iſt Syſtem der Erkenntniß. Erkenntniß iſt die beſtimmte Beziehung gegebener Vorſtellungen auf einen Gegenſtand; ſie iſt

a) empiriſch, a posteriori, oder

b) rein, a priori

α) mathematiſch, intuitiv

β) philoſophiſch, im engern Sinne, diſcurſiv.

2. Syſtem iſt ein Ganzes, das mittelſt eines Princips zuſammenhängt, und daher nothwendige Einheit hat.

A Es

Es ſteht dem Aggregate entgegen, d. i. einem Ganzen, das durch zufällige Hinzukunft eines Theiles zum andern entſtanden iſt, und daher keine nothwendige Vollſtändigkeit hat.

3. Dinge heißen einerley (entia eadem), wenn in dem einen alles, wie in dem andern iſt; verſchieden, (diversa), wenn in dem einen etwas iſt, das in dem andern nicht iſt.

4) Gleichartig (homogenea) nennt man Dinge, in wieferne man nur auf das ſieht, was ſie miteinander gemein haben; ungleichartig (heterogenea) in wieferne man auf das ſieht, was in ihnen verſchieden iſt. Z. B. Ein Dukate und ein Thaler ſind als Geldſtücke gleichartig; hingegen, in wieferne das eine ein Dukate, das andere ein Thaler iſt, ungleichartig.

5. Größe (Quantum) heißt ein Ding, in wieferne es aus Theilen beſteht, oder beſtehend gedacht werden kann, d. h. in wieferne es ein gleichartiges Mannigfaltiges oder Quantität hat, folglich eines Zuwachſes oder einer Verminderung fähig iſt, z. B. die Länge, Breite, Tiefe der Körper, die Geſchwindigkeit ihrer Bewegung u. ſ. w.

6. Die Beſtimmung des Mannigfaltigen in einem Dinge, und der Art, wie die Verbindung deſſelben in ihm gedacht wird — d. i. die beſondere formale Weſenheit eines Dinges heißt ſeine Qualität.

7. Dinge von einerley Quantität heißen gleich (aequalia); Dinge von einerley Qualität heißen ähnlich (similia); von einerley Quantität und Qualität congruent (congruentia).

* Deutlicher kann man ſagen: ähnlich ſind Dinge, welche ſich durch nichts, als durch ihre Größe unterſcheiden, z. B. ein kleiner und ein großer Zirkel, ein Migniaturgemälde und ein großes Portrait. Gleich ſind ſolche Dinge, welche blos in der Größe oder im Werthe miteinander über-

übereinkommen, ſonſt aber unterſchieden seyn können, z. B. ein in zwey Dreyecke verwandeltes Quadrat, und dieſe Dreyecke; ein Gulden im Silber- und im Kupfergelde.

8. Eine Größe heißt ſtettig, fließend, (quantum continuum) wenn das Gleichartige in ihr ſo zuſammenhängt, daß das Aufhören des Einen zugleich der Anfang des Andern iſt; z. B. die Zeit, wo das Ende der vergangenen zugleich der Anfang der zukünftigen iſt. Discret (quantum discretum), nennt man eine Größe, wenn das Mannigfaltige abgeſondert iſt, z. B. ein Haufen Weitzenkörner.

9. Wird die Quantität eines Dinges A durch ein ihm gleichartiges m beſtimmt, d. i. angegeben, wie oft man m nehmen müſſe, um A zu erzeugen: ſo heißt m das Maß oder die Einheit; dieſes Beſtimmen ſelbſt ein Meſſen oder Zählen; und die beſtimmte Quantität eine Zahl, oder die relative Größe von A, ſo wie A ſelbſt eine gezählte Größe. Zahl und gezählte Größen unterſcheiden ſich alſo, wie Subjekt und Prädikat. Man nennt aber auch gezählte Größen ſelbſt: Zahlen.

§. 3.

B) Ueber die Theile.

Die Mathematik theilt ſich

I. in die reine,

II. in die angewandte.

* Rein (Mathesis pura) heißt ſie, wenn man von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt; angewandt, oder gemiſcht (Mathesis applicata, mixta), wenn die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenſtände bezogen werden.

I. Die Reine theilt ſich wieder

1. in die allgemeine reine —, Arithmetik oder Zahlenlehre (ἀριθμός, numerus), die Wiſſenſchaft der Zahlen und gezählter Größen.

* Da diſcrete Größen, als Aggregate Zahlen ſind, und ſtettige Größen ebenfalls gezählt werden können, ſo heißt ſie allgemeine, reine Größenlehre (Mathesis pura, universalis).

2. In die reine beſondere, oder Geometrie (γεωμετρία, terrae mensura), die Wiſſenſchaft von ſtetigen ausgedehnten Größen.

* Reine beſondere Mathematik heißt ſie, weil ſie ſich in specie mit dem Raume beſchäftiget, und doch von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt.

Aus der Verbindung der Arithmetik und Geometrie entſpringt

3. die Trigonometrie, oder die Wiſſenſchaft, aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks die übrigen drey durch Rechnung zu finden; da giebt es wieder

   a) eine ebene b) eine ſphäriſche Trigonometrie.

1. Die reine allgemeine Mathematik wird wieder unterabgetheilt

a) in die niedere Arithmetik, deren Gränzen aber noch ſchwankend ſind. Sie beſchränkt ſich auf die leichtern Verknüpfungen ganzer und gebrochener Zahlen, die Potenzen vom zweyten und dritten Grade.

b) In die höhere Arithmetik (Mathematik) — Mathesis sublimior — deren Methode analytiſch iſt, und die man deßwegen auch Analysis nennt. Sie fährt in ihren Lehren da fort, wo es die Elementarmathematik ließ, und entwickelt die ſchwerern Aufgaben und Lehrſätze, wozu ſie ſich vorzüglich der Gleichungen bedient. Sie zerfällt

   α) in die Elementar- und

   β) höhere Algebra.

* Ihr Gegenſtand wird zu ſeiner Zeit beſtimmt werden.

2. Die

2. Die reine beſondere Mathematik, oder Geometrie wird unterabgetheilt

a) in die Elementar- und

b) höhere Geometrie.

Jene beſchränkt ſich auf die geraden und Kreislinien und ſolche Flächen und Körper, die ſich durch dieſe Linien darſtellen laſſen. Dieſe dehnt ſich in ihren Unterſuchungen auch auf krumme Linien, Flächen und Körper aus, welche nicht durch gerade oder Kreislinien darzuſtellen ſind.

II. Die angewandte Mathematik begreift in ſich

1. die praktiſche Rechenkunſt, (angewandte Arithmetik), oder die Anwendung der reinen Arithmetik auf die im gemeinen Leben gewöhnlichen Rechnungsfälle.

2. Die praktiſche Geometrie, d. i. die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Beſtimmung der Längen, Höhen, Flächen

a) auf der Oberfläche der Erde, die Landmeßkunſt (Geodaesia — Δαίω, divido)

b) unter der Oberfläche der Erde, die Markſcheidekunſt, (Geometria subterranea)

* Dieſe Wiſſenſchaften werden gewöhnlich den Lehren der reinen Mathematik entweder eingeſchaltet, oder am Ende beygefügt. Uebrigens verſteht man unter angewandter Mathematik, ohne Beyſatz, dermalen folgende vier:

3. Die mechaniſchen Wiſſenſchaften, von dem Gleichgewichte und der Bewegung, und zwar:

a) ſchwerer feſter Körper, Statik und Mechanik,

b) ſchwerer, flüſſiger Körper, die Hydroſtatik und Hydraulik

c) der Luft, als eines ſchweren, flüſſigen und elaſtiſchen Körpers, die Aerometrie.

4. Die

4. Die optiſchen Wiſſenſchaften vom Lichte
   a) die Optik, vom Lichte, das von dem Gegenſtande in gerader Linie ſich allenthalben verbreitet.
   b) Die Perſpektivik, von der Zeichnung eines Gegenſtandes auf einer Ebene, die zwiſchen ihm und dem Auge in einer beſtimmten Lage geſezt iſt.
   c) Die Katoptrik, vom zurückgeworfenen Lichte.
   d) Die Dioptrik, vom gebrochenen Lichte.

5. Die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften, von den Körpern des Weltgebäudes, und dem dadurch beſtimmten Raum- und Zeitmaße auf unſrer Erde —
   a) Die Aſtronomie, von der Größe, Bewegung und Verbindung der Weltkörper.
   b) Die Geographie (politiſche, mathematiſche), von der Figur und Größe der Erde, und von der Lage der Oerter auf ihrer Oberfläche, durch Aſtronomie beſtimmt.
   c) Die Chronologie, oder aſtronomiſche Zeitbeſtimmung.
   d) Die Gnomonik, vom Zeitmaße mittelſt des Schattens.

6. Die architektoniſchen Wiſſenſchaften
   a) Die Civil-, b) — Waſſer-, c) — Straſſen-} Baukunſt
   d) — Artillerie und
   e) — Fortifikation.

* Ja ſogar die Muſik beruht in mancher Hinſicht auf mathematiſchen Gründen.

Anmerkung. Die architectoniſchen Wiſſenſchaften ſetzen, nebſt den mathematiſchen, noch viele andere Kenntniſſe voraus, und müſſen daher aus eigenen Lehrbüchern vollſtändig erlernt werden. In den mathematiſchen Schriften

ten berührt man ſie gewöhnlich nur ganz kurz am Ende, oder läßt ſie gar hinweg.

§. 4.

C) Ueber den Werth der Mathematik.

Wenn man den Werth einer Wiſſenſchaft nach ihrem Nutzen, oder nach ihrem Einfluſſe auf die Befriedigung der dringendſten Bedürfniſſe in der menſchlichen Geſellſchaft beurtheilen dürfte, ſo würde die Mathematik unter den übrigen Wiſſenſchaften einen ſehr ehrenvollen Rang behaupten. Wirklich ſind wenige menſchliche Verrichtungen, von denen nicht ein Theil auf mathematiſchen Gründen beruhet. Sie erſtrecket ſich weiter, als auf blos ſinnliche Dinge; z. B. auf alle Berechnungen des Wahrſcheinlichen und der Hoffnungen, wie bey Leibrenten, Lotterien u. ſ. w. Man beurtheilt nach ihr das Wachsthum eines Staates an Bürgern, den nöthigen Vorrath der Lebensmittel und anderer Bedürfniſſe für ganze Länder. Ueberdieß ſind durch ſie die Künſte, welche uns die Bequemlichkeiten des Lebens verſchaffen, erfunden oder vervollkommnet worden. Pflug, Wagen und Schiffe, alle Werkzeuge der Handwerker und Künſtler ſind Maſchinen, von deren Gebrauch und Einrichtung die mathematiſche Kenntniß richtiger urtheilen lehrt.— Endlich, wie Herr von Segner ſagt: "Was in der Philoſophie brauchbar, gründlich, erhaben iſt, haben wir größtentheils der Mathematik zu verdanken." — Ja, ſie hat öfters den menſchlichen Geiſt zu einer Höhe erhoben, welche zu erreichen er ſich kaum verſprechen konnte.

Abgeſehen von dem, daß die evidenten mathematiſchen Wahrheiten ſchon an ſich unbedingten Werth haben, und bey ihrem Anblicke das reinſte Vergnügen gewähren, ſo ſollte die Mathematik für den ſtudirenden Jüngling ein doppeltes Intereſſe haben; denn ſie iſt ausübende Logik, ſchärft die Urtheilskraft, und gewöhnt an's gründliche Denken. "Sie iſt, wie H. W. Clemm ſagt, weit geſchickter den Ver-

Verſtand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tage vielleicht den Geſchmack vieler Studirenden beſſer anſpricht."

§. 5.

D) Ueber die Methode und Terminologie der Mathematik.

Die mathematiſche Methode, oder die Art, wie Mathematiker ihre Sätze zu erklären pflegen, iſt die einzige, welche zur Gewißheit führt, und vor Irrthümern ſichert. Auch iſt bekannt, daß die Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig ſind. Die Titel, nach welchen in der Mathematik, ſo wie in jeder ſtrengen Wiſſenſchaft, die Lehren vorgetragen werden, ſind:

1. Erklärungen,
2. Sätze,
3. Beweiſe,
4. Anmerkungen.

1. Erklärung (definitio) heißt eine deutliche und präciſe Darſtellung von dem vollſtändigen Begriffe einer Sache. Sie heißt:

a) genetiſch, oder Sacherklärung (definitio realis, genetica), wenn ſie die Art angiebt, wie die Sache entſtehen kann, oder was einerley iſt, wenn ſie die Möglichkeit der Sache darthut.

b) Worterklärung (definitio nominalis), wenn durch ſie die Möglichkeit der Sache nicht beſtimmt iſt.

2. Sätze ſind entweder

a) theoretiſche (propositio theoretica), wenn ſie angeben, daß etwas ſo, und nicht anders ſey, und zwar

α) ein Grundſatz, (Axioma), deſſen Wahrheit ſchon einleuchtet, ſobald man den Sinn deſſelben gefaßt hat,

β) ein

β) ein Lehrſatz (Theorema), deſſen Wahrheit aus andern bekannten Wahrheiten abgeleitet, oder bewieſen werden muß,

oder b) practiſch, wenn ſie angeben, daß etwas geſchehen kann oder ſoll, und zwar

α) eine Foderung, oder ein Poſtulat, wenn die Möglichkeit, ihm Genüge zu leiſten, unmittelbar einleuchtet, ſo bald man nur verſteht, was gefodert wird;

β) eine Aufgabe (Problema), wenn

αα) die Art der Verrichtung erſt beſtimmt —, welches man die Auflöſung nennt, und

ββ) die Richtigkeit der Auflöſung dargethan werden muß, d. i. die Auflöſung eines Beweiſes bedarf.

3. Ein Beweis (Demonstratio), die Darſtellung der Wahrheit eines Satzes aus andern ſchon bekannten, unbezweifelten Wahrheiten, heißt

a) direct, wenn er die Richtigkeit des Satzes geradezu zeigt,

b) indirekt, apogogiſch, (Ἀπαγωγή εἰς ἄτοπον,) wenn er die Unmöglichkeit des Gegentheils darthut.

Rückſichtlich der Ordnung, nach welcher die Sätze in einem Beweiſe auf einander folgen, iſt ein Beweis

a) ſynthetiſch, wenn er von den Gründen ausgeht, und zur Concluſion führt,

b) analytiſch, wenn er von der Concluſion ausgeht, und zu den Gründen zurückführt.

Man unterſcheidet 4. noch

a) Zuſätze, (Corollaria), Sätze, welche aus andern unmittelbar, oder durch einen leichten Schluß folgen.

b) Lehnſätze, (Lemmata), Sätze aus dem Gebiethe anderer Wiſſenſchaften, z. B. in der angewandten Mathematik, Sätze aus der Naturlehre.

c) An:

c) Anmerkungen, (Scholia), was zur Erläuterung, Anwendung des Vorhergehenden u. ſ. w. beygeſetzt wird, mithin keinen Beſtandtheil des Ganzen im ſtrengen Sinne ausmacht,

d) willkührliche Sätze, (Hypotheses). In der Arithmetik hat man mit Zahlen zu thun, wovon die Zeichen und viele andere Einrichtungen nicht nothwendig ſo ſind. Wenn nun die Beſchaffenheit dieſer Zahlen erklärt wird, ſo geſchieht ſolches in willkührlichen Sätzen, weil ſich eben dieſe Dinge auch durch andere Zeichen hätten andeuten laſſen.

Anmerkung. Die mathematiſche Methode heißt auch die des Euclides, der ſie zuerſt anwendete. Sie hat den auszeichnenden Vorzug, daß ſie ihre Begriffe conſtruiren, d. i. die Gegenſtände derſelben in ihrer Allgemeinheit anſchaulich darſtellen, folglich die Beſtimmungen davon im ſtrengen Sinne demonſtriren kann. Das Weſentliche dieſer Methode iſt, daß man aus ſichren, ganz unbezweifelten Gründen, durch richtige Schlüſſe das zeigt, was man zeigen will. Die Vorderſätze der Schlüſſe werden deßwegen aus den vorausgeſchickten Erklärungen, Grundſätzen, und andern ſchon bewieſenen Sätzen genommen. — Doch iſt es nicht nothwendig, daß man über jeden Satz die ihm zugehörige Benennung ſchreibe, indem ſich dieſes bey einiger Uebung leicht von ſelbſt unterſcheiden läßt.

§. 6.

Mathematiſche Zeichen.

1. Das Zeichen der Gleichheit iſt (=) z. B. A=C heißt A iſt gleich (iſt eben ſo groß als) C.

2. Die Ungleichheit drückt das Zeichen < ſo aus, daß die Spitze auf die kleinere Größe, die Oefnung aber auf die größere hinweiſet, z. B. A<C heißt A iſt kleiner als C, und C iſt größer als A.

3. Das Zeichen $\backsim$ drückt die Aehnlichkeit aus, z. B. $A \backsim B$. Die Größe A iſt der Größe B ähnlich.

4. Das Zeichen der Congruenz iſt $\cong$; alſo $A \cong B$ heißt: die Größen A und B ſind einander gleich und ähnlich, d. i. congruent.

5. Das Unendlich große wird durch ∞, das Unendlich kleine durch $\frac{1}{\infty}$ bezeichnet.

6. Das Zeichen deſſen, was keine Größe hat, iſt 0.

* Die beſondern Zeichen jeder Rechnungsart ſpäter!

§. 7.

Grundſätze oder Axiome der Mathematik.

1. Jede Größe iſt ſich ſelbſt gleich, oder $A = A$.

2. Das Ganze iſt ſeinen Theilen zuſammengenommen gleich.

3. Das Ganze iſt größer, als ein, oder nur einige ſeiner Theile.

4. Wenn man von einer Größe alle ihre Theile hinweg nimmt, verſchwindet ſie, (hebt ſich auf, wird zu Nichts).

5. Zwei Größen, die einer dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich, d. i. wenn $A = B$; und $A = C$, ſo iſt auch $B = C$.

6. Was größer iſt, als eine von zwei gleichen Größen, das iſt auch größer, als die andere, d. i. wenn $A > B$ und $B = C$ ſo iſt auch $A > C$.

7. Was kleiner iſt, als eine von zwei gleichen Größen, das iſt auch kleiner, als die andere, d. i. wenn $A < B$ und $B = C$, ſo iſt auch $A < C$.

8. Was größer iſt, als die größern von zwey ungleichen Größen, das iſt auch größer, als die kleinere, d. i. wenn $A \nless B$ und $B \nless C$; ſo iſt auch $C > A$.

9. Was

9. Was kleiner iſt, als die kleinere von zwei ungleichen Größen, das iſt auch kleiner, als die Größere, d. i. wenn $A < B$ und $B < C$; ſo iſt auch $A < C$.

10. Gleiches auf gleiche Art verändert, giebt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, giebt Ungleiches.

11. Congruente Dinge ſind vollkommen einerley, und laſſen ſich daher ſubſtituiren.

12. Gleiche Größen laſſen ſich für einander in Rückſicht ihrer Gleichheit, ſo wie ähnliche in Rückſicht ihrer Aehnlichkeit für einander ſetzen.

Allge-

Allgemeine Größenlehre.

Erſte Abtheilung.

Elementar- oder niedere Arithmetik.

Elementar- oder niedere Arithmetik.

§. 8.

Die Ordnung, in welcher die Gegenſtände dieſer Abtheilung behandelt werden, iſt folgende:

Der erſte Abſchnitt enthält, außer den Vorbegriffen von den verſchiedenen Zahlen und ihrer Bezeichnung

I. die Stammrechnungsarten mit einfachen ſowohl, als

II. mit zuſammengeſetzten ganzen Zahlen- und Buchſtaben-Größen,

III. die Lehre von den Fractionen, und

IV. von der Verbindung der Größen überhaupt.

Der zweyte Abſchnitt hat zum Gegenſtande die Lehre von den Potenzen und Wurzeln.

I. Monomiſcher —

II. Binomiſcher —

III. Polynomiſcher Größen.

Jeder Abſchnitt zerfällt in mehrere Hauptſtücke, und jedes Hauptſtück in mehrere Artikel.

Erſter Abſchnitt.

Vorbegriffe.

Von den verſchiedenen Zahlen und ihrer Bezeichnung.

§. 9.

Erklärungen.

1. Eine Menge von Dingen einerley Art heißt **eine Zahl**, und jedes einzelne Ding für ſich betrachtet iſt **die Einheit**.

2. Man kann **relative** und **abſolute** (**primitive**) **Einheiten** unterſcheiden.

a) **Relative Einheit** iſt diejenige, welche ſelbſt wieder aus einer andern etlichemal genommenen erzeugt iſt; z. B. von 4 Zehnern iſt die relative Einheit 1 Zehner, da hingegen von 1 Zehner die primitive Einheit 1 iſt.

b) **Primitive Einheit** iſt diejenige, welche nicht aus einer andern erzeugt iſt, mithin nicht als Inbegriff niedrigerer Einheiten betrachtet werden kann.

3. Eine Größe z. B. A, in wieferne ſie als Inbegriff mehrerer Einheiten b) betrachtet, alſo ein Ganzes wird, heißt **eine ganze Zahl**. In wieferne ſie aber ſelbſt nur einen, oder mehrere Theile einer andern C, mithin das Ganze nicht enthält, eine **gebrochene Zahl**.

* Ein Kreuzer iſt im Bezug zu einem Zwölfer eine gebrochene Zahl, und der Zwölfer das Ganze; da im Gegentheile der Zwölfer ſelbſt im Bezuge auf einen Gulden eine gebrochene Zahl iſt.

Zuſatz. Relative Einheiten ſind in Rückſicht der niedrigern Einheiten ganze Zahlen, in Rückſicht der höhern Einheiten gebrochene Zahlen.

§. 10.

Wenn man immer eine beſtimmte Anzahl niedrigerer Einheiten zuſammennimmt, und aus ihrer Summe eine Einheit

heit höherer Ordnung bildet, ſo heißt dieſe nach einer beſtimmten Regel feſtgeſezte Unterordnung der Zahlen, ein Zahlenſyſtem, und zwar

1. Decimalſyſtem, Dekadik, oder
2. Duodecimalſyſtem, Dodekadik, oder
3. Dyadik, je nach dem zehn, zwölf oder zwey (δέκα δώδεκα, δύο) Einheiten einer niedrigern Ordnung immer eine Einheit der nächſt höhern geben.

§. 11.

Im Decimalſyſtem, deſſen wir uns bedienen, und wozu uns die Natur ſelbſt anleitete, geben zehn Einſer eine Einheit der zweyten Ordnung oder einen Zehner; zehn Einheiten der zweyten Ordnung eine der dritten, oder einen Hunderter, zehn Hundert geben Tauſend, worauf zehn, hundert Tauſend folgen. Tauſendmal Tauſend iſt eine Million, und ſo auch von den Billionen, Trillionen ꝛc.

Die Zahlenzeichen oder Ziffer, deren wir uns bedienen, ſind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. — 0 heißt Nulle, und zeigt den Mangel einer Zahl an. Die erſten neun ſind Zahlziffer.

Jeder von dieſen Ziffern hat einen doppelten Werth

1. Einen natürlichen, d. i. die Anzahl der Einheiten, welche die Ziffer für ſich genommen darſtellen. Z. B, fünf iſt der natürliche Werth von 5.
2. Einen Lokalwerth, oder die Ordnung der Einheiten — welche Zehner, Hundert, Tauſend bedeuten können. Dieſer Werth kommt den Ziffern von ihrer Stelle, von der Rechten gegen die Linke, zu.

Anmerkungen.

a) Die Griechen und Römer hatten zwar auch das Decimalſyſtem, aber zu Ziffern gewiſſe Buchſtaben ihres Alphabets.

b) Nach der Dyadik des Herrn von Leibnitz, mit 1 und 0 müßte man ſo zählen, und ſchreiben:

Eins	= 1	Vier	= 100	Sieben	= 111	Zehn	= 1010
Zwey	= 10	Fünf	= 101	Acht	= 1000	Elf	= 1011
Drey	= 11	Sechs	= 110	Neun	= 1001	Zwölf	= 1100

Das Mühſame dieſer Bezeichnung ſieht man von ſelbſt ein. Leibnitz machte aus dieſer Erfindung eine witzige Anwendung auf die Schöpfung aus Nichts. Er ließ eine Gedächtnißmünze prägen, auf welcher etliche Rechnungsproben der Dyadik ſtanden mit der Ueberſchrift: Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum.

c) Nimmt man bey der Dodekadik für zehn ∠ (einen umgekehrten Siebner), und für elf einen umgekehrten Dreyer Ɛ an; und heißt man die Einer der zweyten Ordnung Duzend, jene der dritten Zwölfer, die der vierten Dodekaden, (wobey o ebenfalls Null, Nichts iſt) z. B.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ∠, Ɛ, 10.

So müßte man z. B. die Zahl 1236 alſo ausſprechen: 1 Dodekade, zwey Zwölfer, 3 Duzend, 6 Einheiten, welches nach dem Decimalſyſtem betrüge: 2058 oder zwey Tauſende, kein Hundert, fünf Zehner, acht Einſer.

* Freylich würde das Duodecimalſyſtem im bürgerlichen Leben für die Eintheilung des gemeinen Fußes zu zwölf Zoll einigen Nutzen haben; und man könnte z. B. 78∠Ɛ''' ohne Weiters leſen: 11 Linien, 10 Zolle, 8 Fuß, 7 Ruthen des Duodezimalmaßes. Auch für das Sexageſimalmaß würde die Reduction erleichtert. Aber dieſes alles könnte die Vortheile, welche uns das Decimalſyſtem gewährt, bey weitem nicht überwiegen.

§. 12.

Erklärung. Eine durch Ziffer ausgedrückte Zahl ausſprechen, oder eine gegebene Zahl mit Ziffern bezeichnen heißt numeriren.

Regeln der Numeration.

I. Um was immer für eine durch Ziffer ausgedrückte Zahl (z. B. 13046937832145819837) gehörig auszuſprechen oder zu leſen, theile man

1) die

1. die Zahl in Klaſſen von 6 und 6 Ziffern; ſetze am Ende der erſten Klaſſe, oben ('), welches Millionen, am Ende der zweyten, dritten, vierten, fünften ("), welches Billionen, (''') Trillionen, ('''') Quatrillionen, (''''') Quintillionen anzeigt.
2. Jede dieſer Klaſſen theile man auf ein Neues nach drey Ziffern durch das Zeichen (,) oder (.) unterhalb der Reihe, welches mit Tauſend geleſen wird; nemlich:
   13'''046.937"832.145'819.837
3. Nun leſe man auf einmal alle zwiſchen ein Paar Zeichen eingeſchloſſenen Ziffer, (nur in der höchſten Klaſſe können einer oder zwey ſtehen) mit dem am Ende ſtehenden Zeichen; dann heißt es
4. — 13 Trillionen, 46 tauſend, 937 Billionen, 832 tauſend, 145 Millionen, 819 Tauſend, 837.
5. Da ſich die Zeichen von den Millionen, Billionen, u. ſ. w. auf alle ſechs Ziffer einer Klaſſe erſtrecken, ſo müſſen ſie geleſen werden, wenn auch nur ein einziger Zahlziffer in dieſer Klaſſe vorkommt, z. B. 3.000'''269.000"000.001'000.009 wird geleſen: "3 tauſend Trillionen, 269 tauſend Billionen, 1 Million und 9."

II. Eine gegebene Zahl (z. B. 34 tauſend Trillionen, 17 tauſend Billionen, 600 tauſend, 17 Millionen, 35 tauſend und ſechs) richtig mit Ziffern anzuſchreiben.

1. Man erinnere ſich, daß die Billionen von den Trillionen um ſechs Ziffer abſtehen; ſo oft man nun einen Ziffer oder mehrere ſchreibt — und zu Klaſſen von drey und drey Ziffern iſt es ſehr leicht — wird jederzeit das gehörige Zeichen über oder unter der Zahlenreihe beygefügt, und
2. die abgängigen Zifferſtellen werden durch Nullen ergänzt.

Das ganze Geſchäft könnte durch folgende Punctation erleichtert werden:

. . . , . . . ''' . . . , . . . " . . . , . . . ' . . . , . . .

Man ſchreibe nun an die Stelle der Puncte die gegebenen Zahlziffer

. 34, . . .''' . 17, . . .'' 600, . 17' . 35 . . . 6

Schreibt man endlich an die unbeſezten Puncte Nullen, ſo hat man

34,000'''017,000''600.017'035.006

§. 13.

Erklärung.

1. Um allgemeine, das iſt, noch unbeſtimmte Zahlen auszudrücken, bedient man ſich der Buchſtaben des lateiniſchen (manchmal auch griechiſchen) Alphabets,

a) der Anfangsbuchſtaben, wenn ſie gegebene oder bekannte Zahlen bezeichnen,

b) der Endesbuchſtaben v, x, y, z, wenn ſie unbekannte Zahlen und Größen ausdrücken ſollen.

2. Manchmal nimmt man ſelbſt bey beſtimmten Zahlen der Kürze wegen Buchſtaben, z.B. für 100 .. c. u.ſ.w.

3. Sind nun die nemlichen Größen öfter da, ſo ſezt man ſolchen einen Ziffer vor, welcher ihre Anzahl angiebt, und welcher der Coefficient dieſer Größe heißt (quia coëfficit productum).

4. Hieraus ergiebt ſich alſo die Ziffer- (auch ſchlechthin Zahlen-) Rechnung und die Buchſtabenrechnung (calculus litteralis).

Zuſatz 1. In der Buchſtabenrechnung kann jede Größe durch Buchſtaben z.B. a, b, c ausgedrückt, was immer für eine Quantität oder Qualität haben, wodurch freylich die Allgemeinheit dieſer Zeichen ſehr ausgebreitet wird; doch pflegt bey der nemlichen Rechnung ein und derſelbe Buchſtabe z.B. c nur einen und den nemlichen Werth zu haben, den man ihm einmal gegeben hat.— Bey Zahlziffern iſt ihre Quantität beſtimmt, die Qualität aber unbeſtimmt.

Zuſatz 2. In der Buchſtabenrechnung ſind die Gröſſen, welche mit gleichen Buchſtaben bezeichnet ſind, gleich-

artig

artig z. B. 3a, 2a, 1a oder a; die mit verſchiedenen Buchſtaben bezeichneten ungleichartig z. B. 2a, 3b, 4c, es mögen die Coefficienten beſchaffen ſeyn, wie ſie wollen.

§. 14.

Zahlengrößen, mit Ziffern ausgedrückt, ſind

1. ſtumme oder unbenannte, wenn ſie weiter nichts, als ihren natürlichen oder Lokalwerth ausdrücken z. B. 7, 28, 29.

2. Benannte Zahlen, wenn ſie überdieß eine Benennung führen, oder wenn ihre Qualität, Gattung, Art beſtimmt iſt z. B. 3 Gulden (florenus, 3 fl.) 4 Kr. 3 Pfunde (3 ℔, libra) u. ſ. w. Die benannten Zahlen ſind dann

   a) gleichbenannt, oder b) ungleichbenannt, je nachdem ſie Dinge der nemlichen Gattung und Art; oder Dinge zwar der nemlichen Gattung, aber einer verſchiedenen Art bezeichnen.

   c) Ungleichartig, wenn auch die Gattung verſchieden iſt.

3. Rational oder irrational

   a) rational heißt eine Zahl, welche ſich durch eine ganze oder gebrochene Zahl vollkommen darſtellen läßt.

   b) Irrational, wenn ſie ſich weder durch eine ganze, noch eine gebrochene Zahl vollſtändig angeben läßt.

Anmerkung. Die Rechnungsarten mit ganzen, unbenannten und benannten Zahlen könnten zwar billig ſchon voraus geſezt werden.— Doch weil ihre Lehren eine allgemeine und gründliche Behandlung nur durch die Buchſtabenrechenkunſt erhalten, ſo wollen wir den Ziffer- und Litteralcalcul mit einander vereinigen.

Er-

Erſtes Hauptſtück.

Von den Rechnungsarten überhaupt, und mit ganzen Zahlen ins Beſondere.

§. 15.

Größen laſſen ſich vermehren oder vermindern, je nachdem man zu dem Mannichfaltigen, das ihre Quantität ausmacht, ein Gleichartiges hinzufügt, oder davon hinwegnimmt.

I. Die Vermehrung kann auf zweyerley Weiſe geſchehen

1. wenn man zu einer Größe z. B. a eine beſtimmte Menge gleichartiger Einheiten von was immer einer Quantität z. B. b hinzufügt, ſo heißt die Vermehrung — Addition oder Hinzuzählung.
2. Wenn man aber aus dem Einfachen einer Größe (c) das Zwey-, Drey- oder Mehrfache (n-fache) ſucht, d. i. das Einfache von c, immer zu ſich ſelbſt hinzuſezt, (n mal nimmt), ſo heißt die Vermehrung Multiplikation, Vervielfachung.

II. Die Verminderung iſt ebenfalls zweyfach

1. wenn ich von der Größe M die ihr gleichartige N einmal hinwegnehme, ſo heißt die Verminderung Subtraction.
2. Nehme ich aber von einer Größe z. B. mn eine andere (z. B. n), die als Theil oder Einfaches der erſten betrachtet wird, ſo oft hinweg, als ſie darin enthalten iſt; oder ſuche vielmehr das Wievielfache von n die Größe mn ſey — ſo heißt dieſe Verminderung Diviſion, (Theilung, Ausmeſſung).

Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Addition iſt + (plus, und)

das

das Zeichen der Subtraction iſt — (minus, weniger)
— — — der Multiplication iſt . oder X (mal)
— — — der Diviſion iſt : oder ein Strichlein, das zwiſchen Dividend und Diviſor horizontal gezogen wird $\frac{a}{b}$.

Anmerkung 1. Dieſe zweyfache Art, Grösßen zu vermehren und zu vermindern giebt die ſogenannten vier Rechnungsarten, (Species Arithmeticae), oder auch Stammrechnungsarten, weil ſich darauf am Ende alle arithmetiſchen Operationen zurückführen laſſen.

2. Rechnen heißt im Allgemeinen: aus bekannten Größen unbekannte durch verſchiedene Functionen des Vermehrens oder Verminderns herausfinden. Nach dieſem Begriff laſſen ſich alle vier Rechnungsarten beſtimmen.

3. Die Rechnungsarten mit benannten Zahlen, beſonders mit verſchiedenen Unterabtheilungen von Münzen, Gewicht, Maß ꝛc. werden in der practiſchen Arithmetik vorgetragen werden, von der ſie einen Beſtandtheil ausmachen.

4. Bevor wir zu den Rechnungsarten mit Litteral- und Ziffergrößen ſchreiten, muß die wichtige Lehre von negativen und poſitiven Größen vorausgeſchickt werden.

Erſter Artikel.

Lehre von den entgegengeſezten Größen.

§. 16.

Erklärungen.

Größen, welche bey ihrer Verbindung miteinander vermehren, ſind übereinſtimmend; die aber bey ihrer Vereinigung ſo vermindern, daß die kleinere verſchwindet, und von der größern nur ſo viel übrig bleibt, als ihr Ueberſchuß beträgt, ſind entgegengeſezte Größen z. B. Schulden und Vermögen; Vor- und Rückwärtsgehen, Steigen und Fallen.

Folgeſätze.

I. Entgegengeſezte Größen müſſen an ſich, und auſſer ihrer Entgegenſetzung betrachtet, gleichartige Größen ſeyn; z. B. Schulden und Vermögen beziehen ſich beyde auf eine Summe Geldes. Eine von dieſen entgegengeſezten Größen, welche man will, nennt man poſitiv oder bejahend; die andere heißt dann in Beziehung auf die erſtere negativ oder verneinend. Wenn z. B. der Aufgang der Sonne poſitiv iſt, ſo iſt der Niedergang negativ. Wenn das in ein Gefäß einfließende Waſſer für poſitiv gilt, ſo muß das ausfließende Waſſer für negativ gelten, und umgekehrt.

II. Negative Größen heißen oft bey Mathematikern Größen, welche weniger als Nichts bedeuten. Dieſes iſt ſo zu verſtehen: Jede negative Größe iſt zwar mehr als Nichts, weil ſie eine wirkliche Größe iſt. Aber wenn man zu einer poſitiven Größe eine ihr gleiche negative ſezt, ſo heben beyde einander — dem Begriff zu Folge — auf, und geben Null (o). Z. B. Wer 12 fl. Schulden hat, und 12 fl. Vermögen bekömmt, der muß damit die Schulden bezahlen, und hat alsdann Nichts. Zuvor alſo, da er die Schulden allein hatte, konnte man von ihm ſagen, daß er weniger als Nichts gehabt habe, weil er jezt erſt Nichts hat, nachdem er 12 fl. bekommen. — Eine negative Größe iſt alſo weniger als Nichts in Beziehung auf die ihr entgegengeſezte Größe und die daraus entſtehende Nulle — o —. Wollte man dieſes Null — o — als ein abſolutes Nichts betrachten, ſo wäre der Ausdruck, wenn man negative Größen weniger als Nichts nennt, falſch.

Willkührlicher Satz. Die poſitiven Größſen bezeichnet man mit plus +, welches am Anfange bey jeder Größe, die kein anderes Zeichen hat, verſtanden wird z. B. + Q, oder Q.

Die Negativen mit minus z. B. — q.

§. 17.

§. 17.

Sätze.

I. Gleiche entgegengeſezte Größen heben ſich einander auf (§. 7. II. Axiom. 4.)

z. B. 12 fl. Schulden + 12 fl. Vermög. = 0.

oder + 12 − 12 = 0.

allgemein: + Q − Q = 0.

II. Entgegengeſezte Größen addiren iſt eben ſo viel, als eine der kleinern gleiche, mit der größern übereinſtimmige Größe, von lezterer ſubtrahiren,

z. B. 12 fl. Vermög. + 8 fl. Schuld = 4 fl. Verm.

oder 12 fl. Verm. − 8 fl. Verm. = 4 fl. Verm.

* Der Beweis ergiebt ſich aus dem Begrif von entgegengeſezten Größen.

III. Von einer Größe eine andere kleinere ſubtrahiren iſt eben ſo viel, als zur erſten das gleiche Gegentheil der zweyten addiren,

z. B. 12 fl. Verm. — 10 fl. Verm. = 12 fl. Verm. + 10 fl. Schuld.

12 fl. Schuld. — 10 fl. Verm. = 12 fl. Schuld + 10 fl. Schuld.

IV. Poſitive Größen vermehren ſich, wenn man entweder gleichartiges Poſitives addirt, oder Negatives ſubtrahirt:

alſo 12 fl. Verm. + 12 fl. Verm. = 12 fl. Verm. — 12 fl. Schuld.

V. Poſitive Größen vermindern ſich, wenn man entweder gleichartiges Poſitives ſubtrahirt, oder Negatives addirt

12 fl. Verm. — 8 fl. Verm. = 12 fl. Verm. + 8 fl. Schuld.

VI. Negative Größen vermehren ſich, wenn man entweder gleichartiges Negatives addirt, oder Poſitives ſubtrahirt

12 fl. Schuld + 8 fl. Schuld = 12 fl. Schuld — 8 fl. Vermög.

VII. Ne-

VII. Negative Größen vermindern ſich, wenn man entweder gleichartiges Negatives ſubtrahirt, oder Poſitives addirt

100 fl. Schuld — 80 fl. Schuld = 100 fl. Schuld + 80 fl. Vermög.

VIII. Von zwey entgegengeſezten Größen kann man die Poſitive mit (+) als die zu addirende, die Negative aber mit dem Zeichen (—) als die zu ſubtrahirende anſehen, und als entgegengeſezte Größen in der Rechnung wirklich behandeln.

Folgeſatz. Die poſitiven Zahlen entſtehen, wenn man zu 0 immer 1 hinzuzählt; dieß giebt dann die Reihe der ſogenannten natürlichen Zahlen:

0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5, + 6, + 7, + 8 ꝛc. u. ſ. f.

Wird aber dieſe Reihe rückwärts genommen, und von 0 immer 1 abgezogen, ſo entſpringt folgende Reihe negativer Zahlen:

0, — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6, — 7, — 8, — 9 u. ſ. f.

Zweyter Artikel.

Addition ganzer einfacher Größen.

§. 18.

I. **Addiren** heißt eine Größe finden, welche mehrern zuſammengenommen gleich iſt. Leztere — die ſchon gegebenen bekannten Größen — heißt man **Summanden** oder Poſten; die zu findende unbekannte Größe heißt die Summe.

II. Es laſſen ſich nur gleichartige Größen addiren, d. i. geben in der Summe ein Ganzes, (eine einzige Größe) .. (§. 2. 5°).

III. In der Buchſtabenrechnung ſind nur die mit gleichen Buchſtaben bezeichneten Größen gleichartig z. B. a, a, b, b. Die mit verſchiedenen Buchſtaben ungleichartig, z. B. a, b, c, d.

IV. Gleich-

IV. Gleichartige Buchſtabengrößen werden addirt, wenn man ihre Coefficienten zuſammenzählt, und die Summe vor die Buchſtabengröße hinſezt. Der Buchſtabe ſelbſt bleibt unverändert, indem er nur die Gleichartigkeit ausdrücken hilft. Da iſt zu merken, daß man den Coefficienten 1 allezeit ſchon verſteht, wiewohl er nicht ausdrücklich ausgeſezt iſt.

Alſo $3b + 8b = 11b$

$7a + a + 5a = 13a.$

V. Ungleichartige Größen kann man nicht wirklich ſummiren, ſondern man begnügt ſich, die Addition blos anzuzeigen, welches manchmal nur dadurch geſchieht, daß man die in Klammern eingeſchloſſenen Summanden nach alphabetiſcher Ordnung hinſezt, und die Einſchließung hinwegläßt.

Z. B. $(a + c + d) + (b + g + f) = a + b + c + d + f + g.$

VI. Sind gleichartige, aber entgegengeſezte Größen (mit + und —) zu addiren, ſo betrachtet man die negative als eine abzuziehende poſitive (§. 17. II. V.), und zieht die Coefficienten von einander ab, und behält das Zeichen des Größern bey

z. B. $5a - 3a = + 2a$ | $18 - 14 = 4$

$- 6b + 5b = - b$ | $19 - 28 = - 9$

VII. Gleichartige negative Größen werden ebenfalls addirt, und ihrer Summe das Zeichen der Negation vorgeſezt;

z. B. $- 13a - 4a - 7a = - 24a.$

13 fl. Schuld + 4 fl. Sch. + 7 fl. Sch. = 24 fl. Schuld.

* Beweis: Gleichartige, übereinſtimmige Größen geben als Theile ein Ganzes von einerley Beſchaffenheit, d. i. eine Summe, und das Ganze erhält das Zeichen ſeiner Theile.

VIII. Kommen mehrere gleichartige Glieder mit + und mit — vor, ſo addirt man ſowohl die erſten als die zweyten

ten in eine beſondere Summe, und verfährt dann wie Nro. V. und VI. geſagt worden.

z. B. $3a - 4b + 7a - 3b + 15 - 4 = 10a - 7b + 11.$
$28 - 4 - 7 - 12 = 28 - 23 = 5.$

IX. Die Summe ſtellt bey der Addition das Ganze, die Summanden deſſen Theile vor. Folglich iſt die Addition nur dann gehörig verrichtet worden, wenn die Summe nicht mehr und nicht weniger enthält als alle Summanden zuſammmengerechnet. Daher kann man jede Addition dadurch prüfen

1. daß man die einzelnen Summanden von der Summe abzieht, worauf die Summe zu 0 werden muß, oder
2. daß man alle Poſten bis auf einen von der Summe hinwegnimmt, welches dann den übriggelaſſenen als Reſt giebt.

§. 19.

Aufgabe. Was immer für ganze Zahlengrößen zu addiren.

Auflöſung I. Man ſchreibe die Summanden ſo unter einander, daß Einheit unter Einheit, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. zu ſtehen kommen, und ziehe einen Strich, welcher die Summanden von der Summe ſcheidet.

II. Nun addire man von der Rechten zur Linken zuerſt die Einſer, dann die Zehner, dann die Hunderter, und ſetze die Summe, wenn ſie unter 10 iſt, jedesmal unter die addirte Columne: iſt ſie aber größer, als 10, oder wirklich zehn (10), ſo ſchreibe man nur den lezten Ziffer derſelben an; behalte den höheren Ziffer als einen Zehner, und zähle ihn zur Summe der nächſt höheren Ordnung... wäre dieſe = 0, ſo kommt der hinübergezählte Zehner an ihre Stelle.

Man addire z. B. 8974 + 7493 + 11. 825.

Ope-

Operation	8.974	Summanden	oder auch	8.974
	7.493			7.493
	11.825			11.825
	28.292	Summe		12 Einſer
				18. Zehner
				21.. Hundert
				16... Tauſend
				1....10 Tauſ.
				28.292

* Die Summe 28.292 enthält nun alle Einſer, Zehner, Hunderter, Tauſender, welche in den drey Poſten vorkommen, und iſt folglich die ächte Summe.

** Man hätte dieſe Addition, mit Beobachtung der übrigen Regeln auch nach der Form machen können: $8974 + 7493 + 11.825 = 28.292$. Dieſe Additionsform werden wir bey den Fractionen anwenden.

*** Wenn bey ſehr großen Additionen die Summe einer Columne auf, oder über hundert ſteigt, ſo werden zur nächſt höhern Stelle die erſten zwey Ziffer als Zehner hinübergezählt, z. B. 137 würde betrachtet, als 13 Zehner, 7 Einheiten. — Solche große Additionen pflegt man lieber in mehrere kleine Additionen abzutheilen, und die Partialſummen am Ende in eine Hauptſumme zuſammenzuzählen.

**** Beyſpiele:

a) Welches iſt die Summe von folgenden Geldpoſten: 209 fl. 749 fl. 324 fl. 98 fl. ?

Aufloſung. $209 + 749 + 324 + 98 = 1380$ fl.

b) Jemand wurde gebohren im Jahre 1680, wurde alt 125 Jahre: wann ſtarb er?

Aufloſung. Das Todesjahr iſt die Summe des Geburtsjahres und des Lebensalters. $1680 + 125 = 1805$. Alſo anno 1805 ſtarb er.

§. 20.

Es hat in der Mathematik einen ſehr großen Nutzen, allgemeine Größen in beſtimmte Zahlengrößen aufzulöſen, deßwegen werden wir am Ende jeder Rechnungsart ein und das andere Beyſpiel dieſer Art hinzufügen.

Bey-

Beyſpiele I. Man addire $(3a+4b)+(-2a-5b)$

Auflöſung. $3a-2a+4b-5b=a-b$.

II. Es gelte a . . . 16 und b 12

Auflöſung. $+3a=3.16=+48$

$-2a=2.16=-32$

$+4b=4.12=+48$

$-5b=5.12=-60.$

Folglich: $48-32+48-60=96-92=4=a-b$

$a-b=16-12$.

Dritter Artikel.

Subtraction ganzer einfacher Größen.

---

§. 21.

I. Eine Größe von einer andern ſubtrahiren heißt aus zwey bekannten Größen eine dritte finden, welche den Unterſchied beyder beträgt z. B. 16 — 14 = 2.

Die Größe, von der man ſubtrahirt, heißt der Minuend; die, welche man abzieht, heißt Subtrahend, Subtractor, oder Abzug; die, welche nach der Subtraction übrig bleibt, heißt der Reſt oder der Unterſchied, (die Differenz).

II. Addirt man nun den Unterſchied zum Subtractor, (der dann nicht als abziehendes, ſondern addirendes Glied betrachtet wird), ſo ergiebt ſich als Summe der Minuend wieder. Im obigen Beyſpiele

$16-14=2$.. Allgemein $M-S=D$

$14+2=16$. $M=S+D$

III. Soll man eine poſitive Größe von einer andern poſitiven ſubtrahiren, ſo verwandelt man die erſte in eine negative mit dem Zeichen minus (—) (§. 17. V. I.) Da ſich nun entgegengeſetzte Größen gegenſeitig vermindern, ſo zieht man das Kleinere von dem Größern ab, und behält das Zeichen des Größern bey. Bey gleichartigen

Buch-

Buchſtabengrößen kann die Subtraction wirklich geſchehen, indem man die Coefficienten ſubtrahirt

z. B. man ziehe von $6a$ .. ab $5a$

$$+6a - 5a = +a.$$

und von $6b$ .. ſubtrahirt $10b$ giebt

$$+6b - 10b = -4b.$$

Bey ungleichartigen Buchſtabengrößen wird die Subtraction blos angezeigt.

IV. Soll man von einer poſitiven Größe eine negative, oder von einer negativen eine poſitive oder negative ſubtrahiren, ſo verändere man ebenfalls das Zeichen des Subtractors in ſein entgegengeſeztes, und addire. Denn etwas Negatives oder Verminderndes hinwegnehmen, heißt etwas Vermehrendes hinzufügen; hingegen etwas Poſitives hinwegnehmen, heißt etwas Verminderndes hinzuthun (§. 17.)

* Um dem Subtractor gleich bey dem erſten Anblick kenntlich zu machen, ſchließt man ihn mit Klammern ein, und ſezt das Zeichen — voraus, das ſich dann auf alle Glieder des Subtractors erſtreckt. **Man habe die Beyſpiele:** a) $15a - (6a - 3)$

b) $7b - (-3b + 1)$

c) $-5g - (-3g + 7)$.

Auflöſung von

a) $15a$

$(6a - 3)$ **Probe.** $9a + 3$

$- \quad +$ $\qquad$ $6a - 3$

$9a + 3.$ $\qquad$ $15a \mp 0 = 15a.$

* Ich ſollte hier nicht ganz $6a$ von $15a$ abziehen, ſondern weniger 3; folglich muß ich das -3, welches ich nicht abziehen durfte, zum Minuend $15a$ hinzuzählen.

b) $7b$

$-(-3b + 1)$ **Probe.** $10b - 1$

$+ \quad -$ $\qquad$ $-3b + 1$

$10b - 1$ $\qquad$ $7b \pm 0 = 7b.$

c) —

c) $\quad -5g$

$-(-3g+7)$ Probe $-2g-7$

$\quad + \quad -$ $\qquad\qquad -3g+7$

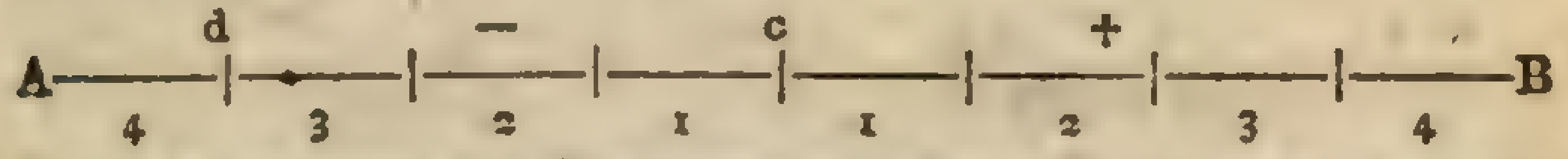
$-2g-7$ $\qquad -5g+0=-5g.$

Anmerkung. Der Saz: von einer poſitiven Größe eine negative hinwegnehmen, ſey ſo viel, als zur erſtern die zweyte poſitiv hinzuzählen ꝛc. — kann noch durch folgende zwey Anſichten deutlich werden

1. Es habe A 12 fl. Vermögen, B aber 10 fl. Schulden, welches wird nun di Differenz ihres beyderſeitigen Vermögens ſeyn, oder um wie viele Gulden wird A mehr haben als B? — Antwort um 22 fl. hat A mehr als B und B weniger als A. Denn hätte B bey 10 fl. Schulden auch wirklich 10 fl. Vermögen, ſo würde er doch an ſich Nichts — weder Vermögen noch Schulden — haben, folglich noch 12 fl. bedürftig ſeyn, um dem A zu gleichen. — Eben ſo wenn A die 12 fl. ſeines Vermögens hingäbe, würde er doch noch um 10 fl. reicher ſeyn, als B, weil dieſer 10 fl. Schulden hat, jener keine.

Oder:

Man habe die Linie A-B.



Nennt man nun die Richtung von dem Mittelpunct c gegen B, poſitiv, (+) ſo iſt die entgegengeſezte, von c gegen A, negativ, (—). Der Abſtand von c bis B iſt folglich $+4$; der von c bis d $=-3$. — Da ſieht man nun offenbar, daß die Differenz dieſer beiden Abſtände ſey: entweder -7, oder $+7$, je nachdem ich das Poſitive vom Negativen, oder das Negative vom Poſitiven abziehe. —

2. Man habe von der Größe A abzuziehen, einmal die Größe $+b$; und dann die Größe $-b$.

Um die Subtraction wirklich verrichten zu können, kann ich die Größe A erſt vorbereiten, indem ich ihr ein Aequi-

Aequivalent von Null (o) anhänge, wodurch ihr Werth nicht verändert wird, z. B. b — b = o

Folglich $A = A + b - b$.

Ziehe ich nun von A die Größe + b ab, ſo ſieht man, daß noch A — b bleibe. Nimmt man aber die andere Größe, — b, hinweg, ſo iſt evident, daß noch reſtire: A + b

Alſo $A = A + b - b$

$$-(+b) = -(+b)$$

$$A - (+b) = A - b$$

und $A = A + b - b$

$$-(-b) = -(-b)$$

$$A - (-b) = A + b.$$

Coroll. Jede Subtraction läßt ſich alſo in eine Addition mit veränderten Zeichen des Subtractors umwandeln.

§. 22.

Aufgabe. Zwey Zahlengrößen (z. B. 397423 von 1450096) von einander zu ſubtrahiren.

Auflöſung. I. Man ſetze den Subtractor ſo unter den Minuend, daß Einſer unter Einſer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter zu ſtehen kommen, und ziehe darunter einen Strich.

II. Nun ziehe man von der Rechten gegen die Linke Einſer von Einſern, Zehner von Zehnern u. ſ. w. ab, und ſeze den jedesmaligen Reſt in gerader Linie unter die abgezogenen Zifferſtellen.

III. Iſt der Subtractor in einer oder der andern Zifferſtelle größer als der Minuend, ſo daß man nicht abziehen kann; ſo borge man im leztern — von der nächſthöhern Zifferſtelle 1, welches in der nächſt niedrigern, 10 gilt, folglich die ſchon vorhandenen Einheiten um 10 vermehrt — (die Stelle, von der man geborgt hat, wird oben mit einem Düpfchen bemerkt) — und ziehe nun den Ziffer des Subtractors von der neuen Summe ab.

IV. Hat man von 100, 1.000, 10.000 — am Ende, in der Mitte, oder am Anfange des Minuends — abzuziehen, ſo gilt die erſte Nulle, von der man abzieht 10, alle übrigen aber 9; denn

100 — 10 = 90 + 10	1000 — 10 = 990 + 10
— 10	— 10
10.000 — 100 = 9990 + 10	1.000 — 80 = 900 + 100
— 10	— 80

Operation: 14'50.096 Minuend
397.423 Subtractor
1'052.673 Reſt.

Zergliedert ſteht die Rechnung alſo:

Minuend. 1'300.000 + 140.000 + 9.000 + 1.000 + 90 + 6
Subtract. — 300.000 — 90000 — 7.000 — 400 — 20 — 3
Reſt = 1'000.000 + 50.000 + 2.000 + 600 + 70 + 3 = 1'052673.

* Eine Nulle von einem Zahlziffer abgezogen, läßt den Minuend unverändert 9 — 0 = 9. 16 — 0 = 16.

** Jede Größe von ſich ſelbſt abgezogen, giebt 0, d. i. hebt ſich auf.

§. 23.

Ueber eine Rechnungsart die Probe machen, heißt durch einen hinreichenden Grund darthun, daß ſich in die Rechnung kein Fehler eingeſchlichen habe. — Nun wird die Probe über die Subtraction durch die Addition gemacht. Man addirt nemlich den Reſt zum Subtractor (als addirendes Glied betrachtet, mit unveränderten Zeichen); die Summe giebt alsdann das Dividend.

Probe über das vorhergehende Beyſpiel. 1'450.096 Minuend
— 397.423 Subtract.
(vergl. §. 21. II). 1'052.673 Reſt.

Probe. + 397.423 +
1'052.673
= 1'450.096 Minuend.

Im

Im Gegentheile wird die Probe über die Addition durch die Subtraction verrichtet; denn dieſe iſt der Gegenſatz von jener; ſie trennt, was jene vereiniget hat.

Wenn alſo $M + N = M + N$

So muß auch $M + N - N = M$

und $M + N - M = N$ ſeyn.

§. 24.

Bey den Additionen mit bloſſen Ziffergrößen kann die Probe durch die Subtraction auf zweyerley Weiſe verrichtet werden.

I^{te} Art. Man verrichtet die Addition verkehrt, d. i. fängt an die Summanden von der höchſten Ziffernſtelle zuſammenzuzählen, und zieht die jedesmalige Columnalſumme von den untenſtehenden Ziffernſtellen der Hauptſumme ab; durchſtreicht die Ziffernſtellen von denen man abgezogen hat, und macht den Reſt ſichtbar, welcher dann zur nächſten Ziffernſtelle als Zehner gezogen wird. Wenn man nun von allen Ziffernſtellen der Hauptſumme alſo abgezogen hat, ſo muß am Ende als Reſt 0 bleiben. Man kann dieß die auflöſende Subtractionsprobe heißen.

z. B.

4.593	Summanda.
6.834	
17.390	
28.974	
~~57.791~~	Summa.
~~2221~~ —	

Probe.

Zergliederung dieſer Operation:

	4593	
	6834	
	17390	
	28974	
	57791	
	3	Summe der 1ſten Columne
Reſt. .	27	
	25	Summe der 2ten Columne
Reſt. .	27	
	25	— — 3ten —
Reſt. .	29	
	28 . . .	— — 4ten —
Reſt. . .	11	
	11 . . .	— — 5ten —
	0	

IIte Art. Sind zwey Summanden addirt worden, ſo ziehe man den einen von der Hauptſumme ab, und es erſcheint der andere als Reſt. Wurden mehr als zwey Summanden addirt, ſo bringt man ſie erſt auf zwey, indem man alle bis auf einen, z. B. den erſten, in eine Partialſumme addirt, und dieſe von der Hauptſumme abzieht, wodurch man den übriggelaſſenen erſten als Reſt erhält. —

Beyſpiele:

a)
```
    1.497                      oder   4.186
    2.689                           — 1.497
  ───────                           ───────
    4.186 Hauptſumme.                 2.689
  — 2.689 IItes Summand
  ───────
    1.497 Iſtes Summand.
```

b)
```
    1.697 ┐
  ───────  │
   14.034  │
    8.321  ├ Summanden
      728 ┘
  ───────
   24.780 Hauptſumme.
 — 23.083 Partialſumme aller Summanden weniger dem erſten.
 ────────
    1.697 erſtes Summand.
```

§. 25.

Es giebt noch zwey Additionsproben, nemlich die Neuner- und die Eilferprobe —, wovon die erſte ſehr häufig, die zweyte aber ſehr ſelten gebraucht wird, (wiewohl keine von beyden ganz zuverläſſig iſt.)

I. Neunerprobe. Man addirt ſowohl in den Poſten, als auch in der Hauptſumme alle Ziffer Einheitsweiſe, und bemerkt den Reſt, nach hinweggeworfenen Neunern. Iſt dieſer Reſt in der Summe eben ſo groß, ſo iſt recht addirt, (außer man hätte um 9 gefehlt, oder den einen Fehler durch einen zweyten genau wieder compenſirt). Der Grund hievon iſt der: Man addire verſchiedene Zahlen z. B. 17 + 13 = 30. Wenn man nun die Summe 30 ſchlechtweg als 3 Einheiten betrachtet, ſo ſind nur 3 ſolche in der Summe; folglich wurden 3 Neuner weggeworfen; denn

denn $9 + 9 + 9 + 3 = 30$. Wirft man alſo auch in den Summanden die Neuner hinweg, ſo muß eben ſo viel übrig bleiben. Das Aeußerliche und Zufällige der Operation iſt folgendes:

1.394	8
5.637	3
8.710	7
3.285	0
19.026	

$8 + 3 + 7 = 9 + 9 + 0$

$9 + 2 + 6 + 1 = 9 + 9 + 0.$

* Nach dem ſenkrecht gezogenen Strich ſtehen die verjüngten Summen der vier Poſten, welche Summen zuletzt wieder zuſammengezählt wurden.

II. Die Eilferprobe. Man addirt zuerſt in den Summanden, dann auch in der Summe alle ungeraden Zifferſtellen (die wir mit o), dann auch alle geraden, (welche wir mit — bezeichnen wollen), und läßt 11 ſo oft hinweg, als möglich. Nun zieht man die verjüngte Summe der ungeraden von jener der geraden ab, (und vermehrt leztere um 11, wenn man nicht ſollte abziehen können). Dem Reſte aus den Summanden muß dann der Reſt aus der Summe gleichen, den man durch das nemliche Verfahren aus der leztern erhält.

Z. B. o—o—o

4.593	Summe aus den ungeraden = 8
18.304	— — — geraden = 1 (+ 11) = 12
7.395	
482	Reſt. 12 — 8 = 4
30.774	Summe aus den geraden = 7
	— — — ungeraden = 3
	Reſt 7 — 3 = 4.

Der Grund hievon kommt bey der arithmetiſchen Proportion vor.

§. 26.

Practiſche Beyſpiele.

a) Welche Differenzen geben die Zahlen 1456, 4165, 5641?

Auf-

Aufloͤſung.

5641	5641	4165
— 4165	— 1456	— 1456
1476	4185	2709.

b) Aktivſtand 6345 fl. + 909 fl. + 1498 fl.
Paſſivſtand 3920 fl. + 1704 fl. + 2088 fl.
Welches das eigentliche Vermoͤgen?

Aufloͤſung. Aktivſtand = 8752 fl. Paſſivſtand 7712 fl. folglich das eigentliche Vermoͤgen 8752 — 7712 = 1040 fl.

III. Im Jahre 565 hoͤrte die lateiniſche Sprache auf, Volksſprache zu ſeyn; im Jahr 814 ſtarb Karl der Große; im Jahr 1099 nahm Gottfried Bouillon Jeruſalem ein. Wie viele Jahre verfloßen von dieſen Begebenheiten bis heuriges Jahr?

* Die Zwiſchenzeit iſt die Differenz zwiſchen der heurigen und damaligen Jahreszahl.. Das Uebrige zur Uebung!

IV. Vor ſieben Jahren ſtarb ein Ruſſe 137 Jahre alt: wann war er gebohren worden?

Aufloͤſung. 1812 — 7 = 1805.
1805 — 137 = 1668... alſo im Jahr 1668.

§. 27.

Anwendung des zehnten Grundſatzes (§. 7. II.) auf die Addition und Subtraction

I. Gleiches zu Gleichem addirt, oder von Gleichem ſubtrahirt, giebt gleiche Summen, gleiche Reſte.

Z. B. $a = b$ wenn $c = d$ ſo iſt $a + c = b + d$, $a - c = b - d$.

II. Zu Gleichem Ungleiches oder zu Ungleichem Gleiches addirt, giebt Ungleiches... Und zwar, wo das Groͤſſere hinzukoͤmmt, iſt die Summe groͤßer und beym Kleinern kleiner.

Z. B. $b > c$
$a = a$
$a + b > a + c.$

Das Nemliche gilt, mit den noͤthigen analogen Veraͤnderungen von der Subtraction...

Vier-

Vierter Artikel.

Multiplication ganzer Zahlen und Größen.

§. 28.

Erklärungen.

I. **Multipliciren** heißt eine Größe M ſo und ſo oft nehmen, als es eine andere m angiebt; die gegebenen zwey Größen nennt man **die Factoren**, und zwar **die Größe** M **den Multiplikand**, den andern Factor **den Multiplikator**, und die durch die Multiplikation hervorgebrachte Größe (P) **das Product**.

Z. B. $M \times m = P.$ oder $M. m = P.$

$6 . 3 = 6 \times 3 = 18.$

II. In der Buchſtabenrechnung werden die Factoren ohne Zeichen, nach alphabetiſcher Ordnung, zuſammengeſtellt.

Z. B. $a \times b = ab.$

$a \times b \times c \times d \times f = abcdf.$

III. Soll der nemliche Buchſtab zwey, dreymal oder öfters mit ſich ſelbſt multiplicirt werden, ſo ſchreibt man ihn ebenfalls nach einander, ſo oft er als Factor gegeben iſt. Z. B.

$a \times a = aa.$ $a \times a \times a = aaa.$ $a \times a \times a \times a = aaaa$ u.ſ.w.

Anmerkung. 1. Ein ſolches Product aus lauter gleichen Factoren heißt eine **Würde** (Dignitas, Potentia, Potestas), und zwar die zweyte, dritte, vierte, fünfte Würde, je nachdem das Product aus 2, 3, 4, 5 gleichen Factoren beſteht.

2. Bey dieſer Art anzuſchreiben ereignet ſich aber das Unbequeme, daß man höhere Potenzen nicht leicht erkennen kann, wenn ſie mit zu vielen Buchſtaben geſchrieben ſind. Daher ſchreibt man kürzer die **Anzahl der gleichen Factoren** mit einer kleinen Ziffer über die zur Würde erhobene Größe, und dieſe Ziffer, welche die Würde der Größe anzeigt, heißt der **Exponent** der Würde.

Alſo $aa = a^2.$ $aaa = a^3..$ $aaaaa = a^5.$

3. Der

3. Der Exponent einer Größe iſt von dem Coefficienten wohl zu unterſcheiden z. B. $5a$ von a^5

Denn es ſey z. B. $a = 2$. ſo iſt

$5a = 5 . 2 = 10$. hingegen $a^5 = 2.2.2.2.2 = 32$.

4. Wenn eine Würde oder was immer für ein Product aus mehrern Factoren öfters als addirendes Glied ſteht, ſo läßt ſich ein ſolcher Ausdruck kürzer durch den vorgeſezten Coefficienten geben

z. B. $a^2, a^2, a^2 = 3a^2$

$ab, ab, ab = 3ab$.

5. Im uneigentlichen Sinne kann man jede Größe als eine Potenz mit dem Exponent 1 (oder des erſten Grades) betrachten, z. B. $a = a^1$ u. ſ. w. Kürzer werden alſo Potenzen mit gleichen Buchſtaben multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt, und die Summe der Exponenten über die einfache Würde ſchreibt z. B. $a^2 \times a = a^3$ oder $a^2 \times a = aaa = a^3$.

IV. Wenn man eine Buchſtabengröße durch eine bloße Zahl zu multipliciren hat, ſo ſchreibt man die Zahl als den Coefficienten der Buchſtabengröße voraus; denn mit einer Zahl multipliciren heißt den Multiplikand ſo oft nehmen, als der Multiplikator (die Zahl) Einheiten enthält.

Z. B. $m \times 3 = m + m + m = 3m$.

$ab \times 5 = 5ab$.

V. Soll aber ein Factor, dem ſchon ein Coefficient vorausgeſezt iſt, durch eine bloſſe Zahl multiplicirt werden, ſo kann man dieſe entweder dem Coefficienten mit dem Multiplikationszeichen vorſetzen, oder (was gewöhnlicher iſt,) die Multiplikation wirklich verrichten

z. B. $6b \times 3 = 6b + 6b + 6b = 3 . 6b = 18b$.

VI. In Fällen, wo dieſe verſchiedenen Regeln auf einmal zuſammentreffen, oder wenn mehrere Factoren gegeben ſind, müſſen ſie auch alle zugleich angewendet werden.

z. B. $2a \times 3ab = 6aab = 6a^2b$.

$3c \times 4cd \times 5cdf = 60cccddf = 60c^3d^2f$.

§. 29.

§. 29.

Bey der Multiplikation allgemeiner Größen hat man auch auf ihre Zeichen zu ſehen; hiebey gelten folgende Grundſätze.

I. Eine poſitive Größe (+A) durch eine poſitive (z. B. + B) multipliciren, heißt die Größe A... Bmal, und zwar poſitiv nehmen:

folglich $A \times B = +A \times +B = +B.$

$100 \times 2 = 200:$

II. Eine poſitive Größe (z. B. C) durch eine negative (z. B. — D) multipliciren, heißt die Größe C... Dmal, und zwar das Entgegengeſezte von ihr nehmen

d. i. $+C \times -D = -CD.$ $100 \times -2 = -200.$

III. Eine negative Größe (z. B. — Y) durch eine negative (z. B. — X) multipliciren, heißt die Größe Y zwar Xmal, aber das Gegentheil von ihr, d. i. ſie poſitiv nehmen.

D. i. $-Y \times -X = +XY.$ $-6 \times -4 = +24.$

Corollar. Gleiche Zeichen geben bey der Multiplikation Poſitives, ungleiche Zeichen aber Negatives

Signa eadem dant Plus, signa diversa Minus.

z. B. $3ab \times 4ac = 12a^2bc$

$15f \times -3g = -45fg.$

$-19d \times -2dg = +38d^2g.$

§. 30.

Eine ganze Zahl (z. B. 7) durch eine andere (z. B. 3) multipliciren, heißt die eine ſo oft zu ſich ſelbſt addiren, als die andere Einheiten hat. $7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = 21.$

oder $7 \times 3 = 3+3+3+3+3+3+3 = 21.$

1. Wenn nun zwey ganze Zahlen ſo miteinander multiplicirt wurden, ſo ſteckt der eine Factor ſo oft in dem Producte, als die Einheit in dem andern Factor, z. B. wenn man obiges Product mit Puncten oder Sternchen ausdrückt:

* * * * * * *
* * * * * * *
* * * * * * *

ſo

ſo ſieht man, daß in dem Producte die Zahl 7 — dreymal, ſo viel die Zahl 3 Einheiten hat; hingegen der Factor 3 darin 7 mal enthalten iſt, indem 7 aus ſieben Einheiten beſteht.

2. Es iſt einerley, welcher von zwey Factoren als Multiplikand oder Multiplikator betrachtet werde; denn

$$3 \times 4 = 12$$
$$4 \times 3 = 12$$

und allgemein $A \times b \times \beta = A.b.\beta$ oder $A.\beta.b.$

3. Eine Zahl mit 0 multipliciren, heißt die Zahl kein Mal nehmen z. B. $3 \times 0 = 0$. $a \times 0 = 0$.

4. Eine Zahl mit 1 multipliciren, heißt ſie einmal ſetzen, oder unverändert laſſen z. B. $6 \times 1 = 6$.
$a \times 1 = a$.

* Es läßt ſich alſo jede Größe betrachten als ein Product aus ſich ſelbſt und 1. z. B. $17 = 1 \times 17$
$ab = 1 \times ab$. u. ſ. w.

5. Eine Zahl mit 10, 100, 1000 multipliciren; heißt von der Zahl z. B. (7) das Zehn- Hundert- Tauſendfache nehmen, oder ihr eine, zwey, drey Nullen anhängen. z. B.

$$7 \times 10 = 70.$$
$$7 \times 100 = 700.$$
$$7 \times 1000 = 7000.$$

§. 31.

Jede Multiplikation ganzer Zahlen läßt ſich zwar in eine wiederholte Addition des Multiplikandes auflöſen: da es aber zu beſchwerlich ſeyn würde, eine Zahl (z. B. 1059) zwanzig- dreyßig- hundertmal zu ſich ſelbſt zu addiren, ſo hat man eine leichtere Art der Multiplikation ausgedacht. — Weil nemlich jede Zahl, welche Factor werden kann, aus den neun Zahlziffern, mit der Nulle beſtehen muß, ſo hat man nur die Producte aus den neun Einheiten unter ſich zu wiſſen nothwendig, um von was immer für zuſammengeſezten Factoren das Product zu finden. Dieſe Producte

ſind

ſind in folgendem Täfelchen enthalten, welches der Pytha-goriſche Rechentiſch heißt. —

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

* Der Gebrauch dieſer Tabelle lehrt ſich bey einer aufmerkſamen Betrachtung ſelbſt.

§. 32.

Aufgabe. Eine Zahl (z. B. 1059) durch eine zweyte (z. B. 6) zu multipliciren.

Auflöſung. Man multiplicire jeden Ziffer des Multiplikands, und ſchreibe den niedrigſten Ziffer des Productes unter die Stelle, von der es herrührt; am Ende addirt man die einzelnen Producte.

Operation: 1.059
6
———
54
30
60
———
6354.

In der Ausübung pflegt man dieſe Addition Kürze halber gleich im Sinne zu verrichten; man ſchreibt nemlich von dem zweyzifferigen Producte aus einer Zifferſtelle, nur den lezten Ziffer (die Einheit) an, und rechnet den Zehner zum Producte der nächſten Zifferſtelle. Iſt dieſes 10, 20 oder

oder 0, ſo kömmt der hinübergeworfene Ziffer an die Stelle der Nulle.

Z. B. 1059) Factoren
6)
6354 Product.

§. 33.

Haben beyde Factoren mehrere Zifferſtellen, (und doch nicht bloße Nullen), ſo multiplicirt man jeden Ziffer des Multiplikands durch jeden des Multiplikators; ſchreibt aber die Producte aus den Einheiten, Zehnern, Hundertern ꝛc. auch als Einheiten, Zehner, Hunderter an. Man kann dann von der Rechten gegen die Linke, oder von der Linken gegen die Rechte multipliciren. Iſt das eine Ziffer des Multiplikators eine Nulle, ſo ſchreibt man im Producte nur eine Nulle an, und rückt das Product aus dem folgenden Ziffer um eine Stelle höher, unter die Zeile, von der man anfängt zu multipliciren.

Aufgabe. 67.438 × 3908

Operation:

Ite Form.		IIte Form.
67.438)	Factoren	67.438
3.908)		3.908
539504		202314
6069420		606942
202314		00
		539504
263547704	Product.	263547704

* Von der Multiplikation durch die Tabelle — die man ſich von dem größern (oder kleinern) Factor entwirft — nur ein einziges Beyſpiel!

Man habe 7235 × 6895

Auflöſung.

I Fache . . . 7235 Wenn ich nun aus dieſer Tabelle
II — 14.470 das 5 — 90 — 800 — 6000 Fache addire,
III — 21.705 ſo habe ich das verlangte Product.

IVfache

IV Fache	28.940	36 175
V —	36.175	651.150
VI —	43.410	5788.000
VII —	50.645	43410 000
VIII —	57.880	49.885.325
IX —	65.115	

Anmerkung. Bey dieſer Art zu multipliciren gewinnt man nur dann mit der Zeit, wenn man das nemliche Multiplikand mit verſchiedenen Factoren — aber mit jedem zu einem eigenen Producte — zu multipliciren hat. —

§. 34.

Gleichwie nun alle Zifferſtellen eines mehrgliedrigen Multiplikands durch den ganzen Multiplicator multiplicirt werden müſſen, ſo muß das Nemliche auch bey dem Multiplikand geſchehen, wenn dieſes eine mehrgliederige Buchſtabengröße iſt. Einen ſolchen mehrgliederigen Factor ſchließt man dann in Klammern ein, um anzuzeigen, daß alle mit + oder — verbundenen Glieder oder Theile deſſelben zu multipliciren ſeyen.

z. B. I) $a \times (a+b), = aa + ab. = a^2 + ab$

II) $a \times (a-b) = aa - ab = a^2 - ab.$

III) $6a \times (b - 7c) = 6ab - 42ac.$

* Hier läßt ſich der Satz: daß zwey Factoren, deren einer = Nulle iſt, zum Producte ebenfalls Null geben, allgemein beweiſen, nemlich: $a - a = 0$ (vergl. §. 21. Anmerkung) folglich $m(a-a) = am - am = 0$. (vergl. §. 28. III. 4).

§. 35.

Erklärungen.

I. Sind mehr als zwey Factoren durcheinander zu multipliciren, ſo ſucht man zuerſt das Product von zweyen, und multiplicirt das erſte Product durch den dritten u. ſ. w. dann vierten, fünften Factor

z. B. $3.\ 5.\ 10.\ 8 = 15.\ 10.\ 8 = 150.\ 8 = 1200.$

oder $3\,ab \times bc \times cd = 3ab^2c \times cd = 3ab^2c^2d.$

Es iſt hier einerley, welche Factoren man zuerſt oder zulezt nehmen wolle.

II. Wenn

II. Wenn das Multiplikand oder der Multiplikator ſelbſt ein Zahlenproduct von mehrern Factoren iſt, ſo kann man, anſtatt mit denſelben auf einmal zu multipliciren, die Multiplication mit den einzelnen Factoren derſelben nach und nach vornehmen: z. B. 36. 43 = 43. 9. 4. = 387. 4 = 1548.
$63\,af \times 12\,ab = 63\,a^2bf \times 4.3 = 252\,a^2bf \times 3 = 756\,a^2bf.$

III. Wenn nun ein Multiplikand ſo in ſeinen Factoren dargeſtellt wird, ſo wird daſſelbe multiplicirt, wenn man nur einen Factor deſſelben multiplicirt

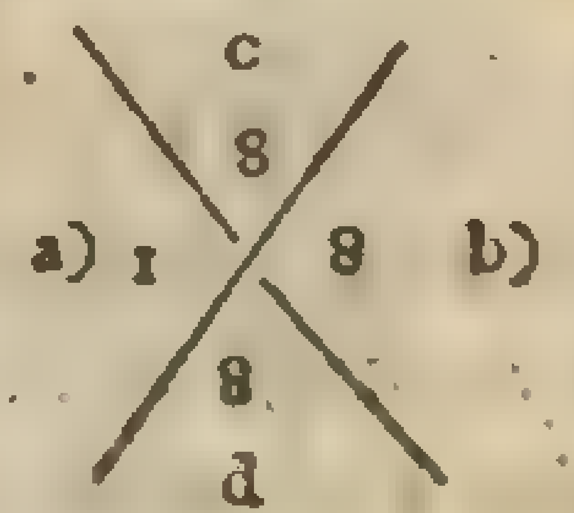
z. B. $7 \times (3.2.5.9) = 21.2.5.9 = 3.14.5.9$
$= 3.2.35.9 = 3.2.5.63.$

$4a\,(3a.\,4ab.\,3c) = (12a^2.\,4ab.\,3c) = (3a.\,16ab.\,3ac.)$
$= 48\,a^3bc \times 3 = 144\,a^3bc.$

§. 36.

Welches die natürlichſte Probe der Multiplikation ſey, wird ſpäter bey der Diviſion vorkommen; hier etwas über die ſogenannte Neunerprobe, welche von ihrer äußern Form, auch die Kreuzprobe heißt, aber nur bey der Multiplikation ganzer Zahlen angewendet werden kann. Man addirt nemlich ſowohl im Multiplikand als Multiplikator die Ziffer Einheitsweiſe, wirft Neun hinweg, wie §. 25. I. geſagt worden, und multiplicirt den Reſt aus dem Multiplikand durch jenen aus dem Multiplikator. Das Product wird wieder Einheitsweiſe addirt. Dieſe Summe muß der verjüngten Summe aus dem Hauptproducte gleichen, wenn man es ebenfalls Einheitsweiſe addirt.

z. B. 3907
503
11.721
1953.50
1'965.221

Probe 

a) 3 + 9 + 0 + 7 = 19
b) 5 + 0 + 3 = 8
c) 1 × 8 = 8
d) 1 + 9 + 6 + 5 + 2 + 2 + 1 = 8.

Auch

*) Auch hier gewährt dieſe Probe nur eine Wahrſcheinlichkeit; denn ſie würde auch der Form nach richtig ſeyn, wenn man im Producte um Neun ꝛc. gefehlt hätte.

§. 37.

Rechnungsvortheile bey der Multiplication ganzer Zahlen.

I. Die Multiplication mit dem Factor 11 läßt ſich durch eine bloſſe Addition des Multiplikands von der Rechten zur Linken verrichten z. B. $67 \times 11 = \begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ \hline 737 \end{array} = 737$

oder $13967 \times 11 = 153637$

Hieraus, und aus §. 36. I. wird man folgendes verſtehen:

$97 \times 77 = 97.11.7 = 1067.7 = 7.469$

$108 \times 66 = 1188 \times 6 = 7128.$

II. Anſtatt mit 9, 99, 999 (oder auch 8, 98, 998 u. ſ. w.) zu multipliciren, multiplicirt man kürzer mit der nächſten Rundezahl von 10, 100, 1000, d. i. hängt dem Multiplikand 0, 00, 000 an; man muß aber von dieſem Producte das Ein- (oder Zwey-) fache des Multiplikands abziehen, denn; $10 - 9$, $100 - 99$, $1000 - 999 = 1.$

$10 - 8$, $100 - 98$, $1000 - 998 = 2.$

Folglich $M \times 9 = M. (10 - 1).$

$M \times 8 = M. (10 - 2)$ u. ſ. w.

Beyſpiele 1) $1894 \times 99 = 189.400.$

$- \; 1.894$ (einfaches Multiplikand)

187.506 wahres Product.

2) $36095 \times 998 = 36095000$

$- \; 72190$ (zweyf. Multiplikand)

36022810 wahres Product.

* Wäre der Factor 89, 989 u. ſ. w. ſo müßte man das Elffache des Multiplikandes abziehen.. denn $100 - 89$, $1000 - 989 = 11.$

3) 1576

3) $1576 \times 989 = 1576000$
17336
$\overline{1,558.664}$ wahres Product.

§. 38.

Praktiſche Multiplikationsbeyſpiele

I. Welches Produkt geben die Faktoren:
1) 4. 3. 5. 7. 11
2) $3a \times -4ab \times -5bc$. ?

Aufloͤſung.
1) 4. 3. 5. 7. 11 = 420. 11 = 4620.
2) $3a \times -4ab \times -5bc = -12a^2b \times -5bc = + 60a^2b^2c$.

II. Welches iſt das 121fache von 936?

Aufloͤſung. $121 \times 936 = 936.\ 11.\ 11 = 10.296.\ 11 = 113.256$.

III. Wenn das Schaͤffel Weitzen 15 fl. koſtet, was koſten 64 Schaͤffel?

Aufloͤſung. 64. 3. 5 = 192. 5 = 960 fl.

Anmerkung. Bey den gewoͤhnlichen Multiplikationen ganzer Zahlen iſt nur der eine Faktor eine benannte, der andere eine ſtumme Zahl. Der Name Schaͤffel thut hier nichts zur Sache; es heißt ſo viel, als: wie viel ſind 64 mal 15 fl.?

IV. Der Flaͤcheninhalt iſt ein Produkt aus Laͤnge und Breite. Der koͤrperliche Inhalt aber ein Produkt aus Laͤnge, Breite, Hoͤhe.. Welches iſt nun der kubiſche Inhalt eines Zimmers, welches 29 Fuß lang, 15 hoch, 25 breit iſt?

Aufloͤſung. 29. 15. 25 = 87. 5. 5. 5 = 435. 5. 5 = 2.175. 5 = 10875 Kubikfuß.

V. Welches iſt der Flaͤcheninhalt eines Feldes, welches 3 m Fuß lang, und 2 m — 1 breit iſt?

Aufloͤſung. $3m \times (2m - 1) = 6m^2 - 3m$ Quadratfuß.

Fuͤnf-

Fünfter Artikel.

Diviſion ganzer Zahlen und Größen.

§. 39.

Erklärungen.

I. Eine Zahl (z. B. 54) durch eine zweyte (z. B. 9) **dividiren** heißt von der erſten Zahl die zweyte ſo oft hinwegnehmen, als dieſe in jener enthalten iſt; oder aus zwey gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche anzeigt, wie oft die eine in der andern enthalten iſt.

$54 : 9$ oder $\frac{54}{9} = 6.$

Denn $54 = 9+9+9+9+9+9 = 6 \times 9.$

II. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt **das Dividend**; womit man dividirt, **der Diviſor**, und die dritte Zahl, welche anzeigt, wie oft dieſer in jenem enthalten iſt, heißt der **Quotus**, **oder Quotient**.

* Dividiren iſt ein wahres Ausmeſſen der Zahlen: der Diviſor iſt das Maß, welches in das Dividend — die zu meſſende Größe — als Einheit hineingelegt wird: das **Wie oft** beſtimmt der Quotient.

III. Die Diviſion iſt alſo ganz der Gegenſatz der Multiplikation: erſtere vereinfacht und löſet auf, was die zweyte vervielfacht und vereiniget hat. Das Dividend ſtellt nemlich das Product vor, deſſen Factoren der Diviſor, (und zwar der bekannte) — und der Quotient ſind, (lezterer als unbekannter Factor).

IV. Allgemein läßt ſich alſo ſagen: eine Größe z. B. Dq durch eine zweyte z. B. D dividiren heißt eine dritte Größe finden z. B. q, welche mit D multiplicirt, die Größe Dq wieder giebt.

* Dieſe Erklärung der Diviſion iſt identiſch mit folgender: "Aus einem bekannten Factor D zu einem Producte Dq den unbekannten Factor q durch Rechnung finden, heißt die Größe Dq durch D dividiren."

V. Die Multiplikation und Diviſion dienen ſich alſo gegenſeitig zur Probe.— Nemlich die Multiplikation wird geprüft, indem man das Product durch einen Factor dividirt, worauf der andere als Quotus erſcheint z. B.

$$6 \times 7 = 42$$
$$42 : 7 = 6$$
$$42 : 6 = 7.$$

Die Diviſion aber wird geprüft durch die Multiplikation, indem man den Diviſor mit dem Quotus multiplicirt, welches zum Producte das Dividend giebt, z. B.

$$48 : 6 = 8$$
folglich $6 \times 8 = 48.$

§. 40.

Für die Diviſion laſſen ſich aus den vorausgeſchickten Begriffen folgende Sätze aufſtellen:

I. Jede Zahl durch ſich ſelbſt dividirt giebt zum Quotus 1; denn jede Größe iſt ein Product aus ſich ſelbſt und 1 (vergl. §. 18. IV.)

$a : a = \frac{a}{a} = 1.$ $bc : bc = 1.$ $dfg : dfg = 1.$

denn $1 \times a = a.$ $bc \times 1 = bc.$ $dfg \times 1 = dfg.$

Es kömmt alſo nur darauf an, daß man die gleichen Factoren des Dividends und des Diviſors auffindet, und ſie zu 1 macht, d. i. wenn noch ein Mitfactor gegeben iſt, ganz hinweglä̈ßt, und den Mitfactor als Quotus anſchreibt. Z. B.

$abf : af = \frac{af}{af}.b = b.$ Denn $af \times b = abf.$

II. Enthält das Dividend allein, oder der Diviſor zugleich gleichartige Würdengrößen, (gleiche Buchſtaben, wiewohl mit verſchiedenen Exponenten), ſo löſe man ſie ſo in zwey Factoren auf, daß im Dividend und Diviſor ein gleicher Factor erſcheint, wenn ſie nicht ohnehin ſchon gleich ſind, und verfahre wie bey Nro. I.

z. B. $a^2b : a^2 = \frac{a^2b}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}.b = b$

$a^5bc : a^3c = \frac{a^5bc}{a^3c} = \frac{a^3.a^2bc}{a^3.\ c} = a^2b.$

Poten-

Potenzen von einerley Größe werden aber kürzer dadurch dividirt, daß man den Exponent des Diviſors von jenem des Dividends abzieht, und den Reſt über die dividirte Größe als Exponent ſezt. — Dieſe Subtraction iſt ebenfalls eine Addition mit verändertem Zeichen des Subtractors.

Z. B. $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$ Probe $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.

Anmerkung. $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$ Da nun $a^3 : a^3 = \frac{aaa}{aaa} = 1$., ſo folgt, daß die Größe a, (wofür jede Größe gelten kann), mit dem Exponent o gleich ſey 1.

Ferner $a^3 : a^4 = a^{3-4} = a^{-1}$.

Da aber $a^3 : a^4 = \frac{aaa}{aaaa} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1}$; ſo folgt, daß eine Größe mit negativen Exponenten einem Bruche oder einer Diviſion gleiche, deſſen Dividend 1, der Diviſor aber die Würdengröße mit dem poſitiven Exponenten ſey.

* Dieſe zwey wichtigen Sätze werden hier nur kurz erwähnt, indem ſie ſchon bey den Sexageſimalbrüchen müſſen angewendet werden. Man wird ſie aber in der Folge noch umſtändlicher und gründlicher beweiſen.

III. Hat das Dividend und der Diviſor überdieß noch Coefficienten bey ſich, ſo werden dieſe dividirt, weil ſie bey der Multiplikation multiplicirt worden.

Z. B. $18ab : 6b = \frac{18ab}{6\ b} = \frac{6.3ab}{6.\ b} = 3a$. Denn $3a \times 6b = 18ab$.

$27cd : 3d = 9c$. Denn $3d \times 9c = 27cd$.

$25a^5 : 5a^3 = 5a^{5-3} = 5a^2$. Denn $5a^2 \times 5a^3 = 25a^5$.

IV. Wenn die Factoren des Dividends und Diviſors ungleichartige Buchſtaben ſind, ſo läßt ſich die Diviſion blos Fractionsmäßig anzeigen z. B.

$$af : cd = \frac{af}{cd}.$$

$$3gp : 3pr = \frac{3gp}{3pr} = \frac{g}{r}.$$

$$a^2b : c^2d = \frac{a^2b}{c^2d}.$$

V. Nicht allezeit läßt ſich das Dividend als ein Product aus zwey Factoren darſtellen, derer einer der Diviſor,

 der

der andere der Quotient iſt. . In dieſem Falle wird der Quotient wenigſtens zum Theile eine Fraction. z. B.

$$29 : 7 = \frac{28+1}{7} = \frac{4\cdot 7+1}{7} = 4 + \frac{1}{7}.$$

$$(af + c) : f = \frac{a.f}{f} + \frac{c}{f} = a + \frac{c}{f}.$$

In dieſem Falle muß man, um das Dividend wieder zu erhalten, den Quotus mit dem Diviſor multipliciren, und zum Producte den gebliebenen Reſt addiren z. B. $4\frac{1}{7}) . 7 = 28 + 1 = 29$

$$(a + \frac{c}{f}) \times f = af + c.$$

VI. Rückſichtlich der Zeichen iſt zu merken, daß gleiche Zeichen des Dividends und Diviſors einen poſitiven, ungleiche Zeichen aber einen negativen Quotus geben. — Der Beweis hievon wird ganz durch die Multiplikation gemacht. Z. B.

1) $+af : +f = af : f = +a = a$ denn $a \times f = af.$
2) $af : -f = -a.$ Denn $-f \times -a = +af.$
3) $-af : f = -a;$ denn $-a \times f = -af.$
4) $-af : -f = +a.$ Denn $+a \times -f = -af.$

§. 41.

Aufgabe. Eine gegebene ganze Zahl z. B. 3591 durch eine einfache andere Zahl z. B. 3 zu dividiren.

Auflöſung. Man erforſche, wie oft der Diviſor (3) in jeder Zifferſtelle, von der höchſten bis zur niedrigſten, enthalten ſey. Die Quotuſſe kann man aus dem Pythagoriſchen Rechentiſche, oder Einmal Eins, leicht wiſſen. 3 iſt in 3|000 einmal enthalten, der Quotus 1000 wird beyſeits geſchrieben; 3 iſt in 500 einmal enthalten mit einem Ueberſchuſſe von 2 Einheiten. Quotus 100. Die übrigen 2 Hunderter werden als Zehner zu der nächſten Zifferſtelle 29 gerechnet; 3 iſt in 29 neunmal enthalten, (Quotus 90). Der Ueberſchuß 2 wird zu 1 als Zehner gerechnet. 3 in 21 ſiebenmal, (Quotus 7) . . alſo 3591 : 3 = 1197.

Die

Die ganze Verfahrungsart iſt in dem Vers enthalten:

Divide, Multiplica, Subtrahe, Pone loca (Zifferſtellen).

Operation

```
 3591 (1197
 3
 ---
 5
 3
 ---
 29
  3
 27
 ---
 21
  3
 21
 ---
  0
```

§. 42.

Aufgabe. Eine Zahl z. B. 17.280 durch einen mehrzifferigen Diviſor z. B. 36 zu dividiren.

Auflöſung.

I. Man ſetze den Diviſor (36) ſo unter die erſten zwey oder drey Zifferſtellen des Dividends, daß er wenigſtens einmal darin enthalten iſt, und erforſche den Quotus, oder wie oft der Diviſor hier könne abgezogen werden; um dieß zu erfahren dividirt man zwar nur mit dem erſten Ziffer des Diviſors, muß aber auch auf den zweyten, (oder die nachfolgenden,) Ziffer Rückſicht nehmen, damit man den Quotus nicht zu hoch anrechne. 3 wäre in 17 fünfmal enthalten, aber 5mal 36 iſt 180, kann alſo nicht von 172 abgezogen werden; deßwegen iſt der Quotus nur 4, (dieſer wird beyſeite geſchrieben.) Nun multiplicirt man mit dem Quotus 4 den ganzen Diviſor 36. — $36 \times 4 = 144$. Das Product wird angeſchrieben, darunter ein Strich gezogen, und von den obenſtehenden Ziffern des Dividends ſubtrahirt. Reſt. 28.

II. Zum Reſte (28) wird eine neue Zifferſtelle (8) herabgeſezt, und der Diviſor darunter. Nun dividirt man auf ein Neues: 3 in 28 geht hier nur 8 Mal. Der Quotus 8 wird beyſeite (nach 4) geſchrieben; damit der Diviſor

viſor 36 multiplicirt, und das Product nach einem gezogenen Striche von den über ihm ſtehenden Stellen des Dividends abgezogen. Reſt = o.

III. Die Nulle, als lezte Zifferſtelle des Dividends, wird auch im Quotus angeſezt, und macht alſo 48 (Einheiten) zu Zehnern.

```
Operation   17.280  | 480
             36     |
            144    —|—
            288     |
             36     |
            288     b
              0
```

§. 43.

Andere Regeln zur Vermeidung der Fehler im Dividiren:

I. Der Diviſor kann in eine Stelle des Dividends, wenn auch gleich zwey Ziffer auf einmal dividirt werden müſſen, höchſtens nur 9mal enthalten ſeyn. Wenn man nun zum Quotus 10, 11 bekäme, ſo wäre dieß ein Zeichen, daß man in der vorhergehenden Zifferſtelle den Quotus zu niedrig angeſezt habe.

II. Daß der Quotus zu hoch angerechnet worden, erkennt man daraus, wenn ſich das Product aus dieſem Quotus und dem Diviſor von den treffenden Zifferſtellen des Dividends nicht abziehen läßt.

III. Wie viele Zifferſtellen der Quotus erhalten müſſe, erkennt man leicht, ſo bald nur der Diviſor ſo unter das Dividend geſezt worden, daß er darin wenigſtens einmal enthalten iſt. Je nachdem nun der niedrigſte oder lezte Ziffer des Diviſors unter den Tauſendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten des Dividends ſteht, ſo muß der Quotus aus 4, 3, 2, 1 Zifferſtelle beſtehen.

IV. So oft eine neue Zifferſtelle herabgeſezt wird, muß auch im Quotus ein Ziffer angeſchrieben werden. Sollte man nicht dividiren können, weil das Dividend

kleiner

kleiner iſt als der Diviſor, ſo wird im Quotus eine Nulle angeſezt, und eine neue Zifferſtelle aus dem Dividend herabgeſchrieben.

V. Bleibt am Ende der Diviſion ein Reſt, (d. h. geht die Diviſion nicht rein auf), ſo wird der Diviſor auch unter dieſen Reſt, nach einem dazwiſchen gezogenen Striche, geſezt, zum Zeichen, daß auch dieſer Reſt noch zu theilen ſey.

VI. Hat man einmal im Dividiren eine Fertigkeit erlangt, ſo ſchreibt man den Diviſor nur ſeitwärts vor das Dividend hin, und ſezt ihn im Sinne unter die herabgeſchriebenen Zifferſtellen des leztern.

VII. Anfängern möchte es räthlich ſeyn, die Diviſion durch eine entworfene Tabelle des Diviſors, mittelſt einer bloſſen Subtraction zu verrichten, nach folgendem Muſter:

z. B. 3'896.991 : 1.827

Operation

```
 3'896.991     Quotus
—3 654          2133
 ------
   2429
 —1827
 ------
    6029
  —5481
  ------
     5481
   — 5481
   ------
       0
```

Tabelle des Diviſors

I	Faches.	1.827
II	—	3.654
III	—	5.481
IV	—	7.308
V	—	9.135
VI	—	10.962
VII	—	12.789
VIII	—	14.616
IX	—	16 443

VIII. Wenn der Diviſor am Ende Nullen hat, bleiben ſie während der Operation ganz unthätig; man ſezt ſie nemlich ſogleich unter die lezten Zifferſtellen des Dividends, welche — wenn ſie Zahlziffer ſind — dann im Reſte bleiben.. Hat das Dividend ebenfalls Nullen am Ende, ſo kann man im Dividend und Diviſor gleichviele Nullen abſtreichen.

§. 44.

§. 44.

Aufgabe. Die Diviſion durch die Multiplikation zu prüfen.

Auflöſung. Man multiplicire den Quotus mit dem Diviſor, und addire zum Producte den allenfalls gebliebenen Reſt, ſo ergiebt ſich das Dividend

z. B. 1) 17280 : 36 = 480 (Sechs und Dreyßiger).

Probe. 36 × 480 = 17.280. **Operation**

```
  480
   36
 2880
 144
17.280
```

2) 4937 : 25 =

```
25 |4937 | 197 12/25
   |25   |
    243
    225
    -187
     175
      12 Reſt.
```

Anmerkung. Der Quotus 197 bedeutet 25ger; durch die Multiplikation mit 25 wird alſo 197 erſt in einfache Einheiten aufgelöſet, und gleichartig mit dem Reſte 12, welcher ebenfalls einfache Einheiten bedeutet.

$\frac{12}{25}$ ſpricht man: 12 fünf und zwanzigſte Theile, oder 12 Theile von 25.

Probe.

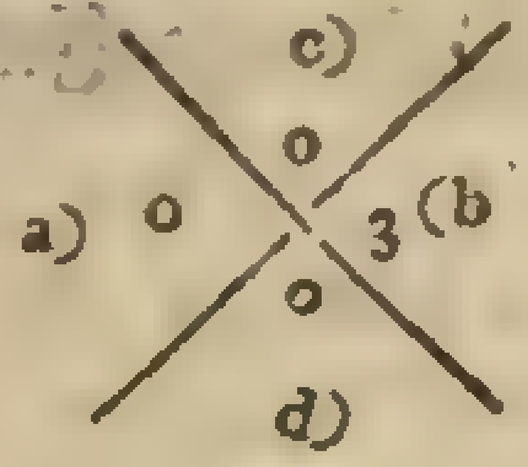
```
 197
  25
 985
394
4925
 +12
4.937
```

Anmerkung 2. Ueber die Diviſion läßt ſich auch die §. 36. gezeigte Kreutzprobe anwenden, wenn man das Dividend als das Product, den Diviſor aber und Quotus als ſeine Factoren betrachtet. Nur muß man zum Producte aus den verjüngten Summen des Diviſors und Quotus den allenfallſigen Reſt addiren, z. B.

α) 17280

α) 17280 : 36 = 480

Probe



a) $3 + 6 = \not 9 + \not 6$

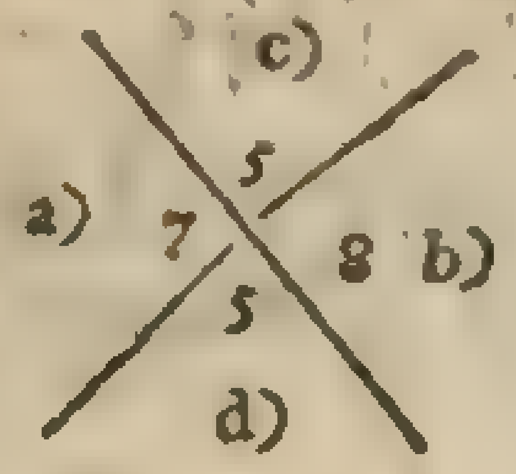
b) $4 + 8 = \not 9 + 3$

c) $3 + 0 = 0$

d) $1 + 7 + 2 + 8 = \not 9 + \not 9 + 0$.

β) $4.937 : 25 = 197\frac{12}{25}$

Probe



a) $2 + 5 = 7$

b) $1 + \not 9 + 7 = 8 + \not 9$

c) $7 \times 8 = 56 = 5\not 6 + \not 6 = 11$
$11 + 12 = 5$

d) $4 + 9 + 3 + 7 = \not 9 + \not 9 + 5$.

§. 45.

Aufgabe. Die Multiplikation durch die Diviſion zu prüfen.

Auflöſung. Man dividire das Product durch den einen Factor, worauf der andere Factor als Quotus erſcheint. Wurden mehr als zwey Factoren durcheinander multiplicirt, ſo bringt man ſie erſt auf zwey, indem z. B. alle Factoren, bis auf einen, in ein Product multiplicirt und als Ein Mitfaktor angeſehen werden. z. B.

1°) . . $129 \times 128 = 16.512$.

Probe.	16.512	(129	oder: 16.512	(128
	128		129	
	371		361	
	128		129	
	256		258	
	1152		1032	
	128		129	
	1152		1032	
	0		0	

2°) Man multiplicire $11 \times 3 \times 7 \times 8$.
Product = 1.848.

Probe.

Probe. 3. 7. 8 = 21. 8 = 168. (Product der lezten drey Factoren).

```
1.848 | 11 erſter Factor.
 168  |—
 ———  | 0
 168
 168
 ———
   0
```

§. 46.

Erklärungen und Zuſätze.

I. Der Quotus wird deſto größer, je größer bey einerley Diviſor das Dividend, oder je kleiner bey einerley Dividend der Diviſor wird z. B.

24	: 12 = 2.	und: 48	: 48 = 1.
36	: 12 = 3.		: 24 = 2.
48	: 12 = 4.		: 12 = 4.
60	: 12 = 5.		: 6 = 8.
72	: 12 = 6.		: 2 = 24.
			: 1 = 48.

Allgemein habe man den Ausdruck der Diviſion:

$$D : d = q.$$

Der Quotus (q) wird alſo m mal ſo groß, oder durch m multiplicirt, wenn ich entweder das Dividend mit m multiplicire, oder den Diviſor durch m dividire:

alſo: $D.m : d = mq.$

$$D : \frac{d}{m} = mq.$$

II. Der Quotus wird um ſo vielmal kleiner, je kleiner entweder bey einerley Diviſor das Dividend, oder je größer bey einerley Dividend der Diviſor wird.

z. B.	48	: 2 = 24.	und: 48	: 2 = 24.
	24	: 2 = 12.		: 4 = 12.
	12	: 2 = 6.		: 8 = 6.
	6	: 2 = 3.		: 16 = 3.

Der Quotus (q) wird alſo m mal ſo klein, oder durch m dividirt, wenn ich entweder das Dividend durch m dividire, oder den Diviſor durch m multiplicire.

$$\frac{D}{m} : d = D : dm = \frac{q}{m}$$

III. Der

III. Der Quotus bleibt unverändert, wenn man Diviſor und Dividend mit der nemlichen Größe multiplicirt oder dividirt, z. B.

$$24:8 = 24.2:8.2 = 24.3:8.3 = 3.$$

$$\frac{24}{2}:\frac{8}{2} = \frac{24}{4}:\frac{8}{4} = \frac{24}{8}:\frac{8}{8} = 3.$$

allgemein: $Dm : dm = q.$

$$\frac{D}{m}:\frac{d}{m} = q.$$

IV. Anſtatt mit dem ganzen Diviſor auf einmal das gegebene Dividend zu dividiren, kann man die Diviſion mit den einzelnen Factoren des Diviſors, wenn dieſer ein Product iſt, nach und nach verrichten:

z. B. $1728:24 = 1728:4.6$

$$\left.\begin{array}{l}1728:6 = 288\\ 288:4 = 72\end{array}\right\}\ 1728:24 = 72.$$

V. Wenn nun ein Dividend ſo in ſeine Factoren zerlegt dividirt werden ſoll, ſo geſchieht dieſe Diviſion, wenn nur Ein Factor deſſelben dividirt wird

z. B. $\frac{5.7.8.9}{4} = 5.7.2.9.$

$$\frac{ab.\,bc.\,df.}{bc} = abdf.$$ (vergl. §. 40. I).

§. 47.

Rechnungsvortheile bey der Diviſion ganzer Zahlen.

I. Anſtatt durch 5, 25, 125 eine Zahl (z. B. 997) zu multipliciren, hängt man dem Multiplikand 0, 00, 000 an, und dividirt dann durch 2, 4, 8.

Denn $\frac{10}{2} = 5. \quad \frac{100}{4} = 25. \quad \frac{1000}{8} = 125.$

Alſo: $997 \times 5 = \frac{9.970}{2} = 4985.$

$$997 \times 25 = \frac{99.700}{4} = 24.925$$

$$997 \times 125 = \frac{997.000}{8} = 124.625.$$

II. Anſtatt eine Zahl durch 9, 99, 999 (oder 8, 98, 998) zu dividiren, dividirt man mit der nächſten Rundezahl von 10, 100, 1000, welches durch ein bloſſes Abſchnei-

ſchneiden der lezten Zifferſtellen des Dividends geſchehen kann. Am Ende aber muß man das Einfache (Zweyfache), des Quotus immer wieder zum Reſte addiren, und auf ein Neues dividiren. — Der Grund dieſes Verfahrens iſt §. 37. II) und aus dem Begriff der Diviſion als Gegenſatz der Multiplikation unſchwer abzunehmen.

Wenn $Dq : D = q$

ſo iſt auch $Dq : D - 1 = q + \frac{q}{D-1}$

Z. B. 1° 970.299 : 99

Operation

```
9702|99   |  9702
   1|00 --|--  98
  97 02   |)    1
---------   ------
  98|01     9801 ganzer Quotus.
   98
  ------
  99 : 99 = 1
```

2°) 941.192 : 98 =

```
 941|92  ( 9.411
   1|00  (   189
 18.822        3
 ------        1
 189|14    -----
   3 78    9.604 ganzer Quotus
 -------
   3|92
     6
 -------
  98 : 98 = 1
```

3°) .. 978.121 : 989 =

```
   978|121  ( 978
     1|000  (  10
   10.758        1
   ------    -----
   10|879     989 ganz. Quot.
     |110
   ----------
   989 : 989 = 1.
```

* Es giebt noch eine Methode, die Diviſion aufwärts zu verrichten, welche ſich beſſer mündlich lehren läßt. Ein Beyſpiel hierüber iſt das Nächſte.

§. 48.

Practiſche Beyſpiele.

I. Von dem Producte 9.261 iſt der eine Factor 21; welches iſt der Mitfactor?

Auf-

Auflöſung 782 |
9261 | 441 iſt der Mitfactor:
2111 | Probe. $441 \times 21 = 9.261$
22 |

II. Das Wievielfache von 12.167 iſt 529?

Auflöſung $12.167 : 529 = 23$ .. alſo das 23fache.

III. Der Flächeninhalt eines Feldes iſt 185.175 □Fuß. Die Breite 225 Fuß: welches iſt die Länge?

Auflöſung. Der Flächeninhalt iſt ein Product aus Länge (L) und Breite (λ). $\square = L \times \lambda$. So wie der Kubiſche Inhalt ein Product aus Länge, Breite, Höhe (A).

$$⧆ = L \times \lambda \times A.$$

Folglich iſt bey dem Flächeninhalt: die Länge $= \frac{L \times \lambda}{\lambda}$
die Breite $= \frac{L \times \lambda}{L}$ } einfache Fuß

Bey dem Kubikinhalt: Länge $= \frac{L.\lambda.A.}{\lambda.A.}$
Breite $= \frac{L.\lambda.A}{L.A.}$
Höhe $= \frac{L.\lambda.A}{L.\lambda.}$ } einfache Fuß
Flächeninhalt $= \frac{L.\lambda.A}{A}$ Quadrat Fuß.

Mithin: 185175 □Fuß : 225 = 823 Fuß Länge.

IV. Das Product 5.544 beſteht aus vier Factoren; drey davon ſind 9. 7. 8, welches iſt der vierte?

Auflöſung. $9.7.8 = 504$ .. $5544 : 504 = 11$. der vierte Factor.

Anmerkung. Wenn Dividend und Diviſor gleichbenannte Zahlen ſind, ſo wird der Quotus eine ſtumme Zahl; iſt aber der Diviſor ſtumme Zahl, und das Dividend benannt, ſo führt der Quotus die Benennung des Dividends. Z.B. 1728 fl.: 12 fl. = 144. d. i. 12 fl. ſind in 1.728 fl. 144 Mal enthalten.

1728 fl.: 12 = 144 fl. d. i. 144 fl. ſind der zwölfte Theil von 1728 fl.

V. Man

V. Man löſe folgende Diviſion mit Buchſtabengrößen in beſtimmte Zahlen auf:

$$36\,a^4b : 18\,a^2$$
$$a = 2.$$
$$b = 3.$$

Auflöſung. $36\,a^4b : 18\,a^2 = 2\,a^2b.$

$$\frac{36 \cdot 2^4 \cdot 3}{18 \cdot 2^2} = \frac{\overset{2}{\not{3}\not{6}} \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{\not{1}\not{8} \cdot \not{2} \cdot \not{2}} = 24.$$

Anmerkung. Gleiches durch Gleiches multiplicirt oder dividirt giebt Gleiches; Ungleiches durch Gleiches, oder verkehrt giebt Ungleiches.

z. B.

$$\begin{array}{rcl} a + b &=& S. \\ a &=& a \\ \hline a^2 + ab &=& aS. \end{array}$$

oder

$$\frac{a+b}{a} = \frac{S}{a}$$
$$1 + b = \frac{S}{a}$$

$$\begin{array}{rcl} a + b &=& S \\ a &<& b \\ \hline a^2 + ab &<& bS. \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a} < \frac{S}{b}$$ u. ſ. w.

Zweites Hauptſtück.

Rechnungsarten mit zuſammengeſezten Buchſtaben- und Zahlengrößen.

§. 49.

Zuſammengeſezte Buchſtaben- und Zahlengröße heißt eine Reihe von mehrern ungleichartigen Größen z. B. verſchiedene Buchſtaben und Zahlen, die mit den Zeichen + und — verbunden ſind, und bey denen keine Abkürzung mehr Statt hat. Z. B. $a^2 + ab - bc + 65$.

Nach der Anzahl der durch + oder — verbundenen Glieder unterſcheidet man monomiſche, binomiſche, trinomiſche, quatrinomiſche Größen u. ſ. w.

Betrachtet man nun alle Glieder einer ſolchen zuſammengeſezten Größe als ein Ganzes und als Eine Größe, z. B. als ein Summand, ein Minuend, Subtrahend, als einen

einen Factor, als ein Dividend oder einen Diviſor, und vermehrt oder vermindert ſie durch eine zweyte mehrgliederige Größe, ſo entſtehen die Rechnungsarten mit zuſammengeſezten Buchſtaben und Zahlengrößen.

Man kann ſich leicht denken, daß hier keine andern Regeln — wenigſtens im Weſentlichen — vorkommen, als bey den Rechnungsarten mit einfachen Größen. Nur die äußere Form in der Operation iſt etwas anders; und ziemlich die nemliche mit jener, welche bey den Rechnungsarten mit bloſſen — ganzen — Zahlen angewendet wird. — So lange die Rechnungsarten bloß angezeigt werden, ſchließt man jede mehrgliederige Größe in Klammern ein, um ſie als ein einziges Ganzes ſichtbar darzuſtellen.

Erſter Artikel.

Addition zuſammengeſezter Buchſtaben- und Zahlengrößen.

§. 50.

Regeln der Addition.

I. Es läßt ſich nur Gleichartiges mit Gleichartigem in eine Summe vereinigen. Gleichartig aber ſind

1. alle ſtummen Zahlen der nemlichen Zifferſtellen,
2. benannte Zahlen der nemlichen Gattung und Art,
3. die nemlichen Buchſtaben — einfach oder als Producte — mit gleichen oder verſchiedenen Coefficienten,
4. Würden gleicher Buchſtaben und Exponenten. (vergl. §§. 2. 13. 14. 18. 28).

II. Gleichartige und übereinſtimmende Größen, (d. i. mit gleichen Zeichen + und + oder — und —) werden addirt. (§. 16.)

III. Gleichartige, entgegengeſezte Größen werden von einander abgezogen, und das Zeichen des Größern im Reſte beybehalten. (§. 17).

IV. Bey

IV. Bey ungleichartigen Größen läßt ſich die Addition bloß anzeigen, nicht wirklich verrichten. (§. 18. V.)

V. Die äußere Form der Operation iſt folgende: Man trennt die Summanden, nachdem man ſie ſo untereinander geſezt hat, daß — wo möglich — Gleichartiges unter Gleichartiges zu ſtehen kommt, von der zu ſuchenden Summe durch einen Horizontalſtrich, und addirt nach den gegebenen Regeln wirklich. Hiebey hat man ſich zu erinnern, daß bey der Addition gleichartiger Buchſtabengrößen die Veränderung nur die Coefficienten, niemals aber die Exponenten angehe. (§. 18. IV.)

VI. Sind alle Glieder der in Klammern eingeſchloſſenen Summanden ungleichartig, ſo geſchieht die Addition blos dadurch, daß man die Klammern wegläßt, und die Buchſtaben ſo nach alphabetiſcher Ordnung nach einander ſezt, daß ſich auch die Würden nach der Größe ihrer Exponenten, von dem Höchſten zum Niedrigſten, auf einander folgen.

§. 51.

Beyſpiele der Addition.

I. $(a + b) + (a - b)$.

II. $(ab - cd) + (3ab - 4cd)$.

III. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$.

IV. $(a^2 + 2ab) + (b^2 + 5ab)$.

V. $(a^3 + 3a^2b - 28) + (a^3 - 5a^2b + 39)$.

VI. $(c^3 + 3c^2d + f - 20) + (c^2 - 3cd^2 - f^2)$.

Auflöſung.

I. $$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline 2a. \end{array}$$

Anmerkung. Wenn man alſo zur Summe zweyer Zahlen ihre Differenz addirt, ſo erſcheint das Doppelte der größern Zahl. Es ſey $a = 8$. $b = 7$. ſo iſt $(8 + 7) + (8 - 7) = 16 = 2 \times 8$.

II. $$\begin{array}{r} ab - cd \\ 3ab - 4cd \\ \hline 4ab - 5cd. \end{array}$$

III. $$\begin{array}{l} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 \\ \hline 2x^3 \end{array}$$

IV. $$\begin{array}{r} a^2 + 2ab \\ 5ab + b^2 \\ \hline a^2 + 7ab + b^2 \end{array}$$

V. $$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b - 28 \\ a^3 - 5a^2b + 39 \\ \hline 2a^3 - 2a^2b + 11. \end{array}$$

VI. $(c^3 + 3c^2d + f - 20) + (c^2 - 3cd^2 - f^2) =$
$c^3 + c^2 + 3c^2d - 3cd^2 - f^2 + f - 20.$

Anmerkung. Es ſey in dem V^ten^ Beyſpiele

$$a = 3.$$
$$b = 2.$$
$$c = 1.$$

Und in dem VI^ten^ $c = 5$, $d = 3$, $f = 1$ } welches iſt die Summe in Zahlen aufgelöſet?

Antwort.

$\alpha)\ (a^3 + 3a^2b - 28) = 27 + 54 - 28 = 53$
$+ (a^3 - 5a^2b + 39) = 27 - 90 + 39 = 66 - 90 = -24.$
$53 - 24 = 29.$
folglich $2a^3 - 2a^2b + 11 = 54 - 36 + 11 = 65 - 36 = 29.$
$\beta)\ (c^3 + 3c^2d + f - 20) = 125 + 225 + 1 - 20 = 331.$
$(c^2 - 3cd^2 - f^2) = -111.$
Folglich $331 - 111 = 220.$

Zweyter Artikel.

Subtraction zuſammengeſezter Buchſtaben- und Zahlen-größen.

§. 52.

Einzige Regel der Subtraction.

"Man verändere in allen Gliedern des Subtrahends die Zeichen, d. i. das Poſitive (+) in das Negative, das Negative (−) in das Poſitive (+), und addire." Der Beweis hievon iſt im §. 21 enthalten.

Anmerkung 1. Die Addition und Subtraction dienen ſich gegenſeitig zur Probe.

2. Um die Addition zu prüfen, zieht man das eine der beyden Summanden von der Summe ab, worauf das Andere als Reſt erſcheint.

3. Um die Subtraction zu prüfen, addirt man den Reſt zu dem Subtrahend (mit unveränderten Zeichen). Die Summe giebt das Minuend wieder.

§. 53.

Beyſpiele der Subtraction.

I. $(a + b) - (a - b)$.

II. $(4ab - 3bc) - (2ab - bc)$.

III. $(x^3 + 2x^2y + xy^2 + y^3) - (x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^3)$.

IV. $(a^2 + 2ab) - (c^2 - 5ab + 3)$

V. $(a^3 + 6a^2b^2 - 8) - (-a^3 + 100a^2b^2 + 25)$.

VI. $(d^2 + 2f^3 - g + 28) - (f^2 + g^2 - 20)$.

Aufloͤſung.

I.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ - \; + \\ \hline 2b. \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} a - b \\ + 2b \\ \hline a + b. \end{array}$$

Anmerkung. Wenn man alſo von der Summe zweyer Groͤßen ihre Differenz abzieht, ſo erſcheint das Doppelte der kleinern Groͤße.

Es ſey $a = 8$, $b = 7$

$$\begin{array}{rcl} 8 + 7 & = & 15 \\ 8 - 7 & = & 1 \\ \hline 15 - 1 & = & 14 = 2 \times 7. \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 4ab - 3bc \\ 2ab - bc \\ - \quad + \\ \hline 2ab - 2bc \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} 2ab - bc \\ 2ab - 2bc \\ \hline 4ab - 3bc. \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2y + xy^2 + y^3 \\ x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^3 \\ - \quad + \quad + \\ \hline 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^3 \\ 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 \\ \hline x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab \\ c^2 - 5ab + 3 \\ - \; + \quad - \\ \hline a^2 + 7ab - c^2 - 3. \end{array}$$

* Die Proben zur Uebung!

V.
$$\begin{array}{r} a^3 + 6a^2b^2 - 8. \\ -a^3 + 100a^2b^2 + 25. \\ + \quad - \qquad - \\ \hline 2a^3 - 94a^2b^2 - 33. \end{array}$$

VI.
$$\begin{array}{r} d^2 + 2f^3 - g + 28 \\ f^2 + g^2 - 20 \\ - \quad - \quad + \\ \hline d^2 + 2f^3 - f^2 - g^2 - g + 48. \end{array}$$

Anmer-

Anmerkung 1. Wie die Addition durch die Subtraction geprüft werde, zeigt folgendes Beyſpiel:

$$(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

Operation
$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline 2a^2 \quad + 2b^2 \end{array}$$

Probe. 1)
$$\begin{array}{l} 2a^2 + 2b^2 \\ -(a^2 + 2ab + b^2) \\ \hline a^2 - 2ab + b^2. \end{array}$$

oder 2)
$$\begin{array}{l} 2a^2 + 2b^2 \\ -(a^2 - 2ab + b^2) \\ - \quad + \quad - \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Anmerkung 2. Man löſe die lezten zwey Probeſubtractionen in ganze Zahlen auf. $a = 4.$
$b = 3.$

Operation 1) $2a^2 + 2b^2 = 32 + 18 = 50.$
$a^2 + 2ab + b^2 = 49.$
$50 - 49 = 1 = a^2 - 2ab + b^2.$

2)
$$\begin{array}{l} 2a^2 + 2b^2 = 50 \\ a^2 - 2ab + b^2 = 1. \\ \hline 50 - 1 = 49 = a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Dritter Artikel.

Multiplikation zuſammengeſezter Buchſtaben und Zahlengrößen.

---

§. 54.

Regeln der Multiplikation.

I. Man ſchreibe den mehrgliedrigen Multiplikator unter das mehrgliedrige Multiplikand, und multiplicire alle Theile des zweyten durch alle Theile des erſten.

II. Die einzelnen Producte werden durch einen Horizontalſtrich von den Factoren getrennt, und zulezt in eine Summe addirt, welche das ganze Product giebt. — Es iſt dieſes ganze Verfahren analog mit jenem bey der Multi-

plikation ganzer Zahlen. (§. 33.) Nur verrichtet man die Multiplikation gewöhnlich von der Linken zur Rechten.

Uebrigens werden

1. die Coefficienten durcheinander multiplicirt,
2. ungleichartige Buchſtabengrößen blos nach alphabetiſcher Ordnung zuſammengeſtellt,
3. die Exponenten gleichartiger Buchſtabengrößen addirt. —
4. Gleiche Zeichen geben ein poſitives, (mit $+$); ungleiche ein negatives Product, (mit $-$).

Anmerkung. Bey der Multiplikation (und Diviſion) geht alſo die Veränderung nicht blos die Coefficienten, ſondern auch die Exponenten und die Zeichen an. (Vergl. §§ 28. 29. 34).

§. 55.

Beyſpiele der Multiplikation.

I. $(a+b) \cdot (a-b)$.

II. $(2b-5) \times (3b-7)$.

III. $(x^2-2xy+y^2) \times (x+y)$.

IV. $(x^2+3x-7) \times (x+5)$.

V. $(m+n+p) \times (m-n-p)$.

VI. $(a+b) \cdot (a-b) \cdot (a^2+ab+b^2) \cdot (a^2-ab+b^2)$.

Anmerkung. Wenn die Multiplikation zweyer oder mehrerer Formeln blos angezeigt werden ſoll, wie hier, ſezt man dieſelben manchmal auch blos mit ihren Klammern, ohne alles Multiplikationszeichen nacheinander.

Z. B. $(a+b)(a-b)$.. oder $(3a-b)c$., wo c als Factor ſowohl zu $3a$, als zu $-b$ gehört.

Auflöſung.

I.
$$\begin{array}{rrr} a & +b & \\ a & -b & \\ \hline a^2 & +ab & \\ & -ab & -b^2 \\ \hline a^2 & & -b^2. \end{array}$$

Wenn

Wenn man alſo die Differenz zweyer Größen mit ihrer Summe multiplicirt, ſo giebt das Product die Differenz der Quadrate von dieſen Zahlen, z. B. $(8+7) \times (8-7)$

$$\begin{array}{lll} 8 & +7 & \\ 8 & -7 & \\ \hline 64 & +56 & \\ & -56 & -49 \\ \hline 64 & & -49 = 15. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{llll} 2b & -5 & & \\ 3b & -7 & & \\ \hline 6b^2 & -15b & & \\ & -14b & +35 & \\ \hline 6b^2 & -29b & +35 & \end{array}$$

Es ſey $b = 6$.. folglich $(12-5) \times (18-7) = 7 \times 11 = 77.$

III.

$$\begin{array}{lllll} x^2 & -2xy & +y^2 & & \\ x & +y & & & \\ \hline x^3 & -2x^2y & +xy^2 & & \\ & +x^2y & -2xy^2 & +y^3 & \\ \hline x^3 & -x^2y & -xy^2 & +y^3. & \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{lllll} x^2 & +3x & -7 & & \\ x & +5 & & & \\ \hline x^3 & +3x^2 & -7x & & \\ & +5x^2 & +15x & -35 & \\ \hline x^3 & +8x^2 & +8x & -35. & \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{llllll} m & +n & +p & & & \\ m & -n & -p & & & \\ \hline m^2 & +mn & +mp & & & \\ & -mn & -n^2 & -np & & \\ & & -mp & -np & -p^2 & \\ \hline m^2 & & -n^2 & -2np & -p^2. & \end{array}$$

VI. Wenn mehr als zwey Formeln durcheinander zu multipliciren ſind, wie hier, ſo muß das Product aus den zwey erſten auch noch durch die dritte; und das neue Product noch durch die vierte Formel multiplicirt werden, wobey es willkührlich iſt, in welcher Ordnung man die Factoren vornehmen wolle. (§. 36.) Man kann auch das Product aus je zwey Formeln, durch das Product aus den übrigen zweyen multipliciren.

$a^2 + ab$

$a^2 + ab + b^2$	$a^2 - ab + b^2$
$a + b$	$a - b$
$a^3 + a^2b + ab^2$	$a^3 - a^2b + ab^2$
$+ a^2b + ab^2 + b^3$	$- a^2b + ab^2 - b^3$
$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$	$a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$

ferner:

$$\begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\ \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\ \quad\quad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\ \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6 \end{array}$$

Die übrigen Glieder heben ſich alle auf.

Oder auch in folgender Ordnung:

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$

$(a^2+ab+b^2) \times (a^2-b^2) = a^4+a^3b-ab^3-b^4.$

$(a^4+a^3b-ab^3-b^4) \times (a^2-ab+b^2) = a^6 - b^6.$

Anmerkung. Es ſey in dem lezten Beyſpiele (Nro. VI.) $a = 8$, $b = 7$, ſo ſteht die ganze Multiplikation in Zahlen aufgelöſet alſo:

$a+b = 8+7 = 15.$

$a-b = 8-7 = 1.$

$a^2 + ab + b^2 = 64 + 56 + 49 = 169$

$a^2 - ab + b^2 = 64 - 56 + 49 = 113 - 56 = 57.$

Das Product aus dieſen vier Factoren iſt

$15 \times 1 \times 169 \times 57 = 144.495.$

Folglich $a^6 - b^6 = 144.495.$

Denn $a^6 = 8^6 = 262.144$

$b^6 = 7^6 = 117.649$

Die Differenz dieſer Zahlen iſt $262.144 - 117.649 = 144.495.$

Vier=

Vierter Artikel.

Diviſion zuſammengeſezter Buchſtaben- und Zahlengrößen.

§. 56.

Regeln der Diviſion.

I. Um die Diviſion zweyer Größen blos anzuzeigen, bedient man ſich entweder des gewöhnlichen Fractions- oder des Diviſionszeichens.

Z. B. $a+b$ dividirt durch $c+d = \frac{a+b}{c+d}$ oder $(a+b) : (c+d)$.

II. Wenn das Dividend eine zuſammengeſezte Formel, der Diviſor aber nur eine einfache Größe iſt; ſo müſſen alle Glieder des erſten beſonders dividirt werden. Dabey werden

1. die Coefficienten dividirt,
2. die Exponenten gleichartiger Buchſtabengrößen ſubtrahirt.
3. Gleiche Zeichen im Dividend und Diviſor geben einen poſitiven, ungleiche Zeichen einen negativen Quotus z. B. $(15a^2b - 18ab^2 + 24b^3) : 3b = 5a^2 - 6ab + 8b^2$.

III. Die Probe wird durch die Multiplikation gemacht, indem man den Quotus mit dem Diviſor multiplicirt.

Z. B. $3b \times (5a^2 - 6ab + 8b^2) = 15a^2b - 18ab^2 + 24b^3$.

IV. Läßt ſich dann ein Glied durch den Diviſor nicht theilen, ſo wird der Quotus als Fraction angeſchrieben

z. B. $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = \frac{a^2}{a^2} - \frac{ab}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$

* Wie man dergleichen Fractionen mit negativen Exponenten ausdrücken könne, wird bey der Würdenlehre gezeigt werden.

V. Wenn der Diviſor ſelbſt eine zuſammengeſezte Größe iſt, ſo wird das erſte Glied des Dividends durch das erſte des Diviſors dividirt, und der Quotus beyſeits geſchrie-

geſchrieben. Hierauf wird der ganze Diviſor mit dem eben erhaltenen Quotus multiplicirt; und das Product vom Dividend abgezogen, (oder was eines iſt, nach veränderten Zeichen zum Dividend addirt). Iſt das Dividend noch nicht erſchöpft, ſo müſſen auch noch die übrigen Theile deſſelben durch den nemlichen Diviſor getheilt werden, indem man zum gebliebenen Reſte, (welcher gewöhnlich das erſte Glied des Dividends wird), immer neue Glieder aus dem Dividend, entweder wirklich, oder blos im Sinne herabſezt. Hiebey iſt auch zu merken, daß ſich das erſte Glied jedes Dividends allezeit rein aufdividiren laſſe.

VI. Um ſich die Rechnung zu erleichtern, erwählt man ſich einen ſchicklichen Theil des Diviſors z. B. den erſten von den vorkommenden Buchſtaben nach alphabetiſcher Ordnung, und nach dieſem Buchſtaben reiht man auch alle Glieder des Dividends ſo nacheinander, daß die höchſten Würden dieſes Buchſtabens zuerſt geſezt werden. — Der ganze Mechanismus der Operation läßt ſich am leichteſten durch Uebung erlernen. Als Leitfaden dient auch hier der Vers: Divide, Multiplica, Subtrahe, Pone loca!

§. 57.

Beyſpiele der Diviſion.

I. $(3a^2 - 2ab) : (3a - 2b)$.

II. $(a^2 - b^2) : (a + b)$.

III. $(x^2 + 3xy + 2y^2) : (x + y)$.

IV. $(x^3 - y^3) : (x - y)$.

V. $(x^4 + 4y^4) : (x^2 - 2xy + 2y^2)$.

VI. $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5) : (1 - 2a + a^2)$.

VII. $(a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

VIII. $$\frac{m^4 + m^2n^2 - 2n^4 + 2m^2p^2 - 5n^2p^2 - 3p^4}{m^2 - n^2 - p^2}.$$

Auflöſung.

I.

$3a^2 - 2ab$ | a

$(3a - 2b)$

$3a^2 - 2ab$

$-\quad +$

0.

Probe

$(3a - 2b) \times a$

$= 3a^2 - 2ab.$

II. a^2

II. $a^2 - b^2$ $(a + b)$ | $a - b$

$$\begin{array}{l} a^2 + ab \\ - \quad - \\ \hline -ab - b^2 \\ (a + b) \\ -ab - b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

Anmerkung. Wenn man die Differenz der Quadrate zweyer Zahlen durch die Summe derſelben in der erſten Würde dividirt, ſo ergiebt ſich die Differenz dieſer Größen ebenfalls in der erſten Würde,

III. $x^2 + 3xy + 2y^2$ $(x + y)$ | $x + 2y$

$$\begin{array}{l} x^2 + xy \\ - \quad - \\ \hline 2xy + 2y^2 \\ (x + y) \\ 2xy + 2y^2 \\ - \quad - \\ \hline 0. \end{array}$$

Probe.

$$\begin{array}{l} x + 2y \\ x + y \\ \hline x^2 + 2xy \\ \quad + xy + 2y^2 \\ \hline x^2 + 3xy + 2y^2 \end{array}$$

IV. $x^3 - y^3$ $(x - y)$ | $x^2 + xy + y^2$

* Die Probe zur Uebung!

$$\begin{array}{l} x^2 - x^2y \\ - \quad + \\ \hline x^2y - y^3 \\ (x - y) \\ x^2y - xy^2 \\ - \quad + \\ \hline xy^2 - y^3 \\ (x - y) \\ xy^2 - y^3 \\ - \quad + \\ \hline 0. \end{array}$$

V. $x^4 + 4y^4$ $(x^2 - 2xy + 2y^2)$ | $x^2 + 2xy + 2y^2$

$$\begin{array}{l} x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline + 2x^3y - 2x^2y^2 \\ (x^2 - 2xy + 2y^2) \\ 2x^3y - 4x^2y^2 + 4xy^3 \\ - \quad + \quad - \\ \hline + 2x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4 \\ (x^2 - 2xy + 2y^2) \\ 2x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4 \\ \hline 0. \end{array}$$

Anmer-

Anmerkung. Im folgendem Beyſpiele iſt das erſte Glied die Zahl 1, weil man mit einer negativen Würden-größe nicht leicht eine Formel anfängt.

VI. $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5 \mid 1 - 3a + 3a^2 - a^3$

$(1 - 2a + a^2)$

$- \quad + \quad -$

$-3a + 9a^2 - 10a^3$

$(1 - 2a + a^2)$

$-3a + 6a^2 - 3a^3$

$+ \quad - \quad +$

$3a^2 - 7a^3 + 5a^4$

$(1 - 2a + a^2)$

$3a^2 - 6a^3 + 3a^4$

$- \quad + \quad -$

$-a^3 + 2a^4 - a^5$

$(1 - 2a + a^2)$

$-a^3 + 2a^4 - a^5$

$+ \quad - \quad +$

o

VII. $a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6 \mid a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3$

$- \quad - \quad - \quad -$

$-a^5b - a^3b^3 - a^2b^4 - b^6$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$-a^5b - a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4$

$+ \quad + \quad + \quad +$

$a^4b^2 - b^6$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5$

$- \quad - \quad - \quad -$

$-a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - b^6$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$-a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - b^6$

$+ \quad + \quad + \quad +$

o.

Es ſey in dieſem Beyſpiele $a = 3$. $b = 2$.
ſo iſt das Dividend $= 729 + 324 - 144 - 64 = 845$.
der Diviſor $= 27 + 18 + 12 + 8 = 65$.
der Quotus $= 27 - 18 + 12 - 8 = 13$.
Und wirklich: $845 : 65 = 13$.

VIII.

VIII. $m^4 + m^2n^2 - 2n^4 + 2m^2p^2 - 5n^2p^2 - 3p^4$.

$$\begin{array}{llllll} (m^2 & - n^2 & - p^2) & & & \Big| \; m^2 + 2n^2 + 3p^2 \\ m^4 & - m^2n^2 & - m^2p^2 & & & \\ - & + & + & & & \\ \hline & 2m^2n^2 & - 2n^4 & + 3m^2p^2 & & \\ & (m^2 & - n^2 & - p^2) & & \\ & 2m^2n^2 & - 2n^4 & - 2n^2p^2 & & \\ & - & + & + & & \\ \hline & & & 3m^2p^2 & - 3n^2p^2 & - 3p^4 \\ & & & (m^2 & - n^2 & - p^2) \\ & & & 3m^2p^2 & - 3n^2p^2 & - 3p^4 \\ & & & - & + & + \\ \hline & & & & 0. & \end{array}$$

Anmerkung. Die Multiplikation wird durch die Diviſion geprüft, indem man das Product durch einen Factor dividirt, worauf der andere als Quotus erſcheint.

Z. B. $(x+y) \times (x^2+xy+y^2) = x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$.

Probe.

I)

$$\begin{array}{llll} x^3 + 2x^2y & + 2xy^2 & + y^3 & \\ (x^2 + xy & + y^2) & & \Big(x+y. \\ x^3 + x^2y & + xy^2 & & \\ - \quad - & - & & \\ \hline x^2y & + xy^2 & + y^3 & \\ (x^2 & + xy & + y^2) & \\ x^2y & + xy^2 & + y^3 & \\ - & - & - & \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

II)

$$\begin{array}{llll} x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 & \Big(x^2 + xy + y^2 & & \\ (x + y) & & & \\ x^3 + x^2y & & & \\ - \quad - & & & \\ \hline & x^2y + 2xy^2 & & \\ & (x + y) & & \\ & x^2y + xy^2 & & \\ & - \quad - & & \\ \hline & & xy^2 + y^3 & \\ & & (x + y) & \\ & & xy^2 + y^3 & \\ & & - \quad - & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Fünfter Artikel.

Von den Eigenſchaften der Zahlen, rückſichtlich ihrer Theilbarkeit.

§. 78.

1. Eine Größe (Q) iſt durch eine andere (d) ohne Reſt theilbar, wenn die erſte Größe ein Vielfaches von d iſt.

Wenn

Wenn $Q = dm$

ſo iſt $\frac{Q}{d} = \frac{dm}{d} = m.$

2. Ganze Zahlen ſind rückſichtlich ihrer Theilbarkeit entweder Primzahlen (einfache) oder Producte, (zuſammengeſezte Zahlen)

a) Primzahlen ſind diejenigen Zahlen, welche keinen andern Factor als ſich ſelbſt und 1 haben; folglich durch keinen andern Theiler, als durch ſich ſelbſt und durch 1 ohne Reſt dividirt werden können. Die Primzahlen von 1 bis 100 ſind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.....

b) Producte ſind jene Zahlen, welche noch einen andern Factor haben — folglich auch einen andern Theiler zulaſſen, als 1 und ſich ſelbſt z. B. $4 = 2. 2. 1.$
$6 = 1. 2. 3.$

Anmerkung. Zahlen, welche durch 2 theilbar ſind, oder in lauter Paare zerlegt werden können, heißen Paarzahlen, oder gerade (numeri pares), die übrigen ungerade Zahlen (numeri impares).

3. Wenn zwey oder mehrere Größen z. B. A, B, C durch eine und die nemliche Größe z. B. D ohne Reſt dividirt werden können, ſo iſt die Größe D der gemeinſchaftliche Theiler für A, B, C.

Anmerkung. Producte, welche keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, heißen Primzahlen unter ſich, (zum Unterſchiede von den abſoluten) z. B. 9, 4, 25 ſind Primzahlen unter ſich; 7, 3, 5, 11, abſolute Primzahlen.

Die übrigen Producte, welche einen gemeinſchaftlichen Theiler haben, z. B. 10, 15, 25, 60 kann man füglich gleichartige Producte nennen, indem ſie ſich alle auf die Benennung dieſes gemeinſchaftlichen Factors zurückbringen laſſen. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2 \\ 15 = 3 \\ 25 = 5 \\ 60 = 12 \end{array}\right\}\text{Fünfer}$$

§. 79.

Specielle Regeln über die Theilbarkeit ganzer Zahlen durch einen ſchicklichen Diviſor ſind folgende:

I. Durch 2 ſind alle geraden Zahlen theilbar, derer Endziffer 2, 4, 6, 8, 0 iſt. — Der allgemeine Ausdruck gerader Zahlen iſt $2m \ldots 2m : 2 = m$. Die ungeraden Zahlen z. B. 1, 3, 5, 7, 9 ſind in der Formel $2m + 1$ enthalten.

II. Durch 3 ſind theilbar alle Zahlen, welche zur Summe ihrer Zifferſtellen ein Ein- oder Mehrfaches von 3 geben; allgemein $3m$ z. B. $102 : 3 = 34$.

denn $1 + 0 + 2 = 3$

Die übrigen Zahlen durch 3 dividirt, laſſen zum Reſte entweder 1 oder 2, und ſind in den Formeln:

$3m + 1$, $3m + 2$ enthalten.

III. Durch 4 ſind alle Zahlen theilbar, derer lezte zwey Zifferſtellen es ſind. — Die durch dieſen Diviſor theilbaren Zahlen ſind in der Formel $4m$, die untheilbaren in $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 3$ enthalten.

* 1128 iſt alſo durch 4 theilbar, weil es 28 iſt.

IV. Durch 5 ſind alle Zahlen theilbar, welche zum Endziffer 5 oder 0 haben. Sie ſind in der Formel $5m$, die übrigen untheilbaren in $5m + 1$, $5m + 2$, $5m + 3$, $5m + 4$ enthalten.

V. Für den Theiler 6 iſt die Formel der Theilbaren: $6m$, der Untheilbaren $6m + 1$, $6m + 2$, $6m + 3$, $6m + 4$, $6m + 5$.

VI. Für den Theiler 7 die Formel der Theilbaren $7m$, der Untheilbaren: $7m + 1$, $7m + 2$, $7m + 3$, $7m + 4$, $7m + 5$, $7m + 6$.

VII. Für

VII. Für den Theiler 8 die Formel der Theilbaren 8 m der Untheilbaren 8 m + 1, 8 m + 2, 8 m + 3, 8 m + 4, 8 m + 5, 8 m + 6, 8 m + 7.

* Durch 8 iſt jede mehrzifferige Zahl ohne Reſt theilbar, wenn es die lezten drey Zifferſtellen derſelben ſind, z. B. $\frac{15824}{8} = 1978$. denn $\frac{824}{8} = 103$.

VIII. Für den Theiler 9, die Formel der Theilbaren 9 m. der Untheilbaren: 9 m + 1, 9 m + 2, 9 m + 3, 9 m + 4, 9 m + 5, 9 m + 6, 9 m + 7, 9 m + 8.

* Alle Producte aus 9 geben zur Summe ihrer Zifferſtellen wieder ein Ein- oder Mehrfaches von 9 z. B.

$1728 : 9 = 192.$

denn $1 + 7 + 2 + 8 = 18 = 2 \times 9$.

** Durch 10 läßt ſich jede Zahl aufdividiren, welche am Ende eine oder mehrere Nullen hat.

IX. Jede Größe läßt ſich durch jeden der Factoren, aus denen ſie beſteht, aufdividiren.

Z. B. 12 hat zu Theilern 12, 6, 4, 3, 2, 1.
16 hat zu Theilern 16, 8, 4, 2, 1.

Denn $12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 = 12.$
$16 \times 1 = 8 \times 2 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$

$2abcd$ iſt theilbar durch 2, a, b, c, d u. ſ. w.

X. Jede Zahl, ſie mag Primzahl, oder Product ſeyn, hat zu Theilern, wenigſtens ſich ſelbſt und 1. Und zwar iſt jede Größe das abſolut größte Maaß ihrer ſelbſt, weil ſie den kleinſten Quotus in ganzen Zahlen hervorbringt. Von den übrigen Theilern einer Zahl iſt der (relativ) größte derjenige, welcher den kleinſten Quotus in einer Primzahl giebt z. B. von 48 iſt der relativgrößte Theiler 24, indem dadurch der Quotus 2 als kleinſte Primzahl erſcheint.

XI. Die Nulle — 0 — iſt als eine Zahl anzuſehen, welche durch alle übrigen Zahlen theilbar iſt; denn jede Zahl kann durch die Multiplikation mit 0, wieder Null hervorbringen.

Z. B. $0 : 5 = 0$. Denn $0 \times 5 = 0$.

§. 80.

§. 80.

Sieht man auf die Verbindung gerader und ungerader Zahlen mit einander, ſo ergiebt ſich folgendes:

I. Die Summe, die Differenz und das Product zweyer gerader Zahlen, giebt wieder eine gerade. Z. B.

$2m + 2m = 4m$ . . . $m = 3$. . . $6 + 6 = 12$
$6m - 2m = 4m$ . . . . $18 - 6 = 12$
$2m \times 4m = 8m^2$ . . . . $6 \times 12 = 72$.

II. Die Summe und Differenz zweyer ungeraden Zahlen und das Product einer geraden und ungeraden Zahl iſt ebenfalls gerade.

Z. B. $(2m+1) + (2m+1) = 4m+2$. Z. B. $7+7 = 14$
$(4m+1) - (2m+1) = 2m$ . . . . $13 - 7 = 6$
$2m \times (2m+1) = 4m^2 + 2m$ . . $6 \times 7 = 42$.

III. Die Summe oder Differenz von einer geraden und einer ungeraden Zahl iſt, ſo wie das Product aus zwey ungeraden Zahlen — ebenfalls ungerade.

Z. B. $2m + (2m+1) = 4m+1$. $6+7 = 13$.
$(2m+1) - (2m) = 1$. $7 - 6 = 1$.
$(2m+1) \times (2m+1) = 4m^2 + 4m + 1$ . . . $7 \times 7 = 49$.

§. 81.

Aufgabe. Ein gegebenes Product in ſeine Factoren, welche Primzahlen ſind, aufzulöſen.

Auflöſung. Mit Hülfe der §. 79 gegebenen Regeln ſucht man einen Mitfactor zu erhalten, und dieſer Mitfactor wird ſo lange zerfällt, bis die Factoren deſſelben keine Producte mehr ſind.

Z. B. I.) $360 = 36.\ 10$ $36 = 6.6 = 3.2.3.2.$ $10 = 2.5.$	III.) $90 = 9.\ 10$ $9 = 3.\ 3$ $10 = 2.\ 5$
folglich $360 = 3.2.3.2.2.5$	$90 = 3.3.2.5.$
II.) $640 = 64 \times 10$ $64 = 8.8 = 2.2.2.2.2.2$ $10 = 2.5$	IV.) $1728 = 432.4.$ $432 = 54.8.$ $54 = 6.\ 9$
$640 = 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 5$	$1728 = 2.2.2.2.2\ 2\ 3.3.3.$

V.) $240 = 24.\ 10 = 3.\ 8.\ 2.\ 5 = 3.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 5.$

§. 82.

§. 82.

Wenn zwey oder mehr Größen z. B. 24, 32, 56 mehrere gemeinſchaftliche Theiler haben, ſo iſt der größte gemeinſchaftliche Theiler dieſer Größen derjenige, welcher ſie alle zugleich aufdividirt, ſo daß entweder alle oder wenigſtens zwey Quotuſſe abſolute Primzahlen, oder doch Primzahlen unter ſich ſind.

Z. B. 24 hat zu Theilern 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.
32 — — —— 32, 16, 8, 4, 2, 1.
56 — — —— 56, 28, 14, 8, 7, 4, 2, 1.

Der größte gemeinſchaftliche Theiler iſt hier offenbar 8; denn dieſer giebt zu Quotuſſen die drey Primzahlen: 3, 4, 7. 3 und 7 als abſolute, 4 als relative Primzahl. Für die Größen 30, 45, 75 iſt der größte gemeinſchaftliche Theiler 15; denn er giebt zu Quotuſſen 2, 3, 5.

§. 83.

Nicht ſelten ereignet es ſich, daß zwey Größen einen gemeinſchaftlichen Theiler haben, der jedoch weder gleich auf den erſten Anblick einleuchtet, noch auch mit Hülfe der §. 79 gegebenen Regeln gefunden werden kann. Indeſſen läßt ſich durch eine allgemeine Regel beſtimmen, ob zwey gegebene Zahlen einen gemeinſchaftlichen Theiler haben, oder nicht, und welcher dieſer ſey. — Dieſe Regel ſtützt ſich auf folgende Grundſätze.

I. Jede Größe iſt ein, und zwar größter, Theiler von ſich ſelbſt: 13 : 13 = 1. m : m = 1.

II. Wenn eine Größe (z. B. a) eine zweyte (ab); und dieſe eine dritte (abc) ohne Reſt dividirt: ſo dividirt die erſte auch die dritte.

$\frac{ab}{a} = b. \quad \frac{abc}{ab} = c.$

folglich abc : a = bc.

6 dividirt 12; 12 aber 24, folglich dividirt 6 auch 24.

III. Wenn

III. Wenn eine Größe (a) gemeinſchaftlicher Theiler von zweyen andern iſt z. B. v. ab und ac: ſo iſt ſie auch Theiler für die Summe und Differenz dieſer beyden Größen

$$\left.\begin{array}{l} ab : a = b \\ ac : a = c \end{array}\right\} \text{folglich } (ab \pm ac) : a = b \pm c.$$

Es ſey $ab = 9$, $ac = 6$, $a = 3$.

$$\left\{\begin{array}{l} 9 + 6 = 15 \\ 9 - 6 = 3. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 15 : 3 = 5 \\ 3 : 3 = 1. \end{array}$$

IV. Wenn eine Größe (z. B. ac) eine zweyte (ac + c) bis auf einen Reſt (c) aufdividirt; ſo geht die Diviſion rein auf, wenn man dieſen Reſt (c) hinwegläßt. Iſt nun in dieſem Falle der Reſt (c), ſelbſt ſchon Theiler der erſten Größe, wie hier von ac, ſo iſt er auch Theiler, und zwar größter von (ac + c.) der zweyten Größe (nach §. 82).

Es ſey $c = 8$, $ac = 48$ | ſo iſt die erſte Größe 48, die zweyte 56.

Der Reſt, wenn 56 durch 48 dividirt wird, iſt 8. — Da nun die Zahl 8 Theiler von 48 iſt, ſo iſt ſie auch Theiler von 56 (nach Grundſ. III.)

Iſt aber nicht der gebliebene Reſt, ſondern nur ein Mitfactor deſſelben Theiler von der erſten Größe: ſo iſt dieſer Mitfactor auch Theiler von der zweyten Größe; und zwar gemeinſchaftlich größter Theiler beyder Größen, wenn er Quotuſſe in abſoluten oder relativen Primzahlen giebt. Man habe die zwey Größen a^2, und $a^2 + ab$. — Die erſte Größe (a^2) dividirt die zweyte ($a^2 + ab$) bis auf den Reſt (ab). Nun iſt nicht das ganze ab, ſondern nur der Factor deſſelben (a) ein Theiler von a^2. Folglich muß dieſes a auch Theiler für die zweyte Größe ($a^2 + ab$) — nach Grundſ. III — mithin gemeinſchaftlich größter Theiler von beyden Größen ſeyn, indem ſich die beyden Quotuſſe auf keine Weiſe mehr verkleinern laſſen, folglich die Form der Primzahlen haben.

Es ſey $a^2 = 121$. Alſo der Reſt $ab = 88$.
$a^2 + ab = 209$. Nun hat 88 mit 121 den

gemeinſchaftlichen Factor 11; dieſer muß nun auch Theiler für die Summe aus 88 und 121 ſeyn, weil er Theiler für die beyden Summanden iſt.

209 : 11 = 19. Da nun die Quotienten 19 und 11
121 : 11 = 11. Primzahlen ſind, ſo folgt, daß 11 der größte gemeinſchaftliche Theiler von 121, und 209 ſey.

§. 84.

Aufgabe. Den größten gemeinſchaftlichen Theiler zweyer Zahlen, z. B. 323 und 475, zu finden.

Auflöſung. Man dividire die größere durch die kleinere, dieſe (wenn die Diviſion nicht ſchon das erſte Mal aufgegangen) wieder durch den gebliebenen Reſt; und mache ſo immer fort den vorigen Diviſor zum Dividend, und den lezten Reſt zum Diviſor. So entdeckt man zulezt den gemeinſchaftlichen größten Theiler, welcher ohne Reſt aufdividirt. — Erhält man zum lezten Reſt und Theiler 1, ſo iſt es ein ſicheres Zeichen, daß die beyden Größen keinen andern gemeinſchaftlichen Factor (und Theiler) haben, als eben 1.

Operation.

a)		b)		c)	
475		323		152	
323	1	152	2	19	8
152	–	304	–	152	–
		19		0	

Alſo iſt 19 gemeinſchaftlich größter Theiler von 323 und 475.

Erklärung. Der Theiler 19 dividirt 152; dieſes dividirt 304 .. folglich dividirt 19 auch 304 (Grundſ. II). Ferner dividirt 19 ſich ſelbſt, und zugleich 304; folglich auch die Summe von 304 + 19 = 323. (Grundſ. III). Endlich dividirt 19 die Größen 323 und 152 als Summanden; folglich auch die Summe 475. — nach dem III. Grundſ. Es iſt alſo 19 größtes gemeinſchaftliches Maaß von 323 und 475, weil die Quotuſſe Primzahlen unter ſich ſind.

$\frac{475}{19} = 25 \therefore \frac{323}{19} = 17.$

Heißt

Heißt man dieſen gemeinſchaftlichen Theiler 19 im allgemeinen d) . . . ſo ſteht die Rechnung alſo: 17d, 25d. —

Zieht man nun die kleinere Größe von der größern, und den Reſt wieder von der erſten Größe u. ſ. w. ab, daß immer der vorhergehende Reſt zum neuen Minuend, und der lezte Reſt zum Subtrahend wird, ſo bleibt am Ende der Factor oder Theiler d — einfach — übrig.

$$\begin{array}{r} 25d \\ -17d \\ \hline 8d. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17d \\ -8d \\ \hline 9d. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9d \\ -8d \\ \hline d. \end{array}$$

Anſtatt aber von 17d — 8d zweymal zu ſubtrahiren, wird die erſte Größe bequemer durch die zweyte dividirt, worauf als Reſt d erſcheint. —

§. 85.

Wenn zwey oder mehrere Größen (z. B. 24, 32, 40) einen gemeinſchaftlichen Factor (z B. 8) haben, ſo iſt das Product aus dieſem gemeinſchaftlichen Factor und aus den Mitfactoren der gegebnen Größen (3, 4, 5) durch jede der drey Größen ohne Reſt theilbar. Und zwar erhält man auf dieſe Weiſe das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für obige Größen, wenn 8 der größte gemeinſchaftliche Theiler von 24, 32, 40 iſt, d. h. zu Quotuſſen Primzahlen — abſolute, oder unter ſich — hervorbringt. (vergl. §. 82).

$$8 \times 3 \times 4 \times 5 = 480.$$

$$\frac{480}{24} = 20. \qquad \frac{480}{32} = 15. \qquad \frac{480}{40} = 12.$$

oder $\frac{8.\cancel{3}.4.5}{8.\cancel{3}} = 20.$ $\frac{8.3.\cancel{4}.5}{8.\cancel{4}} = 15.$ $\frac{8.3.4.\cancel{5}}{8.\cancel{5}} = 12.$

§. 86.

Aufgabe. Das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für was immer für gegebene Theiler zu finden.

Aufl̈ſung. Man zerfälle jeden der gegebenen Theiler in ſeine einfachen Factoren, welche bey Zahlengrößen Primzahlen ſind. Das Product aus allen verſchiedenartigen und aus der höchſten Würde gleichartiger Factoren, ſo wie ſie bey einem einzigen Theiler als Factor vorkommt, iſt das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für alle gegebenen Diviſoren. Solche, welche ohnehin in einem gegebenen höhern enthalten ſind, durchſtreicht man gleich anfänglich, ohne ſie zu zerfällen. Denn was Dividend für das Mehrfache z. B. a^2 iſt, iſt es auch für (a.) das Einfache.

Beyſpiele. Welches ſind die kleinſten gemeinſchaftlichen Dividende

I.) für die Diviſoren: 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 36, 48?

II.) für $3ab$, $5a^2b^2$, $6abc$, $8abc^2$?

Operation

I. $\not{6}\ldots\not{8}.\not{9}.\not{1}\not{0},\not{1}\not{2},\not{1}\not{8},\not{2}\not{4}\quad 7, 15, 20, 36, 48.$

$1.7, \not{3}.\not{5}, \not{2}.\not{2}.5, \not{2}.\not{2}.3.3, 2.2.\not{3}.2.2.$

$2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times7 = 5.040$ — kleinſtes, gemeinſchaftliches Dividend für alle obigen Theiler.

Auf dieſe Weiſe erhält man zugleich den jedem Theiler zugehörigen Quotus, wenn man von dieſen 8 einfachen Factoren jederzeit ſo viele hinwegläßt, als der Diviſor ſelbſt beträgt; das Product der übrigen giebt den jedesmaligen Quotus.

Z. B. 5040

$: 24 = \not{2}.\not{2}.\not{2}.2.\not{3}.3.5.7. = 210$

$: 20 = \not{2}.\not{2}.2.2.3.3.\not{5}.7. = 63.4 = 252.$

$: 36 = \not{2}.\not{2}.2.2.\not{3}.\not{3}.5.7. = 140.$

$: 48 = \dfrac{\text{Quotus von } 24.}{2} = 105.$

$: 15 = 2.2.2.2.3.\not{3}.\not{5}.7 = 48.7 = 336.$

$: 7 = 2.2.2.2.3.3.5.\not{7} = 720.$

II. 3ab

II. $3ab,\ 5a^2b^2,\ 6abc,\ 8abc^2 =$

$3.a.b,\ 5.a.a.b.b,\ 3.2.a.b.c,\ 2.2.2.a.b.c.c$:

kleinſtes gemeinſchaftliches Dividend $= 3.5.8.\ a^2.b^2.c^2$

$= 120a^2b^2c^2$.

Denn $120a^2b^2c^2$ | $: 3ab = 40abc^2$.
| $: 5a^2b^2 = 24c^2$
| $: 6abc = 20abc$.
| $: 8abc^2 = 15ab$.

Nun ſieht man augenſcheinlich, daß dieſe Quotuſſe unter ſich Primzahlen ſind, indem kein Factor in allen vieren gemeinſchaftlich vorkommt. Alſo ꝛc.

Anmerkung. Eine andere Methode, das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für gegebene Theiler z.B. 8, 12, 40, 48, 56, 60 zu finden, iſt folgende:

1. Man ſtreiche die in einem höhern enthaltenen Diviſoren hinweg.

2. Dividire die übrigen, wenigſtens zu zwey und zwey, durch einen gemeinſchaftlichen Theiler, (der gewöhnlich als Primzahl genommen wird), und ſchreibe ſowohl dieſen Theiler — der unverändert bleiben muß — als auch die erhaltenen Quotuſſe ſtatt der dividirten Zahlen hin. — Die Quotuſſe aber dürfen unter ſich und mit den gegebenen Diviſoren, wo es angeht, verkleinert werden.

3. Endlich multiplicire man ſowohl die übriggelaſſenen Diviſoren, als die Quotuſſe und die Verkleinerungszahlen durcheinander. Das Product iſt das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend.

Operation. ~~8~~, ~~12~~, ~~40~~, ~~48~~, ~~56~~, ~~60~~.
2) ~~20~~, ~~24~~, ~~28~~, ~~30~~
2) ~~10~~, ~~12~~, ~~14~~, ~~15~~
2) ~~5~~, ~~6~~, 7. ~~15~~
5) 1, ~~3~~.
3) 2, 1.

$2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 240 \times 7 = 1680$ kleinſtes gemeinſchaftliches Dividend.

1680

$$1680 : 8 = 210.$$
$$: 12 = 140.$$
$$: 40 = \frac{210}{5} = 42.$$
$$: 48 = \frac{140}{4} = 35.$$
$$: 56 = \frac{210}{7} = 30$$
$$: 60 = \frac{140}{5} = 28.$$

Sechster Artikel.

Von dem Zerfällen complexer Größen.

§. 87.

Eine complexe Buchſtabengröße zerfällen, heißt dieſe Größe ſo als ein Product darſtellen, daß auch die Factoren ſichtbar werden, aus denen ſie entſtanden iſt. Ein Product zerfällen, oder auf ſeine urſprünglichen Factoren zurückführen, iſt alſo identiſch. Es wird hier vorausgeſezt, daß beyde Factoren, oder wenigſtens einer von beyden mehr als ein Glied habe, d. i. eine zuſammengeſezte Größe ſey. Denn das Zerfällen einfacher Größen hat gar keine Schwierigkeit, und iſt aus den Regeln der Multiplikation und Diviſion einfacher Größen hinlänglich bekannt. — Wiewohl nun dieſes Zerfällen complexer Größen in der ganzen Mathematik von größter Wichtigkeit iſt, wie bey der Lehre von den Gleichungen noch deutlicher erſcheinen wird, ſo iſt hier doch anzumerken, daß ſich für alle Fälle keine beſtimmte Regeln geben laſſen, ſondern daß das Meiſte auf Uebung und eigne Erfindung ankomme.

Man kann hier zweyerley Fälle unterſcheiden:

I. Wenn nur ein Factor der complexen Größe zuſammengeſezt iſt.

II. Wenn es beyde, oder alle drey, vier ſind.

§. 88.

Wenn nur ein Factor der complexen Größe mehrgliederig oder zuſammengeſezt iſt, z. B. in $ax + bx - x$, welches man daraus erkennt, daß der nemliche Buchſtab in jedem Gliede vorkommt, ſo gilt die Regel: **Man dividire mit dem Factor, der in jedem Gliede vorkommt, die ganze complexe Größe; der Quotus giebt den verlangten Mitfactor.**

$$(ax + bx - x) : x = a + b - 1.$$

Beyſpiele. Man zerfälle

1) $4m^2p - 8mp - 4p$

2) $ax + bx - cx$

3) $xy + 2ay - 4y$.

Auflöſung 1) $\frac{4m^2p - 8mp - 4p}{4p} = m^2 - 2m - 1$

Alſo $4m^2p - 8mp - 4p = [m^2 - 2m - 1] \cdot 4p$.

2) $\frac{ax + bx - cx}{x} = a + b - c$.

folglich: $ax + bx - cx = (a + b - c) \times x$.

3) $\frac{xy + 2ay - 4y}{y} = x + 2a - 4$

folglich: $xy + 2ay - 4y = (x + 2a - 4)\, y$.

§. 89.

Bey Zerfällung complexer Größen, welche aus zwey oder mehrern zuſammengeſezten Factoren entſtanden ſind, iſt die Sache ſchon ſchwieriger, und nicht ſelten kommt es dabey auf ein glückliches Errathen an. Daß dergleichen Größen nicht aus der Multiplikation eines einfachen Factors mit einem zuſammengeſezten entſtanden ſeyen, erkennt man daraus, daß nicht in jedem Gliede der nemliche Buchſtab vorkommt, z. B. in der Größe $a^2 - b^2$. Es laſſen ſich aber zur Zerfällung ſolcher Größen indeſſen folgende Regeln aufſtellen.

I. In jeder complexen Größe, wenn ſie ordentlich gereihet iſt, iſt das erſte Glied (A) ein Product aus den erſten

ſten Gliedern aller Factoren; das lezte Glied (B) ebenfalls ein Product aus den lezten Gliedern aller Factoren, z. B. $(a+b).(a+c).(a+d) = a^3 + a^2(b+c+d) + abc + abd + acd + bcd$.

II. Wenn in einer complexen Gröſse keine Abwechslungen der Zeichen vorkommen, ſo haben alle Glieder der Factoren +, oder alle —; und zwar — oder +, wenn die Anzahl der Factoren gerade; + hingegen allein, wenn ſie ungerade iſt.

z. B. $(\pm a \pm b)(\pm a \pm b) = a^2 + 2ab + b^2$.

III. Wenn in einer complexen Gröſse die Zeichen abwechſeln, ſo ſind auch in den Factoren negative Glieder, z. B. $(a-b).(a+b).(a+b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.

IV. Die Differenz der Quadrate zweyer Zahlen iſt jederzeit ein Product aus der Summe und Differenz ihrer Wurzeln, z. B. $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$.

* Mehr hievon bey den höhern Gleichungen des dritten und vierten Grades.

§. 90.

Beyſpiele. Man zerfälle folgende complexe Gröſſen in ihre Factoren

1) $x^2 - 25$.
2) $2y^2 + yz - z^2$
3) $a^2 - a + ab - b$.
4) $mp + 2np - mx - 2nx$.
5) $2a^2 - 3ab - 2b^2$.

Auflöſung.

1°) $x^2 - 25 = (x+5).(x-5)$ nach Regel IV.

2°) Da das erſte Glied $2y^2 = 2y \times y$

das lezte Glied $-z^2 = +z \times -z$, ſo wird

$2y^2 + yz - z^2 = (2y - z) \times (y + z)$.

* Hätte man mit 2y das Glied +z verbinden wollen, ſo würde im Producte —yz entſtanden seyn.

3°) Hier iſt $A = a^2 = a \times a$

$B = -b = b \times -1$, oder $-b \times +1$.

Da

Da aber das Glied ab poſitiv, und der eine Factor a ebenfalls poſitiv iſt, ſo muß es auch der andere b ſeyn.

Alſo $(a^2 - a + ab - b) = (a + b) \cdot (a - 1)$.

4°) Aus gleichem Grunde iſt $A = m \times p$

$B = 2n \times -x$.

Alſo $pm + 2np - mx - 2nx = (m + 2n) \times (p - x)$.

5) $A = a \times 2a$

$B = 2b \times -b$, oder $-2b \times +b$.

Alſo $2a^2 - 3ab - 2b^2 = (2a + b) \cdot (a - 2b)$.

* Hätte man mit $2a$ das Glied $-2b$ verbunden, ſo würde im Product $2a^2 - 2b^2$ erſchienen ſeyn, nach Regel IV. Denn

$2a - 2b = (a - b)\,2$; folglich $(a + b) \times (a - b)\,2 = 2a^2 - 2b^2$.

Drittes Hauptſtück.

Lehre von den gebrochenen Zahlen (Fractionen).

Allgemeine Einleitung und Vorbegriffe.

§. 91.

Eine Größe, gedacht als Inbegriff von einer beſtimmten Anzahl niedrigerer Einheiten, iſt ein Ganzes. Die allgemeine Form eines Ganzen iſt 1. Mehrere ſolche Größen zuſammengenommen geben eine ganze Zahl.

Eine oder mehrere niedrigere Einheiten, als Theile eines Ganzen gedacht, ſind ein Bruch, (eine gebrochene Zahl, Fractio, numerus fractus).

Z. B. Ein Gulden als Inbegriff von 60 Kr. iſt ein Ganzes, 1 Kr. oder mehrere Kr., als Theile des Guldens betrachtet, ſind ein Bruch.

Folgeſätze 1. Das Ganze iſt alſo ſeinen Theilen zuſammengenommen gleich.

2. Das Ganze iſt größer als ein, oder bloß einige Theile deſſelben.

§. 92.

Unter einer Fraction verſteht man alſo eine oder mehrere jener niedrigern Einheiten, in welche irgend ein Ganzes abgetheilt wird. Man kann ein Ganzes, nach Belieben oder nach Erforderniß der Umſtände, in größere, d. i. wenigere, oder kleinere d. i. mehrere Theile zerlegen z. B. in 2, 3, 4, 5, 6... Dann heißt ein ſolcher Theil davon: Halber, dritter, vierter, fünfter, ſechſter Theil; oder: Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel u. ſ. w.

§. 93.

Der Werth einer Fraction hängt nicht blos von der Anzahl der niederern Einheiten oder Theile eines Ganzen, ſondern auch von ihrer Größe ab. Wenn z. B. 5 Theile eines Guldens gegeben ſind, ſo kommt es darauf an, wie groß jeder dieſer Theile ſey. Dieß Leztere erkennt man an der Anzahl der Theile, in welche man ſich das Ganze getheilt denkt, oder daran, der wievielte Theil des Guldens jeder dieſer 5 Theile iſt.— Man hat alſo, um den Werth einer Fraction auszudrücken, zwey Zahlen vonnöthen, derer eine anzeigt, wie viele Theile gegeben ſeyen; und derer andere dieſe Theile benennt, indem ſie anzeigt, daß dieſelben 2te, 3te, 4te, oder überhaupt n^{te} Theile des Ganzen ſeyen.— Die erſte dieſer zwey Zahlen heißt der Zähler (Numerator) und die zweyte der Nenner (Denominator.) Man ſchreibt den Nenner unter den Zähler, und zieht zwiſchen beyden einen kurzen, wagerechten Strich. Zwey dritte Theile eines Ganzen werden alſo ſo angeſchrieben: $\frac{2}{3}$.

§. 94.

Da jede Fraction eine eigentliche Diviſion vorſtellt, ſo iſt der Werth jeder Fraction ihr Quotus, der ſich ergiebt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Folgeſätze.

I. Der Werth einer Fraction wird weder durch den Zähler, noch durch den Nenner allein, ſondern durch die gegenſeitige Beziehung beyder beſtimmt.

II. Jede

II. Jede Fraction, worin Zähler und Nenner gleich ſind, gleicht einem Ganzen, z. B.

$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \ldots \frac{m}{m} = 1.$

Alſo ſind A Ganze $= \frac{2A}{2} = \frac{3A}{3} = \frac{mA}{m}$.

III. Bey einerley Nenner, (Diviſor) iſt der Werth der Fraction um ſo größer oder kleiner, je größer oder kleiner ihr Zähler (Dividend) iſt. (vergl. §. 46. I.)

$\frac{5}{6} > \frac{3}{6} \quad . \quad \frac{3}{4} > \frac{2}{4}.$

IV. Bey einerley Zähler, (Divident), wird der Werth der Fraction um ſo größer oder kleiner, je kleiner oder größer ihr Nenner (Diviſor) wird. (§. 46. II.)

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots \quad \frac{2}{7} > \frac{2}{9} \ldots\ldots \frac{7}{10} > \frac{7}{11}.$

V. Der Werth einer jeden Fraction bleibt folglich der nemliche, wenn man Zähler und Nenner auf gleiche Art durch Multiplikation vermehrt, oder durch Diviſion vermindert. (§. 46. III).

VI. Dem Werth nach ſind daher alle diejenigen Fractionen gleich, welche, wenn man entweder den Nenner durch den Zähler, oder den Zähler mit angehängten Nullen, durch den Nenner dividirt, bey gleicher Veränderung oder Behandlung auch einen gleichen Quotus geben.

Z. B. a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}.$

b) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} \ldots\ldots$

Beweis. a) $\frac{1,0}{2}, \frac{2,0}{4}, \frac{3,0}{6}, \frac{4,0}{8}, \frac{5,0}{10} = 5.$

oder $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5} = 2.$

b) $\frac{3,00}{4}, \frac{6,00}{8}, \frac{9,00}{12}, \frac{1200}{16} = 75.$ u. ſ. w.

$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \ldots \\ \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} \\ \frac{12}{9} = 1\frac{3}{9} \end{array}\right\}$ aber $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, denn $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3} = 3.$

§. 95.

Jede Fraction läßt ſich alſo, ihres Werthes unbeſchadet, in unzähligen größern oder kleinern Formen ausdrücken.

I. Die kleinſte Form einer Fraction iſt diejenige, worin der Nenner und Zähler Primzahlen abſolute, oder unter ſich, ſind. z. B.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{15}{16},\ \frac{25}{36}.$$

II. Aus der kleinſten Form einer Fraction erhält man größere Formen, wenn man jene, ſowohl im Zähler als auch im Nenner, mit einer beliebigen Zahl multiplicirt.

z.B. $\frac{2}{3} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{6} \overset{\times 3}{=} \frac{6}{9} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{12} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15}.$

III. Aus größern Formen einer Fraction erhält man die kleinſte Form, wenn man Zähler und Nenner ſo lange durch einen ſchicklichen, gemeinſchaftlichen Theiler dividirt, bis Zähler und Nenner Primzahlen ſind.

z.B. $\frac{48}{60} \overset{:2}{=} \frac{24}{30} \overset{:2}{=} \frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5}.$

$\frac{75}{100} \overset{:5}{=} \frac{15}{20} \overset{:5}{=} \frac{3}{4}.$

§. 96.

Durch jedes einſeitige Multipliciren oder Dividiren des Zählers oder Nenners muß der Werth einer Fraction nothwendig verändert werden.

I. Vermehrt — multiplikationsweiſe — wird der Werth einer Fraction

1. wenn man entweder den Zähler durch eine ganze Zahl multiplicirt, oder
2. den Nenner dadurch dividirt.

z.B. das Vierfache von $\frac{3}{8}$ iſt entweder $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{12}{8} \overset{4}{=} \frac{3}{2}.$
oder $\frac{3}{8:4} = \frac{3}{2}.$

II. Vermindert — diviſionsweiſe — wird der Werth einer Fraction

1. wenn

1. wenn man entweder den Zähler durch eine ganze Zahl dividirt; oder
2. den Nenner damit multiplicirt.

Z. B. Der fünfte Theil von $\frac{5}{7}$ iſt entweder $\frac{5:5}{7} = \frac{1}{7}$, oder $\frac{5}{7 \times 5} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.. (vergl. §. 94.)

§. 97.

Fractionen als ſtumme Zahlen ſind gleichartig, wenn ſie gleiche Nenner haben, z. B. $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$; widrigenfalls ungleichartig. Ungleichartige Fractionen aber kann man gleichartig machen, wenn man ſie auf einen gleichen oder gemeinſchaftlichen Nenner bringt... Dieſer gemeinſchaftliche Nenner iſt eine Zahl, welche für mehrere ſpecielle Nenner ein gemeinſchaftliches Dividend iſt, z. B. für die Fractionen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ ſind gemeinſchaftliche Nenner: 12, 24, 36, 48. Der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner iſt aber 12, weil die Quotuſſe 6, 4, 3, 2 wenigſtens zum Theile Primzahlen ſind. (vergl. §. 85.)

§. 98.

Man theilt die Fractionen ein

I. in die gemeinen, welche was immer für Nenner haben mögen, und derer man ſich im bürgerlichen Leben bedient.

II. In die beſondern, welche nur gewiſſe Nenner haben können; dazu gehören

1. die zehntheiligen, Decimalbrüche, derer Nenner 10 oder eine Würde von 10
2. die ſechzigtheiligen, Sexageſimalbrüche, derer Nenner 60 oder eine Würde von 60 iſt.

Die gemeinen Fractionen theilt man wieder

a) in eigentliche, ächte (Fractio vera), welche weniger als ein Ganzes, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.
b) In uneigentliche, unächte (fractio spuria) welche ein Ganzes oder mehr betragen, z. B. $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{7}$.

c) in

c) in gemiſchte Zahlen, d.i. Ganze mit Brüchen, z. B. $3\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$.

d) in gebrochene Brüche, derer Zähler oder Nenner allein, oder beyde eigentliche, oder uneigentliche Brüche, oder gemiſchte Zahlen ſind, z. B.

$\frac{\frac{1}{3}}{4}$ ein Drittel von einem Viertel

$\frac{1\frac{1}{2}}{3}$ ein, und ein halbes Drittel.

§. 99.

Mit den Fractionen, ſowohl gemeinen als beſondern, laſſen ſich die vier Stammrechnungsarten, eben ſo wie mit ganzen Zahlen anwenden.— Dieſes Hauptſtück zerfällt alſo in drey Artikel

I. Rechnungsarten mit gemeinen Fractionen,

II. ——— mit Decimalen,

III. ——— mit Sexageſimalen.

In jedem dieſer drey Artikel aber müſſen zuerſt einige vorläufige Aufgaben gelöſet werden, welche ſich theils auf die Natur und Bezeichnung, theils auf gewiſſe nothwendige Veränderungen der zu behandelnden Fractionen beziehen. —

Erſter Artikel.

Von den gemeinen Fractionen.

A) Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 100.

a) Aufgabe. Gemiſchte Zahlen in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln.

Auflöſung. Man multiplicire die Ganzen mit dem Nenner der Fraction, und addire zum Producte ihren Zähler.— Unter die Summe ſchreibe man den vorigen Nenner, z. B. $8\frac{3}{5} = \frac{40+3}{5} = \frac{43}{5}$ | $a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$. (§. 94 II)

b) Ei-

b) **Einen uneigentlichen Bruch in eine gemiſchte Zahl zu verwandeln.**

Aufloͤſung. Man dividire den Zaͤhler durch den Nenner. Der Quotus giebt die Ganzen. Der Reſt wird als Zaͤhler, und darunter der vorige Nenner angeſchrieben, und die Fraction dem Ganzen angehaͤngt.

Z. B. $\frac{95}{7} = 13\frac{4}{7}$

$$\frac{bc + d}{c} = b + \frac{d}{c}.$$

§. 101.

c) **Aufgabe. Fractionen zu verkleinern, d. i. auf die kleinſte Form, oder den niedrigſten Ausdruck zu bringen.**

Aufloͤſung. Man dividire ſowohl Zaͤhler als Nenner ſo lange durch einen ſchicklichen gemeinſchaftlichen Theiler, bis eine Form erſcheint, deren Zaͤhler und Nenner Primzahlen ſind.

1. Specielle Regeln fuͤr die Theile 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 wurden §. 79 angegeben.

Z. B. $\frac{24}{26} \overset{2}{=} \frac{12}{13}$ | $\frac{1024}{1832} \overset{8}{=} \frac{128}{229} \overset{4}{=} \frac{32}{57}$

$\frac{51}{57} \overset{3}{=} \frac{17}{19}$ | $\frac{81}{117} \overset{9}{=} \frac{9}{13}$

$\frac{28}{32} \overset{4}{=} \frac{7}{8}$ | $\frac{150}{200} \overset{10}{=} \frac{15}{20} \overset{5}{=} \frac{3}{4}$

$\frac{55}{65} \overset{5}{=} \frac{11}{13}$

2) **Allgemeine Regel.** Man dividire den Nenner durch den Zaͤhler; dieſen wieder durch den Reſt, und mache ſo immer fort den vorigen Diviſor zum Dividend, und den neuen Reſt zum Diviſor. — Jener Diviſor, durch den die Diviſion ohne Reſt aufgeht, iſt der groͤßte gemeinſchaftliche Theiler. — Bleibt aber zum lezten Reſte 1, ſo laͤßt ſich die gegebene Fraction gar nicht verkleinern. (vergl. §. 84.)

Man

Man verkleinere α) $\frac{174}{377}$ β) $\frac{101}{203}$.

Operation. α)

$$\begin{array}{r|l} 377 & \\ 174 & 2 \\ 348 & \\ \hline 29 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 174 & \\ 29 & 6 \\ 174 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

folglich: $\frac{174}{377} \overset{29}{=} \frac{6}{13}$.

β)

$$\begin{array}{r|l} 203 & \\ 101 & 2 \\ 202 & \\ \hline 1. & \end{array} \qquad \frac{101}{1} = 101.$$

Da nun hier 1 als Reſt erſcheint, ſo folgt, daß 203 und 101 keinen gemeinſchäftlichen Theiler haben, als 1; mithin die Fraction $\frac{101}{203}$ nicht zu verkleinern ſey.

§. 102.

Sind die zu verkleinernden Fractionen allgemeine Größen, ſo hat man die Regeln anzuwenden, welche (§§. 88, 89) für die Zerfällung einfach — oder doppelt complexer Größen angegeben wurden; wobey zugleich angemerkt wird, daß ſich bey weitem nicht alle Fractionen, derer Zähler und Nenner complexe Größen ſind, verkleinern laſſen. — Die allenfalls mit vorkommenden Coefficienten werden, nach den ſchon gegebenen Regeln für die Theilbarkeit ganzer Zählen, behandelt.

Beyſpiele. Man verkleinere die Fractionen

1°) $\frac{ab^2c}{a^2b^2c^2}$ | 2°) $\frac{3bc^2d^2}{9bc^3d}$ | 3°) $\frac{39x^2y}{52xy^2}$

4°) $\frac{ad + bd}{2bd - cd}$ | 5° $\frac{a^2 - 16}{ab + 4b + ac + 4c.}$

6°) $\frac{x^2 - x + xy - y}{2xy - xz - 2y + z.}$ | 7° $\frac{1 - a^2}{3b - c - 3ab + ac.}$

Auflöſung.

1°) $\frac{ab^2c}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{ac}$

2°) $\frac{3bc^2d^2}{9bc^3d} = \frac{d}{3c} = \frac{1d.}{3c}$

3°) $39x^2y$

3°) $\frac{39x^2y}{52xy^2} = \frac{3x}{4y}.$

4°) $\frac{ad + bd}{2bd - cd} = \frac{(a + b)\,d}{(2b - c)\,d} = \frac{a + b}{2b - c.}$

5°) $\frac{a^2 - 16}{ab + 4b + ac + 4c} = \frac{(a - 4) \times (a + 4)}{(b + c) \times (a + 4)} = \frac{a - 4}{b + c}$

6°) $\frac{x^2 - x + xy - y}{2xy - xz - 2y + z} = \frac{(x + y) \cdot (x - 1)}{(2y - z) \cdot (x - 1)} = \frac{x + y}{2y - z}$

7°) $\frac{1 - a^2}{3b - c - 3ab + ac} = \frac{(1 + a) \cdot (1 - a)}{(3b - c) \cdot (1 - a)} = \frac{1 + a}{3b - c}$

§. 103.

d) **Aufgabe. Fractionen von verſchiedenen Nennern auf einen ſchon gegebenen Generalnenner zu bringen.**

Auflöſung. Man dividire den Generalnenner durch die ſpeciellen Nenner, und multiplicire die Quotuſſe mit dem treffenden ſpeciellen Zähler.

Beyſpiele. 1) Man bringe $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ auf den gemeinſchaftlichen Nenner 60.

2) und $\frac{a}{b}, \frac{2b}{3c}, \frac{5c}{8d}, \frac{d}{2bc^2}$ auf den gemeinſchaftlichen Nenner $24bc^2d$.

Operation. 1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$

$$= \frac{30,\ 40,\ 45,\ 24,\ 50,\ 35.}{60}$$

2) $\frac{a}{b}, \frac{2b}{3c}, \frac{5c}{8d}, \frac{d}{2bc^2}$

$$= \frac{24ac^2d,\ 16b^2cd,\ 15bc^3,\ 12d^2}{24bc^2d.}$$

Beweis. Wenn das Ganze $= A$ (60), ſo iſt ein m^{ter} Theil davon (z. B. der dritte) $\frac{A}{m}$, ($\frac{60}{3} = 20$); folglich p ſolche Theile $\frac{A}{m} \times p$. (zwey dritte Theile $20 \times 2 = 40$). Aus der Diviſion des Generalnenners durch den ſpeciellen ergiebt ſich nemlich der jedesmalige Factor, mit welchen die Fraction in der kleinſten Form multiplicirt werden

den muß, um dieſelbe auf den gegebenen Generalnenner zu bringen. — Dadurch aber wird der Werth der Fraction nicht geſtört (vergl. §. 46).

Zergliedert ſtehet die Operation alſo:

$$\frac{1}{2}\times\frac{30}{30},\ \frac{2.20}{3.20},\ \frac{3}{4}.\frac{15}{15},\ \frac{2}{5}.\frac{12}{12},\ \frac{5}{6}.\frac{10}{10},\ \frac{7}{12}.\frac{5}{5}.$$

$$\frac{a.24c^2d}{b.24c^2d},\ \frac{2b.8bcd}{3c\ 8bcd},\ \frac{5c.3bc^2}{8d.3bc^2},\ \frac{d.\ 12d}{2bc^2.12d}$$

§. 104.

e) Aufgabe. Fractionen auf den kleinſten Generalnenner zu bringen.

Aufloſung. Dieſer Generalnenner iſt nichts anders, als das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für alle ſpeciellen Nenner, welche hier die Diviſoren vorſtellen. Um alſo dieſen kleinſten gemeinſchaftlichen Nenner zu finden, verfährt man ganz, wie §. 86 gezeigt worden. Hat man ihn gefunden, ſo geht die Operation ordentlich nach der Vorſchrift, die im vorhergehenden §. gegeben wurde.

Beyſpiele. Man bringe auf den kleinſten Generalnenner:

a) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{9},\ \frac{11}{12},\ \frac{7}{24},\ \frac{3}{40},\ \frac{17}{48},\ \frac{19}{72}.$

b) $\frac{2}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{12},\ \frac{13}{21},\ \frac{7}{36}.$

Aufloſung.

a) Nenner: $\cancel{3},\ \cancel{4},\ \cancel{5},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{12},\ \cancel{24},\ 40,\ 48,\ 72.$

$$\cancel{7},\quad \cancel{40},\quad \cancel{48},\quad \cancel{72}$$

$$=7,\quad \cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}.5,\ 2.2.2.2.\cancel{3},\ \cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}.3.3$$

Kleinſter Generalnenner $= 35.4.4.9 = 5040.$

$$(7.5.2.2.2.2.3.3 = 5.040)$$

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{9},\ \frac{11}{12},\ \frac{7}{24},\ \frac{3}{40},\ \frac{17}{48},\ \frac{19}{72}$$

$$\frac{3360,\ 1260,\ 3024,\ 3600,\ 1890,\ 3920,\ 4620,\ 1470,\ 378,\ 1785,\ 1330.}{5040.}$$

b) Nenner: $5,\ \cancel{7},\ 8,\ \cancel{9},\ \cancel{12},\ 21,\ 36.$

$$=5,\quad 2.2.2,\qquad \cancel{3}.7,\ \cancel{2}.\cancel{2}.3.3.$$

General-

Generalnenner = 7.5. 2.2.2. 3. 3 = 2520.

$\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{13}{21}, \frac{7}{36} = \frac{1512,\ 720,\ 1575,\ 1120,\ 1050,\ 1560,\ 490}{2520}.$

Anmerkung. 1) Sind alle ſpeciellen Nenner ſchon in einem gegebenen höhern enthalten, ſo gilt dieſer auch ſchon als Generalnenner, z. B.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{11}{18} = \frac{12,\ 15,\ 14,\ 11}{18}$

2) Sind aber alle ſpeciellen Nenner Primzahlen — abſolute, oder unter ſich; ſo iſt der Generalnenner ein Product aus allen ſpeciellen Nennern. Die neuen ſpeciellen Zähler zu erhalten, multiplicire man den vorigen Zähler eines Bruches durch die ſpeciellen Nenner aller übrigen Brüche, nur durch den ſeinigen nicht.

Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7} = \frac{105,\ 140,\ 126,\ 60}{210}.$

Zergliedert ſteht die Operation alſo:

$\frac{1}{2}\times\frac{3.5.7}{3.5.7},\ \frac{2}{3}\times\frac{2.5.7}{2.5.7},\ \frac{3}{5}\times\frac{2.3.7}{2.3.7},\ \frac{2}{7}\times\frac{2.3.5}{2.3.5}.$

§. 105.

Beyſpiele mit allgemeinen Größen.

Man bringe auf den kleinſten gemeinſchaftlichen Nenner

I. $\frac{a}{2b}, \frac{2b}{3c}, \frac{4c}{7b^2}, \frac{2d}{21c^2}$

II. $\frac{3p}{4m}, \frac{2n}{5m^2}, \frac{5x}{8y}, \frac{7y}{16x}.$

III. $\frac{2\beta}{3\delta}, \frac{3\lambda}{4\mu}, \frac{5\pi}{7\omega}.$ IV. $\frac{a}{b} + \frac{2b-c}{2c+d}$

Auflöſung.

I. Generalnenner $2b\times3c\times7b^2\times21c^2 = 42b^2c^2$

$\frac{a}{2b}, \frac{2b}{3c}, \frac{4c}{7b^2}, \frac{2d}{21c^2} = \frac{21abc^2,\ 28b^3c,\ 24c^3,\ 4b^2d.}{42b^2c^2}$

 II. Nen-

II. Nenner: 4m, 5m², 8y, 16x

Generalnenner $= 80\,m^2yx$.

$$\frac{3p}{4m},\ \frac{2n}{5m^2},\ \frac{5x}{8y},\ \frac{7y}{16x} = \frac{60\,mpxy,\ 32\,nxy,\ 50m^2x^2,\ 35m^2y^2}{80\,m^2xy}$$

$$\text{III.}\ \frac{2\beta}{3\delta},\ \frac{3\lambda}{4\mu},\ \frac{5\pi}{7\omega} = \frac{56\beta\mu\omega,\ 63\delta\lambda\omega,\ 60\delta\mu\pi}{84\delta\mu\omega.}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{a}{b} + \frac{2b-c}{2c+d}$$

$$= \frac{2ac+ad+2b^2-bc.}{2bc+bd}$$

§. 106.

f) Aufgabe. Beſtimmen, welche von zwey Fractionen dem Werthe nach grӧßer ſey.

Aufloͤſung. Man bringe die Fractionen, wenn ſie verſchiedene Nenner haben, auf einen gleichen Nenner. Diejenige Fraction, welche dann den groͤßern Zaͤhler erhaͤlt, iſt dem Werthe nach die groͤßere.

Z. B. $\frac{5}{6} < \frac{11}{12} = \frac{10 < 11}{12}$

$\frac{7}{9} > \frac{8}{11} = \frac{77 > 72}{99}$

$\frac{3}{4} < \frac{7}{8} > \frac{13}{16} = \frac{12 < 14 > 13}{16}$

§. 107.

g) Aufgabe. Einen benannten Theilbruch hӧherer Ordnung in die enthaltenen niedrigern Einheiten aufzuloͤſen (z. B. $\frac{3}{5}$ fl. in Kreuzer).

Aufloͤſung. Man multiplicire den Zaͤhler des gegebenen Bruches mit dem Ganzen, in den Theilen ausgedruͤckt, in welchen man den Bruch beſtimmen ſoll, und dividire das Product durch den Nenner. — Wenn es angeht, dividirt man kuͤrzer (oder verkleinert blos) das Ganze durch den Nenner des Bruches, und multiplicirt den Quotus mit dem Zaͤhler.

Beweis.

Beweis. $\frac{3}{5}$ fl. in Kreutzer aufloͤſen heißt entweder a) 3 fl. zu Kreutzern machen $3 \times 60 = 180$ Kreutzer, und davon den 5ten Theil nehmen $\frac{180}{5} = 36$ Kr.; oder es heißt b) den fuͤnften Theil von $60 = \frac{60}{5} = 12$ Kr. dreymal nehmen, d. i. .. $12 \times 3 = 36$ Kr.

So iſt z. B. $\frac{7}{8}$ Pfund $= \frac{7 \cdot 32 \text{ L.}}{8} = 28$ Loth.

$\frac{3}{4}$ Zentr. $= \frac{3 \cdot 100}{4} = 3 \cdot 25 = 75$ Pfund.

$\frac{5}{8}$ Eimer $= \frac{5 \cdot 60}{8} = \frac{5 \cdot 15}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$ Maß.

Anmerkung. Beſteht das Ganze ſelbſt aus mehrern Unterabtheilungen, ſo wird alles auf die niedrigſte Sorte gebracht.

z. B. $\frac{4}{11}$ Laubthl. $= \frac{4}{11} \times 165$ Kr. $= 4 \cdot 15 = 60$ Kr. $= 1$ fl.

$\frac{7}{9}$ Reichsth. $= \frac{7 \cdot 90}{9}$ Kr. $= 70$ kr. $= 1$ fl. 10 Kr.

§. 108.

b) Aufgabe. Einheiten einer niedrigern Ordnung als Theilbruch der hoͤhern Einheit darzuſtellen.

Aufloͤſung. Man betrachte die gegebenen niedrigern Einheiten als den Zaͤhler der Fraction, und ſchreibe darunter als Nenner das Ganze, in den Theilen des Zaͤhlers ausgedruͤckt. Hierauf verkleinere man die Fraction, wenn es angeht. Die Benennung von der niedrigern Sorte verwandelt ſich dann in jene der hoͤhern. — Beſtehen die gegebenen Einheiten ſelbſt ſchon aus mehrern Unterabtheilungen, ſo wird im Zaͤhler ſowohl als Nenner alles auf die niedrigſte Sorte gebracht.

Beweis. Man will hier die Theile im Verhaͤltniſſe zum Ganzen darſtellen; daher muͤſſen beyde gleiche Benennung haben. Dieſes giebt dann eine eigentliche Fraction, die man verkleinern darf ꝛc. ..

z. B.

z. B. 48 Kr. $= \frac{48}{60}$ fl. $\overset{12}{=}$ $\frac{4}{5}$ fl.

75 Pfd $= \frac{75}{100}$ Ztr. $\overset{25}{=}$ $\frac{3}{4}$ Ztr.

28 Loth $= \frac{28}{32}$ Pfd $=$ $\frac{7}{8}$ Pfd.

22 Kr. 2 pf. $=$ 90 pf. $= \frac{90}{240}$ fl. $\overset{30}{=}$ $\frac{3}{8}$ fl.

* Der Gulden = 60 Kr. = 240 pf. = 480 hl.

B) Stammrechnungsarten.

I. Addition.

§. 109.

Regeln der Addition gebrochener Zahlen.

I. Man bringe die Fractionen auf gleichen Nenner, wenn ſie dieſen noch nicht haben.

II. Addire dann die Zähler, und ſetze unter die Summe den gemeinſchaftlichen Nenner. Die auf ſolche Art erhaltene Fraction wird dann, wenn es angeht, verkleinert; oder, wenn ſie Ganze enthält, in eine gemiſchte Zahl verwandelt.

III. Führen die Fractionen auch Ganze mit ſich, ſo addirt man zuerſt die Ganzen, dann die Fractionen. Am Ende werden die Ganzen, die ſich allenfalls aus der Summe der Fractionen ergaben, zur Summe der bloßen Ganzen hinzugezählt. — Man kann aber auch die Ganzen mit ihrer zugehörigen Fraction in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, und übrigens ganz, wie mit ächten Brüchen, verfahren.

Beweis. Es läßt ſich nur Gleichartiges in eine Summe bringen. Fractionen aber ſind gleichartig, wenn ſie Theile des nemlichen Ganzen ſind, d. i. gleiche Nenner haben. — Die Veränderung geht alſo nicht das Ganze ſelbſt — den Nenner; ſondern blos den Zähler an, indem

man

man nur um die Summe aller gegebenen Theile eines beſtimmten Ganzen frägt. (§. 97.)

§. 110.

Beyſpiele.

I. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}=\frac{15}{9}=1\frac{6}{9}=1\frac{2}{3}$

II. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{13}{15}=$

$$\frac{30+40+45+48+10+35+52}{60}=\frac{260}{60}=4\frac{1}{3}$$

III. $3\frac{1}{5}+8\frac{5}{6}+9\frac{1}{10}+7\frac{11}{15}$

a) Summe der bloßen Ganzen $3+8+9+7=27.$

b) Summe der Fractionen $\frac{1}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{10}+\frac{11}{15}=\frac{6+25+3+22}{30}=$

$$\frac{56}{30}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}$$

Totalſumme: $27+1\frac{13}{15}=28\frac{13}{15}.$

IV. $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{2c}{d}=\frac{a+b+2c.}{d}$

V. $\frac{2a}{5b}+\frac{3b}{4c}+\frac{5c}{8d}=\frac{16acd+18b^2d+15bc^2}{24bcd}$

VI. $a+\frac{a}{b},\ +3a+\frac{b}{2c},\ +5c+\frac{3c}{4b^2}$

Summe der Ganzen: $a+3a+5c=4a+5c.$

der Fract. $\frac{a}{b}+\frac{b}{2c}+\frac{3c}{4b^2}=\frac{4abc+2b^3+3c^2}{4b^2c}$

* oder auch: $a+\frac{a}{b}=\frac{ab+a}{b}.\quad 3a+\frac{b}{2c}=\frac{6ac+b}{2c}$

$$5c+\frac{3c}{4b^2}=\frac{20b^2c+5c}{4b^2}=$$

$$\frac{ab+a}{b}+\frac{6ac+b}{2c}+\frac{20b^2c+5c}{4b^2}=\frac{4ab^2c+4abc+12ab^2c+2b^3+20b^2c^2+3c^2}{4b^2c}$$

Dieſe Reihe verkleinert: $\frac{16ab^2c+4abc+2b^3+20b^2c^2+3c^2.}{4b^2c.}$

Nun ſieht man offenbar, daß ſich das erſte und vierte Glied wirklich dividiren laſſe:

$$\frac{16ab^2c+20b^2c^2}{4b^2c}=4a+5c.$$

alſo Totalſumme: $4a+5c+\frac{4abc+2b^3+3c^2}{4b^2c.}$

II. Sub-

II. Subtraction.

§. 111.

Regeln der Subtraction gebrochener Zahlen.

I. Man mache die Fractionen gleichartig, und ziehe Zähler von Zähler ab; unter den Reſt wird dann der gemeinſchaftliche Nenner geſchrieben, und der Bruch, wenn es möglich, verkleinert ꝛc.

II. Hat man von bloſſen Ganzen eine Fraction abzuziehen, ſo verwandle man die Ganzen in einen uneigentlichen Bruch mit dem Nenner 1, und bringe ihn auf den Nenner des Subtrahends. (Kürzer borgt man von den Ganzen 1, und drückt dieſes mit dem Nenner des abzuziehenden Bruches aus. vergl. §. 92).

III. Hat man gemiſchte Zahlen von gemiſchten abzuziehen, ſo verwandle man ſie in uneigentliche Brüche, und verfahre dann ganz, wie mit eigentlichen Brüchen.

IV. Uebrigens verwandle man im Subtractorbruche die Zeichen des Zählers, und addire. —

* Alle dieſe Regeln gehen theils aus dem Begriff des Subtrahirens, als Gegenſatzes der Addition, theils aus der Natur gebrochener Zahlen hervor, und bedürfen keines fernern Beweiſes.

§. 112.

Beyſpiele.

I. $\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

II. $\frac{13}{14} - \frac{3}{7} = \frac{13-6}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

III. $4 - \frac{5}{11} = \frac{44-5}{11} = \frac{39}{11} = 3\frac{6}{11}$.

oder kürzer: $4 - \frac{5}{11} = 3\frac{11}{11} - \frac{5}{11} = 3\frac{6}{11}$

IV. $4\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = \frac{14}{3} - \frac{14}{5} = \frac{70-42}{15} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$.

V. $\frac{6a}{b} - \frac{2a}{b} = \frac{4a}{b}$.

VI. $\frac{a}{c}$

VI. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c^2} = \frac{ac - b}{c^2}$

VII. $b - \frac{a}{c} = \frac{bc - a}{c}.$

VIII. $\left(a + \frac{b}{c}\right) - \left(b + \frac{a}{c}\right) = \left(\frac{ac+b}{c}\right) - \left(\frac{bc+a}{c}\right) = \frac{ac+b-bc-a}{c} = a - b \frac{+b-a}{c.}$

Anmerkung. Hat man gemiſchte Zahlen von einander abzuziehen ſo wird die Rechnung dadurch abgekürzt, daß man zuerſt Brüche von Brüchen, dann erſt Ganze von Ganzen abzieht. Enthält aber das Subtrahend einen gröſſern Bruch, als das Minuend (welches man gewöhnlich nur bey Zahlziffern erkennt); ſo muß man erſt von den Ganzen des Minuends 1 borgen, und in gleichartigen Theilen ausgedrückt zum Minuendbruche addiren. Nach dieſer Operation geht das Beyſpiel VIII. alſo:

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) - \left(b + \frac{a}{c}\right) = a - b \quad + \frac{b-a}{c}$$

IX. $11\frac{2}{3} - 9\frac{1}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \\ 11 - 9 = 2 \end{array}\right]$ ganzer Reſt $= 2\frac{1}{6}$

X. $15\frac{5}{8} - 12\frac{11}{12} = \left\{\begin{array}{l} \frac{5}{8} - \frac{11}{12} = \frac{15-22}{24} \overset{+24}{=} \frac{39-22}{24} = \frac{17}{24} \\ 14 - 12 = 2. \end{array}\right.$

alſo ganzer Reſt $= 2\frac{17}{24}$

§. 113.

Die Addition und Subtraction dienen ſich auch hier gegenſeitig zur Probe; das Verfahren iſt das nemliche, wie bey ganzen Zahlen. (vergl. §. 24. II. §. 23.)

Beyſpiele I. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b^2} = \frac{ab+c}{b^2}$ | Probe. $\frac{ab+c}{b^2} - \frac{a}{b} = \frac{ab+c-ab}{b^2} = \frac{c}{b^2}$

oder $\frac{ab+c}{b^2} - \frac{c}{b^2} = \frac{ab+c-c}{b^2} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b}$

II. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{15+20+6+21}{30} = \frac{62}{30} = \frac{31}{15} = 2\frac{1}{15}$

Probe. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{20+6+21}{30} = \frac{47}{30}$

$\frac{62}{30} - \frac{47}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

III. $\frac{5}{8}$

III. $\frac{5}{8} - \frac{3}{7} = \frac{35-24}{56} = \frac{11}{56}$ Probe. $\frac{11}{56} + \frac{24}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

IV. $a + \frac{b}{c} - \frac{bc}{d^2} = a + \frac{bd^2 - bc^2}{cd^2}$

Probe $a + \frac{bd^2 - bc^2}{cd^2} + \frac{bc}{d^2} = a + \frac{bd^2 - bc^2 + bc^2}{cd^2} =$

$a + \frac{bd^2}{cd^2} = a + \frac{b}{c}$

III. Multiplikation.

§. 114.

Regeln der Multiplikation.

I. Man multiplicire Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner; oder dividire, wenn es angeht, (und verkleinere) was immer für einen Nenner durch was immer für einen Zähler, und umgekehrt.

II. Bloßen Ganzen gebe man den Nenner 1; gemiſchte Zahlen verwandle man in uneigentliche Brüche, und verfahre übrigens, wie mit eigentlichen.

Beweis. Bey der Multiplikation vermehren (nach §. 96) alle Zähler, und vermindern alle Nenner.— Durch die Zähler vermehre ich aber, wenn ich ſie entweder multiplicire, oder damit die Nenner dividire. Durch die Nenner vermindere ich, wenn ich ſie entweder multiplicire, oder damit in die Zähler dividire.

Erklärung. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$ heißt entweder a) den dritten Theil von $\frac{3}{8}$ zweymal, oder b) $\frac{3}{8}$ zweymal, und davon den dritten Theil nehmen. Nun iſt der dritte Theil von $\frac{3}{8}$ entweder $\frac{3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}$.. oder $\frac{3:3}{8} = \frac{1}{8}$ dieſer Theil $\frac{1}{8}$ wird zweymal genommen entweder $\frac{1 \times 2}{8}$, oder $\frac{1}{8:2} = \frac{1}{4}$

alſo: $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

oder: $\frac{1.\not{3}}{\not{8}\;4} \times \frac{\not{2}.1}{\not{3}\;1} = \frac{1}{4}$

§. 115.

§. 115.

Beyſpiele.

I. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

II. $\frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{6}}} \times \frac{\overset{\cancel{4}.2}{\cancel{8}}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{2}{5}.$

III. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{a} \times \frac{x}{y} = \frac{acx}{bdy}.$

IV. $\frac{m^2}{n} \times \frac{n^2}{m} \times \frac{x}{y} \times \frac{a}{x^2} = \frac{mm.n.n.x.a}{m.n.x.x.y} = \frac{amn}{xy}$

V. $12 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times 3 \times 2}{1 \cdot \cancel{4} \cdot 5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

VI. $a \times \frac{c}{a^2} \times \frac{d}{c} = \frac{a.c.d}{a.a.c.} = \frac{d}{a}.$

VII. $4\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{5} \times 12 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{5}} \times \frac{12}{1} =$
$3 \times 108 = 324.$

VIII. $\cancel{48} \times \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{1}{\cancel{12}} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

IX. $\left(c + \frac{c}{d}\right) \times \left(2c + \frac{a}{d}\right) = \frac{(cd + c)}{d} \times \left(\frac{2cd + a}{d}\right)$
$= \frac{2c^2d^2 + 2c^2d + acd + ac}{d^2} = 2c^2 + \frac{2c^2d + acd + ac}{d^2}$

§. 116.

Die Multiplikation mit Fractionen wird angewendet in jedem Falle, wo man multipliciren würde, wenn anſtatt der Brüche ganze Zahlen gegeben wären. — Ueberdieß findet man aus einem Ganzen den einem Theilbruch, entſprechenden Theil, wenn man das Ganze durch den Theilbruch multiplicirt.

Z. B. $\frac{3}{4}$tt Theile von 96 ſind $= 96 \times \frac{3}{4} = 24.3 = 72.$
Von dem Ganzen B ſind $\frac{c}{a}$ Theile $= \frac{Bc}{d}$

(vergl. §. 107).

Anmer-

Anmerkung. Aus dem Begriffe der Multiplikation gebrochener Zahlen iſt es leicht erklärbar, warum das Product jederzeit kleiner werden müſſe, als der Factor m, oder $\frac{m}{n}$, wenn er mit einem eigentlichen Bruche multiplicirt worden. Denn z. B. $16 \times \frac{5}{8}$, heißt: Ich ſoll den Factor 16 — nicht drey — zwey — einmal, ſondern nur $\frac{5}{8}$tel Mal, d. i. den 8ten Theil davon 5mal nehmen.

$$\frac{16 \times 5}{8} = 2.5 = 10.$$

§. 117.

Aufgabe. Gebrochene Brüche in gemeine, einfache zu verwandeln.

Auflöſung. Man betrachte den Nenner des gebrochenen Bruches, als einen eignen Bruch, (mit dem Zähler 1, wenn kein anderer gegeben iſt), und multiplicire beyde Brüche, nach den gegebenen Regeln, durcheinander.

Z. B. $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ (ein halbes Fünftel) $= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

$$\frac{\frac{3}{4}}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}.$$

$$\frac{1\frac{1}{2}}{5} = 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

Beweis. Bey gebrochenen Brüchen ſtellt der Nenner, der ſelbſt ein Bruch iſt, das Ganze vor. — Nun findet man aus einem Ganzen einen Bruchtheil, wenn man das Ganze mit der Fraction, die dieſen Bruchtheil ausdrückt, multiplicirt, z. B. in $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ iſt das Ganze $\frac{1}{5}$.. Davon iſt die Hälfte $\frac{1 \times 1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$.

Anmerkung. Hat man alſo wie immer mit gebrochenen Brüchen zu rechnen, ſo verwandelt man ſie zuerſt in einfache, und behandelt ſie als ſolche. —

IV. Divi-

IV. Diviſion.

§. 118.

Regeln der Diviſion gebrochener Zahlen.

I. Man ſtürze den Diviſorbruch um, (d. i. mache den Zähler zum Nenner, und den Nenner zum Zähler), und multiplicire, ganz nach den Regeln der Multiplikation; oder

II. ohne Umſtürzung des Diviſorbruches: Man multiplicire über das Kreutz, den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Diviſors; ferner den Zähler des Diviſors durch den Nenner des Dividends, und dividire das erſte Product durch das zweyte; oder

III. Dividire, und verkleinere, wenn es angeht, Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner, und multiplicire dann über das Kreutz. Bloßen Ganzen giebt man den Nenner 1, gemiſchte Zahlen verwandelt man in einen uneigentlichen Bruch.

Beweis. Bey der Diviſion mit Fractionen vermehrt der Zähler des Dividends, und der Nenner des Diviſors; hingegen vermindert der Nenner des erſten, und der Zähler des leztern. (§. 46. I. II.) Stürzt man alſo den Diviſorbruch um, ſo hat man ganz den Multiplikationsfall. (§. 114.)

Erklärung. Es ſey das Beyſpiel gegeben $\frac{8}{9} : \frac{2}{3}$, d. i. wie oft iſt $\frac{2}{3}$ in $\frac{8}{9}$ enthalten?

8 : 2 giebt zum Quotus 4. — Wird nun das Dividend 8 um das 9fache kleiner, ſo muß es auch der Quotus 4 werden. Alſo die Hälfte von $\frac{8}{9}$ iſt entweder:

$$\frac{8:2}{9} = \frac{4}{9} \text{ oder } \frac{8}{9 \times 2} = \frac{8}{18}$$

Nun ſollte $\frac{8}{9}$ nicht durch 2, ſondern nur durch den 3ten Theil von 2 dividirt werden; folglich, weil der Diviſor um das Dreyfache vermindert wird, muß der Quotus $\frac{8}{18}$ um das Dreyfache größer werden. Das Dreyfache von $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ iſt entweder $\frac{4}{9} \times 3 = \frac{12}{9}$. oder $\frac{4}{9:3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Alſo

Alſo: $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{4}{\not{8}} \times \not{3}}{\not{9}_3\ \not{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

oder: $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{24}{18} \overset{6}{=} \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

oder: $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8:2}{9:3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

* Um aller Verwirrung auszuweichen, iſt es räthlich, daß ſich Anfänger an eine von dieſen Methoden gewöhnen, z. B. an die erſte, als die leichteſte.

§. 119.

Eine andere Methode der Diviſion iſt folgende: Man bringe die Fractionen auf gleichen Nenner, und dividire dann Zähler durch Zähler, ohne auf den gemeinſchaftlichen Nenner Rückſicht zu nehmen. Ganzen Zahlen giebt man den Nenner 1, gemiſchte Zahlen verwandelt man in uneigentliche Brüche.

Z. B. $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8:6}{9} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Daß aber $\frac{2}{3}$ in $\frac{8}{9}$ — ein, und ein drittelmal enthalten ſey, erhellt daraus, daß die Summe von $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{9}$ — (als dem dritten Theile von $\frac{2}{3}$) $= \frac{8}{9}$.

Oder $1\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6+2}{9} = \frac{8}{9}$

oder: $1\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

§. 120.

Beyſpiele.

I. $\frac{3}{4} : \frac{3}{7} = \frac{\not{3} \cdot 7}{\not{3} \cdot 4} = 1\frac{3}{4}$

II. $9\frac{3}{5} : 12. = \frac{\not{48} \cdot 4}{5 \cdot \not{12}} = \frac{4}{5}$

III. $15 : \frac{4}{5} = \frac{15 \cdot 5}{4} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$.

IV. $5\frac{3}{7} : 2\frac{1}{5} = \frac{38}{7} : \frac{11}{5} = \frac{38 \cdot 5}{7 \cdot 11} = \frac{190}{77} = 2\frac{36}{77}$

V. $\frac{a}{b} : \frac{a^2}{c} = \frac{ac}{ba^2} = \frac{c}{ab}$.

VI. $2x : \frac{3a}{4y} = \frac{8xy}{3a} = 2\frac{2}{3}\frac{xy}{a}$

VII. $\left(3m + \frac{n}{m}\right) : \left(\frac{p}{m+1}\right) = \left(\frac{3m^2+n}{m}\right) \times \left(\frac{m+1}{p}\right)$

$= \frac{3m^3+3m^2+mn+n}{mp}$

§. 121.

Die Diviſion wird durch die Multiplikation geprüft, indem man den Quotus mit dem Diviſor multiplicirt, worauf das Dividend als Product erſcheint.

I. z. B. $3\frac{1}{5} : 2\frac{2}{3} = \frac{16}{5} \times \frac{3}{8} = 1\frac{1}{5}$.

Probe. $1\frac{1}{5} \times 2\frac{2}{3} = \frac{6}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

II. $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{a}{b}$. Probe: $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

Im Gegentheile dient die Diviſion, die Multiplikationsbeyſpiele zu prüfen, indem man das Product durch den einen Factor dividirt, worauf der andere als Quotus erſcheint. — Wurden mehr als zwey Factoren durcheinander multiplicirt, ſo bringt man ſie zuerſt auf zwey. (§. 45).

z. B.
III. $\left(c + \frac{a}{b}\right) \times \left(b + \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{bc+a}{b}\right) \times \left(\frac{bc+b}{c}\right)$

$= \frac{b^2c^2 + abc + b^2c + ab}{bc.} = a + b + bc + \frac{a}{c}$

Probe. $\left(\frac{b^2c^2 + abc + b^2c + ab}{bc}\right) : \frac{bc+b}{c} =$

$\left(\frac{b^2c^2 + abc + b^2c + ab}{bc}\right) \times \left(\frac{c}{bc+b}\right)$

$= \frac{bc^2+ac+bc+a}{bc+b} = c + \frac{a}{b}$ (vergl. §. 123. II.)

IV. $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{8}\;4}{\cancel{9} \cdot 3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Probe. $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{15}$

$1\frac{1}{3} : \frac{8}{15} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{15}\;5}{\cancel{8} \cdot 2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

§. 122.

§. 122.

Man dividirt mit Fractionen in allen Fällen, wo man mit ganzen Zahlen dividiren würde, wenn dieſe anſtatt der Fractionen gegeben wären. Ueberdieß, um aus einem beſtimmten Theile das Ganze zu finden, dividirt man dieſen Theil durch den ihm entſprechenden Bruch.

Z. B. wie heißt das Ganze, von dem $\frac{5}{8}$te Theile $= 45$.

Auflöſung: $45 : \frac{5}{8} = \frac{8.45}{5} = 72$.

Anmerkung. Daß bey der Diviſion ganzer Zahlen (z. B. 48) durch eine eigentliche Fraction (z. B. $\frac{8}{9}$) der Quotient gröſſer werde, als das Dividend ſelbſt, iſt leicht erklärbar, wenn man nur bedenkt, daß der Quotus bey einerley Dividend um ſo größer werde, je kleiner der Diviſor wird.

$$\left.\begin{array}{l} 48 : 4 = 12 \\ 48 : 2 = 24 \\ 48 : 1 = 48 \\ 48 : \frac{8}{9} = 54 \end{array}\right\}$$

Nun ſind aber 54 acht-neunte Theile nicht mehr, und nicht weniger, als 48 Ganze. $\frac{54 \times 8}{9} = 6.8 = 48$.

§. 123.

Durch die bisherigen Vorkenntniſſe iſt man nun in den Stand geſetzt, den Quotus aus ſolchen Diviſionen complexer Größen zu finden, welche nicht rein aufgehen, und welche alſo einen uneigentlichen Bruch vorſtellen, woraus man die Ganzen ziehen ſoll.

Beyſpiele ſollen hier die Stelle vieler Regeln vertreten.

I. $\frac{3ab^2 - 3bcd + f}{ab - cd + x} = 3b + \frac{f - 3bx}{ab - cd + x}$.

Operation

$$\begin{array}{l|l} 3ab^2 - 3bcd + f & 3b + \ldots \\ (ab - cd + x) & - \\ 3ab^2 - 3bcd + 3bx & b \\ - \quad + \quad - & \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{-3bx + f}{ab - cd + x} = \frac{f - 3bx}{ab - cd + x}.$$

II. $\frac{b^2c^2 + abc + b^2c + ab}{(bc^2 + ac)} = b + \frac{b}{c}$

Operation $b^2c^2 + abc + b^2c + ab \quad \big| \; b + \frac{b}{c}$

$(bc^2 + ac)$

$b^2c^3 + abc$

$- \quad -$

$b^2c + ab$

$(bc^2 + ac)$

$\frac{b^2c^2}{c} + \frac{abc}{c} = b^2c + ab$

$- \quad -$

0

* Man ſieht aus dieſem Beyſpiele, daß es Fälle geben könne, wo ſich Diviſionen wirklich aufheben, obwohl man dieſes dem Anſehen nach nicht ſogleich entdeckt.

III. $\frac{3xp^2 + 2p^2 - 6xp - 4p}{px - 2x} = 3p + \frac{2p}{x}$

Operation $3xp^2 + 2p^2 - 6xp - 4p \quad \big| \; 3p + \frac{2p}{x}$

$(px - 2x)$

$3p^2x - 6px$

$- \quad +$

$2p^2 - 4p$

$(px - 2x)$

$\frac{2p^2x}{x} - \frac{4px}{x} = 2p^2 - 4p$

$- \quad +$

0

IV. $a^3 - b^3 + 3ac - 4bc \quad \big| \; a^2 + ab + b^2 + 3c - \frac{bc}{a-b}$

$(a - b)$

$a^3 - a^2b$

$- \quad +$

$a^2b - b^3$

$(a - b)$

$a^2b - ab^2$

$- \quad +$

$ab^2 - b^3$

$(a - b)$

$ab^2 - b^3$

$- \quad +$

$3ac - 4bc$

$(a - b)$

$3ac - 3bc$

$- \quad +$

$\frac{-bc}{a-b}.$

* Wie

* Wie man bey ſolchen Diviſionen ſich mit Vortheil der negativen Exponenten bedienen, oder einen gebliebenen Reſt in eine unendliche Reihe verwandeln könne, wird ſpäter gezeigt werden.

§. 124.

Zugabe einiger practiſchen Beyſpiele über die Lehre von den gemeinen Fractionen.

I. Wie heißt die Zahl, deren Hälfte, vierter und zwölfter Theil 170 beträgt?

Auflöſung. Die unbekannte Zahl werde $= 1$ geſetzt. Daher $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6+3+1}{12} = \frac{10}{12}$.

$170 : \frac{10}{12} = \frac{17 \times 12}{1} = 204$ die unbekannte Zahl.

Probe. 204

$\frac{1}{2}$	102
$\frac{1}{4}$	51
$\frac{1}{12}$	17
$\frac{10}{12}$	170
Reſt $+\frac{2}{12}$	34
1	204.

II. Der kubiſche Inhalt eines Hauſes iſt 490 Kubikruthen, 839 Kubikfuß (Decimalmaß). Welches iſt der kubiſche Inhalt eines andern Hauſes, das um $\frac{3}{8}$te Theile kleiner iſt, als das erſte? (vergl. §. 371. 5.)

Auflöſung. $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. 490° K. + 839′ K. = 490839′ K.
K. $490839' \times \frac{5}{8} = \frac{2454195'\text{ K.}}{8} = 316774\frac{3}{8}$ Kubikfuß =
316 Kubikruthen $774\frac{3}{8}$ Kubikfuß.

III. Von einem Kapitale wurden auf dreymal heimbezahlt a) der dritte Theil, b) $\frac{2}{7}$te, c) $\frac{2}{9}$te Theile. Noch ſind 1500 fl. ausſtändig. Wieviel hatte das Kapital im Ganzen betragen? — Und wie viel wurde auf jeden Termin heimbezahlt?

Auflöſung. Das Kapital werde gleich geſezt 1. Folglich iſt das Heimbezahlte $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} = \frac{21+18+14}{63} = \frac{53}{63}$

Das

Das Rückſtändige $1 - \frac{53}{63} = \frac{63-53}{63} = \frac{10}{63}$.

Dieſer Reſt gleicht 1500 fl., oder 1500 fl. ſind $\frac{10}{63}$ſte Theile des ganzen Kapitals. Mithin (nach §. 122)

$$1500\text{ fl.} : \frac{10}{63} = \frac{1500 \times 63}{10} = 9450$$ das ganze Kapital.

Probe.

	9.450 fl.
$\frac{1}{3}$	3.150
$\frac{2}{7}$	2.700
$\frac{2}{9}$	2.100
$\frac{10}{63}$	1.500
$\frac{63}{63} = 1$	9.450 fl.

IV. Der □Inhalt eines kleinen Gärtchens iſt $14\frac{2}{5}$ □Ruthen. Die Breite beträgt $3\frac{1}{5}$ Ruthen. — Welches iſt die Länge?

Aufloſung. $14\frac{2}{5} : 3\frac{1}{5} = \frac{72}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{72}{16} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ Ruthen beträgt die Länge. (vergl. §. 48).

V. Die Größe 16 iſt ein Product aus vier Factoren, wovon drey ſind: $5\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$. — Welches iſt der vierte Factor?

Aufloſung. $5\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{16 . 9 . 4}{3 . 8 . 5} = \frac{24}{5}$

$$16 : \frac{24}{5} = \frac{16 . 5}{24} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$ der vierte Factor.

Zweyter Artikel.

Von den Decimalbrüchen.

A) Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 124.

Die unter die Einheit fortgeſezte Dekadik führt auf die Decimalen, oder zehntheiligen Brüche, welche zum Nenner, (der nicht angeſchrieben, ſondern für ſich verſtanden wird), 10, 100, 1000.. kurz eine Würde von 10 haben. Gleichwie nemlich von der Rechten zur Linken jede nächſthöhere Zifferſtelle das Zehnfache der vorhergehenden iſt; ſo muß auch umgekehrt von der Linken zur Rechten

jede nächſtniedrigere Zifferſtelle den zehnten Theil der vorhergehenden betragen. — Auf die Stelle der Einheiten folgen alſo die Zehntel, Hundertel, Tauſendel ꝛc. Man muß aber die lezte Zifferſtelle der Ganzen durch ein Komma (,) ſichtbar machen.

Folgende Tabelle ſtellt das Geſagte deutlicher dar:

Stelle der Tauſender	Hundert.	Zehntel.	Einſer.	Zehntel.	Hundertel.	Tauſendel.	10 Tauſendel.	100 Tauſendel.	Millionte l.	10 Millionte l.
1000	100 $\frac{1000}{10}$	10 $\frac{100}{10}$	1. $\frac{10}{10}$	$\frac{1}{10}$ 0,1.	$\frac{1}{100}$ 0,01.	$\frac{1}{1000}$ 0,001.	$\frac{1}{10.000}$ 0,0001	$\frac{1}{100.000}$ 0,00001.	$\frac{1}{1000.000}$ 0,000001	$\frac{1}{10'000.000}$ 0,0000001.
IV.	III.	II.	I.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Die Reihe von 1000 bis $\frac{1}{10.000}$ läßt ſich auch alſo darſtellen, woraus zugleich der Nutzen der negativen Exponenten erhellt.

$$10^{3},\ \Big|\ 10^{2},\ \Big|\ 10^{1},\ \Big|\ 10^{0}\ \Big|\ 10^{-1},\ \Big|\ 10^{-2},\ \Big|\ 10^{-3},\ \Big|\ 10^{-4}\ \text{u.ſ.w.}$$

$$= 1000,\ \Big|\ 100,\ \Big|\ 10,\ \Big| = 1,\ \Big|\ \frac{1}{10^1}\ \Big|\ \frac{1}{10^2}\ \Big|\ \frac{1}{10^3}\ \Big|\ \frac{1}{10^4}$$

$$\text{oder}\ \Big|\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10.000}$$

Der allgemeine Ausdruck eines Decimalbruches, wenn man $10 = \delta$ und den Exponenten $= m$ ſezt iſt demnach:

$$a\delta^{-m} = \frac{a}{\delta^m}$$

Anmerkung. Stehen Decimalen ohne alle Ganze, ſo zeigt man den Abgang der Ganzen durch 0,... an.

§. 125.

Da Nullen nur die Abweſenheit von Zahlziffern in einer Zifferſtelle anzeigen, ſo folgt, daß ſie

a) weder vor Ganzen,

b) noch nach Decimalen einen Werth haben. Nur in der Mitte und am Ende ganzer Zahlen dienen ſie den Werth der vorhergehenden Ziffer zu erhöhen; nach dem Komma der Einheiten aber den Werth der darauf folgenden Decimalen zu erniedrigen.

Alſo

Alſo a) 0024 = 24
0008 = 8.
Eben ſo 1 = 1,000 ....
b) 0,5 = 0,5000 ...
0,05 = 0,0500 ....
c) 0,7 = $\frac{7}{10}$
0,07 = $\frac{7}{100}$
0,007 = $\frac{7}{1000}$ u. ſ. w.

§. 126.

a) Aufgabe. Decimalen richtig auszuſprechen.

Auflöſung. Man kann, nach der Analogie ganzer Zahlen, entweder jede Zifferſtelle einzeln (§. 124), oder die ganze Zahl mit ihrem gemeinſchaftlichen Nenner auf einmal ausſprechen. Dieſer gemeinſchaftliche Nenner aber iſt jederzeit die Einheit mit ſo viel Nullen, als der Decimalbruch Decimalſtellen hat.

a) .. 4,359 heißt entweder 4 Ganze, $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000}$
oder 4 Ganze, $\frac{359}{1000}$.

b) 0,0704 heißt .. kein Ganzes, $\frac{0}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{0}{1000}$, $\frac{4}{10.000}$
oder kein Ganzes $\frac{704}{10.000}$.

Es iſt aber $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{300+50+9}{1000} = \frac{0,359}{1000} = 0,359$.

Anmerkung. Nach einer dritten Art kann man auch z. B. die Zahl

5,16	ſprechen ...	5 Ganze, 16 einfache	Decimalen.
5,016	—	5 Ganze, 16 zehnfache	
5,0016	—	5 Ganze, 16 hundertfache	
5,00016	—	5 Ganze, 16 tauſendfache	

§. 127.

b) Aufgabe. Decimalen richtig anzuſchreiben.

Auflöſung. 1) Nach der erſten Sprechart hat man nur die Abweſenheit eines Zahlziffers in einer Zifferſtelle, welche

welche zwiſchen die gegebenen hineinfällt, durch Nullen zu ergänzen.

2) Nach der zweyten Sprechart muß der Decimalbruch eben ſo viele Ziffernſtellen weniger eine, als der ihm zugehörige Nenner haben.

3) Nach der dritten Sprechart hat man, nach dem Komma der Ganzen, nur eine, zwey, drey ꝛc. Nullen, oder keine zu ſetzen, je nachdem zehn- hundert- tauſend- oder einfache Decimalen anzuſchreiben ſind. Z. B. 669 millionteſte Theile ſchreibt man alſo: 0,000669. $= \frac{669}{1'000.000}$.

§. 128.

c) Aufgabe. Ganze in Decimalbrüche umzuwandeln, oder dieſe auf einen höhern Nenner zu bringen.

Auflöſung. Man ſetze nach den Ganzen das Komma, mit einer beliebigen Anzahl von Nullen; eben ſo hänge man dem Decimalbruche Nullen an, wodurch ſein Werth nicht geſtört wird.

Z. B. 15 Ganze $= 15{,}0000\ldots$

12, 34 $= 12{,}3400\ldots$

Beweis $\frac{15.0000}{1.0000} = 15.$

$\frac{12{,}3400..}{1.0000..} = \frac{1234}{100} = 12 + \frac{34}{100} = 12{,}34.$

§. 129.

d) Aufgabe. Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflöſung. Man hänge dem Zähler des gemeinen Bruches eine beliebige Anzahl von Nullen an, und dividire darein mit dem Nenner. Der Quotus 0, ... giebt den Decimalbruch, welcher dem gemeinen ganz gleicht, wenn die Diviſion aufgeht; mit Approximation aber, wenn die Diviſion niemals ganz aufgeht. — Leztere Decimalbrüche heißen auch unendliche, und gehen nach den Progreſſionsgeſetzen.

z. B.

Z. B. $\frac{1}{2} = \frac{1,0\ldots}{2} = 0{,}5.$

$\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0{,}75.$

$\frac{5}{8} = \frac{5,000}{8} = 0{,}625.$

Beweis. Dadurch, daß man dem Zähler, nach dem Komma der Ganzen, eine beliebige Anzahl von Nullen anhängt, wird der Werth deſſelben nicht verändert (§. 128); dadurch aber wird man zugleich in den Stand geſezt, den gemeinen Bruch, der ein Theilbruch höherer Ordnung iſt, in die enthaltenen niedrigern Einheiten, nemlich Zehntel, Hundertel, Tauſenderl ꝛc. aufzulöſen. (§. 107).

Uebrigens wird in der That nur der gemeine Bruch, im Zähler und Nenner, mit einem ſchicklichen Factor multiplicirt, ſo daß als Nenner die Einheit mit einer oder mehreren Nullen erſcheint.

Z. B. $\frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100} = 0{,}5$

$\frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$

$\frac{5}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{625}{1.000} = 0{,}625.$

* Auf gleiche Weiſe iſt z. B. $\frac{3}{5}$ fl. $= 0{,}6$ fl.

$\frac{16}{25}$ Ztr. $= 0{,}64$ Ztr.

$\frac{15}{16}$ ℔ $= 0{,}9375$ ℔.

§. 130.

Geſetze der unendlichen Decimalbrüche.

Wenn man einen gemeinen Bruch, der einen andern Nenner hat, als 2, 5, 10, nebſt den Producten und Würden dieſer Factoren in einen Decimalbruch verwandelt: ſo entſtehen unendliche Decimalbrüche, bey denen die Diviſion niemals rein aufgeht. Dabey entdecken ſich dann folgende Geſetze:

I. Einige wiederholen immer den nemlichen Ziffer; z. B.

a) $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$,

b) $\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots$

II. An-

II. Andere immer zwey, drey, oder mehrere gleiche z.B. a) $\frac{1}{11} = 0{,}0909 \ldots$

b) $\frac{3}{11} = 0{,}2727 \ldots$

c) $\frac{8}{27} = 0{,}296296 \ldots$

d) $\frac{1}{7} = 0{,}142857|142857 \ldots$

III. Andere endlich wiederholen nach einem, zwey oder auch mehr ungleichen, immer eine Anzahl gleicher Ziffer z.B. a) $\frac{1}{6} = 0{,}1666 \ldots$

b) $\frac{1}{15} = 0{,}0666 \ldots$ c) $\frac{5}{12} = 0{,}4166 \ldots$

d) $\frac{7}{48} = 0{,}1458333 \ldots$

§. 131.

e) **Aufgabe.** Einen endlichen Decimalbruch in den ihm gleichenden gemeinen zu verwandeln.

Auflöſung. Man mache den Nenner des Decimalbruches ſichtbar, und verkleinere, wenn es möglich, dieſe Bruchform.

Z.B. a) $0{,}625 = \frac{625}{1.000} \overset{5}{=} \frac{125}{200} \overset{5}{=} \frac{25}{40} \overset{5}{=} \frac{5}{8}$

b) $0{,}1875 = \frac{1875}{10.000} \overset{5}{=} \frac{375}{2.000} \overset{5}{=} \frac{75}{400} \overset{25}{=} \frac{3}{16}$

§. 132.

f) **Aufgabe.** Einen unendlichen Decimalbruch in den ihm gleichenden gemeinen zu verwandeln.

Auflöſung I. Den Decimalbrüchen, welche nach dem erſten und zweyten Geſetze gehen (§. 130), gebe man ſo viele Neuner (9...) zum Nenner, als gleiche Ziffer immer wiederholt werden, und verkleinere den Bruch in dieſer Geſtalt.

Z.B. a) $0{,}333 \ldots = \frac{333}{999}$ oder $\frac{33}{99}$ oder $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) $0{,}0909 \ldots = \frac{09}{99} = \frac{1}{11}$.

c) $0{,}296296 \ldots = \frac{296}{999} \overset{37}{=} \frac{8}{27}$.

d) $0{,}142857142857 \ldots = \frac{142.857}{999.999} = \frac{1}{7}$. II. Die

II. Die unendlichen Decimalbrüche nach dem dritten Geſetze werden in zwey aufgelöſet, wovon der erſte Bruch ein endlicher mit dem Nenner 10... oder 10^m.. der zweyte aber, den man gleich auf den erſten Anblick kennt, ein unendlicher Decimalbruch iſt. Dieſer erhält zum Nenner ſo viele Neuner, als gleiche Ziffer wiederholt werden, nebſt ſo vielen Nullen, als die Zifferſtellen des endlichen Decimalbruches betragen.— Nun bringt man beyde auf gleichen Nenner, und addirt ſie. Die Summe giebt den verlangten gemeinen Bruch, aus dem der unendliche zehntheilige entſtanden.

* Der Beweis hievon kann erſt bey den unendlichen, abnehmenden, geometriſchen Reihen gegeben werden (§. 349)

a) $0{,}1666\ldots = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{9+6}{90} = \frac{15}{90} \overset{15}{=} \frac{1}{6}$.

b) $0{,}0666\ldots = \frac{0}{10} + \frac{6}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

c) $0{,}4166\ldots = \frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{369+6}{900} = \frac{375}{900} \overset{25}{=} \frac{15}{36} \overset{3}{=} \frac{5}{12}$.

d) $0{,}145833\ldots = \frac{1458}{10000} + \frac{3}{90.000} = \frac{13122+3}{90.000} = \frac{13125}{90.000} \overset{25}{=} \frac{525}{3.600} \overset{25}{=} \frac{21}{144} \overset{3}{=} \frac{7}{48}$.

B. Stammrechnungsarten.

I. Addition und Subtraction der Decimalen.

§. 133.

Einzige Regel. Man ſchreibe die zu addirenden, oder zu ſubtrahirenden Größen ſo unter einander, daß ſowohl bey Ganzen, als bey Decimalen gleichartige Zifferſtellen unter ſich zu ſtehen kommen, (dieß geſchieht, wenn die Kommate der Decimalen in ſenkrechter Linie über einander ſtehen), und verfahre dann ganz wie bey der Addition und Subtraction ganzer Zahlen.— Beyde Rechnungsarten dienen ſich auch hier wieder zur Probe.

Bey-

Beyſpiele I) 6,3409 + 4,5001, + . 18,3, + 0,007.
II) 13,047 — 8,356.
III) 12, — 5,9368.

Auflöſung. I)

	6,3409
	4,5001
	18,3
	0,007
	29,1480. Summe
Probe.	1.1 1—

II)	13,047	III)	12,0000
	—8,356		—5,9368
	4,691		6,0632.
Probe.	1,3,047	Probe.	12,0000 = 12.

II. Multiplikation der Decimalen.

§. 134.

Regeln der Multiplikation.

I. Man multiplicire Decimalen, wie ganze Zahlen, ohne auf das Komma der Ganzen Rückſicht zu nehmen.

II. Im Producte ſchneide man ſo viele Decimalſtellen von der Rechten zur Linken ab, als die Summe der Decimalſtellen in den Factoren beträgt.

III. Sollte das Product nicht ſo viele Zifferſtellen enthalten, als abzuſchneiden ſind, ſo erſetze man die abgängigen durch vorangeſezte Nullen, mit dem o,

Beweis. Man habe den allgemeinen Ausdruck:

$$\frac{a}{\delta^m} \times \frac{b}{\delta^n} = \frac{ab}{\delta^{m+n}} = ab\delta^{-(m+n)}$$

So ſieht man, daß die Exponenten von δ (= 10) die Nullen anzeigen, welche der Nenner des Decimalbruches — zugleich aber auch die Decimalſtellen, welche der Zähler des nemlichen Bruches erhalten muß.

Es ſey $a = 15 \quad m = 2$
$b = 6 \quad n = 3.$

So hat man: $\frac{15}{10^2} \times \frac{6}{10^3} = \frac{15}{100} \times \frac{6}{1000} = \frac{90}{100.000}$

oder $0,15 \times 0,006 = 0,00090.$

* Die

* Die Multiplikationsbeyſpiele laſſen ſich durch die Neuner- oder durch die Diviſionsprobe prüfen.

Beyſpiele 1) 0,35×7,21.

Auflöſung

$$\begin{array}{r} 7,21 \\ 0,35 \\ \hline 3605 \\ 2163 \\ \hline 2,5235 \end{array}$$

Probe

2) 0,00125 × 0,08 × 0,03

Auflöſung .... 125 × 8 × 3 = 0,000003000 = 0,000003.

III. Diviſion der Decimalen.

§. 135.

Regeln der Diviſion.

Man dividire die Decimalen wie ganze Zahlen, ohne auf das Komma der Ganzen Rückſicht zu nehmen. Jm Quotus ſchneide man ſo viele Decimalſtellen ab, als die Differenz zwiſchen den Decimalſtellen des Dividends und Diviſors beträgt, und ergänze die im Quotienten allenfalls fehlenden Decimalſtellen durch vorangeſezte Nullen.

Beweis. Jedes Dividend läßt ſich betrachten, als ein Product aus dem Diviſor und Quotienten; und folglich muß es die Summe der Decimalſtellen ſeiner beyden Factoren enthalten, es mögen dieſelben ausdrücklich ſtehen, oder nicht.. Es iſt alſo leicht zu begreifen, daß die Decimalſtellen im Quotus nur die Differenz zwiſchen den Decimalſtellen des Dividends, und jenen des Diviſors betragen müſſen.

Denn wenn $\frac{a}{\partial^m} \times \frac{b}{\partial^n} = \frac{ab}{\partial^{m+n}}$

($m+n$ Summe der Decimalſtellen im Producte oder Dividend)

ſo iſt auch $\frac{ab}{\partial^{m+n}} : \frac{a}{\partial^m} = \frac{b}{\partial^{m+n-m}} = \frac{b}{\partial^n}$

und $\frac{ab}{\partial^{m+n}} : \frac{b}{\partial^n} = \frac{a}{\partial^{m+n-n}} = \frac{a}{\partial^m}$.

Dieſe

Dieſe allgemeine Diviſionsregel modificirt ſich nun für folgende drey Fälle alſo:

1°. Sind die Decimalſtellen im Dividend und Diviſor gleich, ſo enthält der Quotus, — ſo lange man aus dem Dividende neue Ziffernſtellen herabſetzen kann, — lauter Ganze.

Z.B. 1,44 : 0,12 = 12. Beweis $\frac{144}{1\not{0}\not{0}} \times \frac{1\not{0}\not{0}}{12} = 12.$
Denn 2 − 2 = 0.

2°. Hat der Diviſor mehr Decimalſtellen, als das Dividend, ſo macht man die Decimalſtellen durch angehängte Nullen gleich, und der Quotus giebt wieder Ganze. Ein allenfalls bleibender Reſt läßt ſich wie ein gemeiner Bruch behandeln, und nach den gegebenen Regeln in einen Decimalbruch verwandeln.

Z.B. $64 : 0,8 = 64,0 : 0,8 = \frac{640}{1\not{0}} \times \frac{1\not{0}}{8} = 80.$

3°. Hat das Dividend ohnehin ſchon mehr Decimalſtellen als der Diviſor, ſo hat man im Quotus nur ſo viele Decimalſtellen abzuſchneiden, als der Ueberſchuß derſelben im Dividende über die des Diviſors beträgt. — Da man bey der Diviſion mit Decimalen nicht allezeit zuverläßig beſtimmen kann, ob die Rechnung rein aufgeht, ſo iſt es am bequemſten, alle Diviſionsbeyſpiele auf den dritten Fall zu reduciren, und zu dieſem Ende dem Dividende ſo viele Nullen anzuhängen, daß die Decimalſtellen deſſelben der Zahl nach — zwey oder drey — mehr betragen, als jene des Diviſors.

* Uebrigens werden die Diviſionsbeyſpiele auch hier durch die Multiplikation geprüft.

§. 136.

Beyſpiele I. 4565,33 : 59,29.
II. 129,6 : 0,072.
III. 0,01728 : 36.
IV. 37,8 : 45. V. 3,7 : 0,14.

Auf-

Auflöſung I.

```
4565,33  | 77
59,29
41503
------
41503
 5929
41503
------
    0
```

Probe. $59{,}29 \times 77 = 4565{,}33$.

II.

```
129,600  | 1800
 72
----
576
 72
576
----
  0
```

Probe. $1800 \times 0{,}072 = 129{,}600$
$= 129{,}6$

III.

```
0,01728  | 48 ... Quotus 0,00048.
   36
  144
  ---
  288
   36
  288
```

Probe. $0{,}00048 \times 36 = 0{,}01728$.

IV.

```
37,800  | 0,840 = 0,84
 45
360
----
 180
  45
 180
----
   0
```

V.

```
3,7000000000 ..  | 26,42857142
0,14
 28
----
 90
(14)
 84
----
 60
(14) 56
----
  40
  28
----
 120
 112
----
  80
  70
----
 100
  98
----
  20
  14
----
  60
  56
----
  40
  28
----
Reſt. 12
```

Probe.

$(26{,}42857142) \times 0{,}14$

$= 3{,}6999999988$
$+12$

$= 3{,}700$ ....

Auf-

Aufgabe. Man findet den Umkreis eines Cirkels, wenn man den Durchmeſſer deſſelben mit der Zahl 3,1415 ($=\pi$) multiplicirt. — Welches iſt nun der Umkreis eines Kirchenrundels, deſſen Durchmeſſer 25,4 Fuß iſt?

Auflöſung. $(3,1415) \times 25,4$
$= 79,79410$ Fuß iſt der Umkreis.

Probe durch die Diviſion: $\frac{79,79410}{3,1415} = 25,4$

§. 137.

Kommen bey einer und der nemlichen Rechnung gemeine und Decimalbrüche vor, ſo kann man entweder die gemeinen in Decimal- oder die Decimalbrüche in gemeine verwandeln. — Wie man in dergleichen Fällen mit unendlichen Decimalbrüchen zu verfahren habe, ſollen Beyſpiele zeigen.

I. $0,625 - \frac{3}{8}$

II. $0,333 \ldots\ldots - \frac{1}{4}$.

III. $0,125 + \frac{1}{7}$.

Auflöſung I.

$\frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

oder.

$\frac{3}{8} = 0,375$

$0,625$
$-0,375 =$
$0,25 = \frac{1}{4}$.

II. $0,333 \ldots\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

oder.

$\frac{1}{4} = 0,25$.

$0,3333 \ldots$
$0,25$
$0,0833 \ldots\ldots =$

$\frac{8}{100} + \frac{3}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$.

III. $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{7+8}{56} = \frac{15}{56}$.

oder: $\frac{1}{7} = 0,142857142857 \ldots\ldots$
$+\frac{1}{8} = 0,125$

$S. = 0,267857142857 \ldots\ldots =$

$\frac{267857}{1000.0000} + \frac{142857}{999.999.000.000} =$

$\frac{267856875}{999999000} = \frac{15}{56}$.

Denn $267856875 \times 56 = 14999985000$.
$999999000 \times 15 = 14999985000$.

Drit-

Dritter Artikel.

Von den Sexageſimalbrüchen.

A) Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 138.

Sexageſimalen ſind Brüche, welche zum Nenner 60, oder eine Würde von 60 haben. Z. B. $\frac{a}{60}$, $\frac{b}{60^2}$, $\frac{c}{60^3}$ Dieſe Brüche haben ihren Nutzen bey Berechnung der Zeit oder der Grade eines Zirkelbogens.

Nemlich 1 Stunde = 60 Minuten
1 Minute = 60 Sekunden
1 Sekunde = 60 Terzen.

Eben ſo werden die Grade eingetheilt, derer ein Zirkel 360 zählt.

Z. B. 1 Grad = 60 Minuten u. ſ. f.

§. 139.

Man könnte zwar die Sexageſimalen in der Rechnung, ganz wie gemeine Brüche behandeln; unterdeſſen würde das Geſchäft zu mühſam werden. Man hat alſo eine kürzere Art der Bezeichnung dieſer Brüche, und zwar mit negativen Exponenten ausgedacht, wobey die Nenner gewöhnlich wegbleiben, und wie bey den Decimalbrüchen ſchon verſtanden werden.

1 Minute $= \frac{1}{60} = \frac{1}{60^1} = 1. \times 60^{-1} = 1^{-1}$.

1 Sekunde $= \frac{1}{60.60} = \frac{1}{60^2} = 1 \times 60^{-2} = 1^{-2}$.

1 Terze $= \frac{1}{60.60.60} = \frac{1}{60^3} = 1 \times 60^{-3} = 1^{-2}$.

1 Stunde $\frac{60}{60} = 1 \times 60^0 = 1^0$.

1 Schock, d. i. 60 Stunden $= 60^1 = 1^{+1} = 1^1$.

Folgende Reihe wird alſo geleſen:

$$28^1,\ 7^0,\ 54^{-1},\ 29^{-2},\ 35^{-3}.$$

Acht und zwanzig Schocke von Stunden (oder Graden), 7 Stunden (oder Grade), 54 Minuten, 29 Sekunden, 35 Terzen.

* Zu einziſſerigen Zahlen pflegt man vornehin eine Nulle zu ſetzen, damit durchaus zweyziſſerige Zahlen erſcheinen.

Z. B. $\overset{0}{38}$, $\overset{-1}{07}$, $\overset{-2}{39}$, $\overset{-3}{08}$. $\overset{-4}{07}$ ....
38 Stunden, 7 Min. 39 Sek. 8 Terzen, 7 Quarten.

** Der allgemeine Ausdruck eines Sexageſimalbruches iſt $\frac{a}{\xi^m} = a \times \overset{-m}{\xi}$, wo $\xi = 60$.

$a\overset{1}{\xi}$,	$a\overset{0}{\xi}$,	$a\overset{-1}{\xi}$,	$a\overset{-2}{\xi}$,	$a\overset{-3}{\xi}$,	$a\overset{-4}{\xi}$
Schocke v. Stunden o. Graden	einfache Stunden o. Grade.	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten

§. 139.

Aufgabe. Einen Sexageſimalbruch höherer Ordnung in Theile oder Einheiten der nächſt niedrigern z. B. Stunden in Minuten, dieſe in Sekunden u. ſ. w. zu reſolviren.

Auflöſung. Man multiplicire die höhere Ordnung mit 60; das Product giebt Theile der nächſt niedrigern; und dieſe wird auf gleiche Art in Theile der niedrigſten Ordnung reſolvirt... Sollte das zu reſolvirende Ganze ſelbſt ſchon aus mehrern Unterabtheilungen beſtehen, ſo muß man zu den Partialproducten die ſchon gegebenen gleichartigen Theile oder Einheiten addiren; und dann erſt die Summe reſolviren. Z. B. Wenn man 6° (6 Stunden) in die enthaltenen Minuten, Sekunden, Terzen auflöſen ſollte, würde man ſo zu verfahren haben.

6° × 60 = 360 Minuten
360 Min. × 60 = 21600 Sekunden
21600 Sek. × 60 = 1296000 Terzen.

Beweis. $\overset{0}{6} \times \frac{60}{60} = \frac{360}{60^1} = 360 \times \overset{-1}{60} = \overset{-1}{360}$ (§. 139)

$\frac{360}{60} \times \frac{60}{60} = \frac{21600}{60^2} = 21600 \times \overset{-2}{60} = 21.\overset{-2}{600}$ u. ſ. w.

Hätte

Hätte man aber die Reihe

$\overset{0}{5}, \overset{-1}{16}, \overset{-2}{09}, \overset{-3}{28}$ in Terzen zu reſolviren, ſo würde die Operation alſo ausſehen:

$$\begin{array}{r} 5 \text{ Stund.} \\ 60 \\ \hline 300 \text{ Minut.} \\ +16 \\ \hline 316 \text{ Minut.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 316 \text{ Min.} \\ 60 \\ \hline 18960 \\ +9 \\ \hline 18969 \text{ Sek.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18969 \text{ Sek.} \\ 60 \\ \hline 1138140 \\ +28 \\ \hline 1138168 \text{ Terz.} \end{array}$$

§. 140.

Aufgabe. Einen Sexageſimalbruch niedrigerer Ordnung auf die enthaltenen Einheiten einer höhern zu reduciren, oder die Ganzen herauszuziehen.

Auflöſung. Man dividire den Sexageſimalbruch der niedrigſten Ordnung, (wobey vorausgeſezt wird, daß er wirklich Ganze enthalte), durch die Zahl 60. Der Quotient zeigt Theile der nächſt höhern, der Reſt Theile der niedrigſten Ordnung an. — Jene aber werden durch ein gleiches Verfahren auf die enthaltenen Einheiten höherer Ordnungen zurücke geführt.

Z. B. Man reducire 12'000.000 Terzen auf die enthaltenen Sekunden, Minuten, Stunden...

Auflöſung. $\frac{12'000.000}{60}$ Terz. = 200.000 Sek.

$$\frac{20000\not{0}}{6\not{0}} \text{ Sek.} = 3333 \text{ Minut. } 20 \text{ Sek.}$$

$$\frac{3333}{60} \text{ Minut.} = 55 \text{ Stund. } 33 \text{ Minut.}$$

Alſo

12'000.000 Terz. = $\overset{0}{55}, \overset{-1}{33}, \overset{-2}{20}, \overset{-3}{00}$ ——.

Der Beweis hierüber wird am füglichſten durch die Reſolvirung (§. praec.) gemacht.

$$\begin{array}{r} 55 \text{ St.} \\ 60 \\ \hline 3300 \\ +33 \\ \hline 3333 \text{ Minut.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3333 \text{ Minut.} \\ 60 \\ \hline 199980 \\ +20 \\ \hline 200.000 \text{ Sek.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200.000 \text{ Sek.} \\ 60 \\ \hline 12'000.000 \text{ Terzen.} \end{array}$$

B. Stammrechnungsarten mit Sexageſimalen.

I. Addition.

§. 141.

Regeln der Addition.

I. Man ſetze Gleichartiges unter Gleichartiges, und beginne die Addition zur rechten Hand, bey der niedrigſten Ordnung.

II. So oft die Partialſummen 60, d. i. eine Einheit der nächſthöhern Ordnung enthalten, wird dieſe zur nächſt höhern Ordnung hinüber geworfen; der Reſt aber als Summe angeſchrieben.

Beyſpiel.	25^{0}.	33^{-1},	44^{-2},	07^{-3}
	45^{0},	28^{-1},	39^{-2},	54^{-3}
	17^{0},	09^{-1},	22^{-2},	28^{-3}
	22^{0}.	54^{-1}.	48^{-2},	56^{-3}
1^{+1}.	51^{0}.	6^{-1}.	35^{-2}.	25^{-3}

Erklärung. Die Summe der Terzen $= 145^{-3} = \frac{145}{60}^{-2} = 2^{-2} + 25^{-3}$.

— — der Sek. $= 2^{-2} + 153^{-2} = \frac{155}{60}^{-1} = 2^{-1} + 35^{-2}$.

— — der Min. $= 2^{-1} + 124^{-1} = \frac{126^{0}}{60} = 2^{0} + 6^{-1}$.

— — der Stunden $= 2^{0} + 109^{0} = \frac{111}{60}^{+1} = 1^{+1} + 51^{0}$.

Alſo iſt die Totalſumme: 1 Schock Stunden, 51 St. oder 111 Stunden, 6 Min. 35 Sek. 25 Terzen.

II. Subtraction.

§. 142.

Regeln der Subtraction.

I. Man ſetze Gleichartiges unter Gleichartiges, und beginne die Subtraction bey der niedrigſten Ordnung.

II. Läßt ſich bey einer Ordnung die Subtraction nicht verrichten, ſo borge man bey der nächſt höhern Ordnung eine Einheit, löſe ſie in (60) Theile der nächſt niedrigern Ordnung auf, und addire ſie zum Minuend. — Manchmal fehlen im Minuende die niedrigern Ordnungen ganz;

ganz; in dieſem Falle borgt man eine Einheit der höchſten Ordnung, und repartirt dieſelbe ſo unter die fehlenden Sorten, daß man überall abziehen kann.

Beyſpiele I.

$$\begin{array}{lrrrr} & 24^{0}, & 16^{-1}, & 39^{-2}, & 54^{-3} \\ - & 19^{0}, & 38^{-1}, & 50^{-2}, & 42^{-3} \\ \hline \text{Reſt.} & 4^{0} & 37^{-1}, & 49^{-2}, & 12^{-3} \\ \text{Probe.} & 24^{0}, & 16^{-1}, & 39^{-2}, & 54^{-3} \end{array}$$

II. Eine Finſterniß begann um 10 Uhr, 56 Minuten, 48 Sekunden, 17 Terzen Morgens, und endete um 3 Uhr Nachmittag. Wie lange hatte ſie gedauert?

Auflöſung. Die 3te Stunde Nachmittag iſt von Mitternacht an die 15te.

$$\begin{array}{lrrrr} & 15^{0}. & (59)^{-1} & (59)^{-2} & (60)^{-3} \\ -(& 10^{0} & 56^{-1} & 48^{-2} & 17^{-3} \\ \hline & 4^{0} & 3^{-1} & 11^{-2} & 43^{-3}. \end{array}$$

Alſo war die ganze Dauer: 4 Stunden, 3 Minuten, 11 Sekunden, 43 Terzen.

III. Multiplikation.

§. 143.

Regeln der Multiplikation.

I. Hat man Sexageſimalen durch eine ſtumme Zahl zu multipliciren, ſo fängt man die Rechnung bey der niedrigſten Ordnung an, und rückt dann mit dem Multiplikator zu allen übrigen Ordnungen vorwärts. Enthält das Product einer niedrigen Ordnung ſchon Einheiten der nächſt höhern, ſo werden dieſe durch Reduction herausgefunden, und zum Producte der nächſten Ordnung hinübergezählt; der Reſt aber unter die niedrigere Ordnung geſchrieben. Bey der höchſten und lezten Ordnung hat eine ſolche Reduction nicht mehr Statt.

Z. B. Von einem Mondesviertel bis zum andern verfließen 7 Tage, 9^{0}, 11^{-1}, 00^{-2}, 45^{-3}... Wie viele Tage, Stunden, Minuten ꝛc. beträgt eine ganze Lunation? — und wie viele 12 Lunationen, d. i. ein Mondenjahr?

Auflöſung. Eine Lunation hat 4 Viertel

$$
\begin{array}{lllll}
7\,\mathfrak{T}. & 9^{0} & 11^{-1} & 00^{-2} & 45^{-3} \\
4 & 4 & 4 & & 4 \\
\hline
29\,\mathfrak{T}. & 36^{0} & 44^{-1} & 3^{-2} & 180^{-3} \\
 & 24 \;\big|\; 1\,\mathfrak{T}. & & & 60 \;\big|\; 3^{-2} \\
 & 12^{0} & & & 180 \\
 & & & & 0
\end{array}
$$

Eine Lunation beträgt alſo 29 Tage, 12^{0}, 44^{-1}, 3^{-2}.

$$
\begin{array}{llll}
29\,\mathfrak{T}. & 12^{0}. & 44^{-1}, & 3^{-2} \\
 & & & 12 \\
\hline
354\,\mathfrak{T}. & 8^{0} & 48^{-1} & 36^{-2}.
\end{array}
$$

— ſo viel beträgt ein Mondenjahr.

II. Hat man Sexageſimalen durch eine ſtumme Zahl, welche Decimalen bey ſich führt, zu multipliciren, ſo reſolvirt man zuerſt im Multiplikande alles auf die niedrigſte Ordnung, multiplicirt dann, und reducirt das Product nach den gegebenen Regeln auf die enthaltenen höhern Ordnungen.

Z. B. $(5^{1},\ 7^{0},\ 11^{-1},\ 13^{-2},\ 09^{-3}) \times 3{,}75$.

Operation.

$$
\begin{array}{r}
5^{1} \\
60 \\
\hline
307^{0} \\
60 \\
\hline
18431^{-1} \\
60 \\
\hline
1105873^{-2} \\
60 \\
\hline
66352389^{-3} \\
3{,}75 \\
\hline
331761945 \\
464466723 \\
199057167 \\
\hline
248821458{,}75^{-3}
\end{array}
$$

$248821458{,}75^{-3}$ — das Product in Terzen

$\frac{248821458{,}75^{-3}}{60} = 4147024{,}3125^{-2}$ in Sec.

$\frac{4147024{,}3125^{-2}}{60} = 69117{,}071875^{-1}$ in Minut.

$\frac{69117{,}071875}{60} = 1151{,}9511979166^{0}$ in Stunden.

$\frac{1151{,}9511979166}{60} = 19{,}19918663$ — in Schocken v. Stunden.

Oder auch: 19^{+1}, 11^{0}, 57^{-1}, 04^{-2}, $18{,}75^{-3}$.

III. Hat

III. Hat man Sexageſimalen durch Sexageſimalen zu multipliciren, ſo betrachtet man ſie als Buchſtabengrößen mit Exponenten, und verfährt ganz, wie bey der Multiplikation allgemeiner complexer Größen.. Allenfalls nothwendige Reductionen niedrigerer Ordnungen werden wie bey Regel I. vorgenommen.

Beyſpiel

$$(\overset{0}{13},\ \overset{-1}{05},\ \overset{-2}{16},\ \overset{-3}{48}) \times (\overset{0}{5},\ \overset{-1}{06},\ \overset{-2}{09},\ \overset{-3}{11}).$$

Operation

$$\begin{array}{l}
\overset{0}{13},\ \overset{-1}{05},\ \overset{-2}{16},\ \overset{-3}{48} \\
\overset{0}{5},\ \overset{-1}{06},\ \overset{-2}{09},\ \overset{-3}{11} \\
\hline
\overset{0}{65} + \overset{-1}{25} + \overset{-2}{80} + \overset{-3}{240} \\
\qquad \overset{-1}{78} + \overset{-2}{30} + \overset{-3}{96} + \overset{-4}{288} \\
\qquad\quad + \overset{-2}{117} + \overset{-3}{45} + \overset{-4}{144} + \overset{-5}{432} \\
\qquad\qquad + \overset{-3}{143} + \overset{-4}{55} + \overset{-5}{176} + \overset{-6}{528} \\
\hline
\overset{0}{65} + \overset{-1}{103} + \overset{-2}{227} + \overset{-3}{524} + \overset{-4}{487} + \overset{-5}{608} + \overset{-6}{528} \\
= \overset{0}{66} + \overset{-1}{46} + \overset{-2}{55} + \overset{-3}{52} + \overset{-4}{17} + \overset{-5}{16} + \overset{-6}{48}.
\end{array}$$

Anmerkung. Zu dem nemlichen Reſultat kann man mit mehr Zeitaufwand auch gelangen, wenn man in den beyden Factoren alles auf die kleinſte Ordnung reſolvirt, und ganz wie mit gemeinen Brüchen verfährt.

Das Multiplicand $= 2827.008^{-3}$.
Der Multiplicator $= 1102.151^{-3}$.

$$(\overset{-3}{2827008}) \times (\overset{-3}{1102151}) =$$
$$\overset{-6}{3115789694208} = \overset{5}{51929828236} + \overset{-6}{48}.$$
$$51929828236^{-5} = 865497137^{-4} + 16^{-5}$$
$$865497137^{-4} = 14424952^{-3} + 17^{-4}.$$
$$14424952^{-3} = 240.415^{-2} + 52^{-3}.$$
$$240415^{-2} = 4006^{-1} + 55^{-2}.$$
$$4006^{-1} = 66^{0} + 46^{-1}.$$

Totalproduct: $\overset{0}{66},\ \overset{-1}{46},\ \overset{-2}{55},\ \overset{-3}{52},\ \overset{-4}{17},\ \overset{-5}{16},\ \overset{-6}{48}.$

** Kürze halber wurden die Nenner $(60^{3}).(60^{3}) = 60^{6}$ ganz weggelaſſen.

IV. Di=

IV. Diviſion.

§. 144.

Regeln der Diviſion.

I. Iſt der Diviſor eine ſtumme ganze Zahl, ſo dividirt man von der Linken zur Rechten, zuerſt die höchſte Ordnung, dann die ſtuffenweis niedrigern, und zählt den jedesmaligen Reſt, in gleichartigen Theilen ausgedrückt, zur nächſt niedrigern Ordnung.

Z. B. $(\overset{0}{28}, \quad \overset{-1}{57}, \quad \overset{-2}{33}, \quad \overset{-3}{58}) : (12)$.

Operation

28^{0}	297^{-1}	573^{-2}	598^{-3}	$\overset{0}{2}, \overset{-1}{24}, \overset{-2}{47}, \overset{-3}{49}, \overset{-4}{50}$
12	12	12	12	
24^{0}	24	48	48	
4^{0}	57	93	118	
60	12	12	12	
240^{-1}	48	84	108	
+57	9	9	$\frac{10}{12} = \overset{-3}{\frac{5}{6}} = \overset{-4}{50}$.	
297^{-1}	60	60		
	540	540		
	+33	58		
	573	598		

II. Führt die ſtumme Zahl oder der Diviſor auch noch Decimalen bey ſich, ſo mache man in allen Ordnungen des Dividends die Decimalen gleich, und verfahre übrigens nach der erſten Regel.

Z. B. $(\overset{0}{80}. \quad \overset{-1}{12}. \quad \overset{-2}{04}. \quad \overset{-3}{52}. \quad \overset{-4}{51,75}) : (6,05)$.

Operation (Quotus. $\overset{0}{13}. \quad \overset{-1}{15}. \quad \overset{-2}{23}, \quad \overset{-3}{7}, \quad \overset{-4}{15}$ *

$80,00.^{0}$	$12,00^{-1}$	$4,00^{-2}$	$52,00^{-3}$	5175^{-4}
605				
1950	9.300	13.900	40600	9075
605	605	605	605	605
1815	3250	121'0	3630	3025
135	605	18'00	4300	605
60	3025	605	605	3025
8100	225	1210	4235	0
1200	60	590	65	
9.300	13500	6 0	60	
	400	35400	3900	
	13.900	+5200	5175	
		40.600	90.75	

* Eigentlich erſcheint 13^{0}, 15^{-1}, 22^{-2}, 67^{-3}, 15^{-4} An.

Anmerkung. Der Grund dieſes Verfahrens iſt aus der Lehre von den Decimalbrüchen herzuholen; denn

$$\left(\frac{\overset{0}{80}\,.\,\overset{-1}{12}\,.\,\overset{-2}{04}\ldots}{6{,}25}\right) = \left(\frac{\overset{0}{80}\,.\,\overset{-1}{12}\,.\,\overset{-2}{04}}{6{,}25}\right)\times\frac{100}{100} = \frac{\overset{0}{8000}\ldots}{625}$$

(vergl. §. 139. Beweis).

III. Hat man Sexageſimalen durch Sexageſimalen zu dividiren, ſo verfährt man entweder wie bey der Diviſion complexer Buchſtabengrößen; oder man bringt im Diviſor und Dividend alles auf die niedrigſte Ordnung, und beobachtet die Regel: die Exponenten werden bey der Diviſion abgezogen, oder, was eines iſt, die Exponenten des Diviſors werden nach veränderten Zeichen addirt.

Beyſpiele a) $(\overset{0}{18},\ \overset{-1}{36},\ \overset{-2}{49}) : \overset{-1}{15}$.

Auflöſung 18^{0} Quotus $(\overset{+1}{1},\ \overset{0}{14},\ \overset{-1}{27},\ \overset{-2}{16})$

$$\begin{array}{l}
18^{0} \\
15^{-1} \\
\underline{15^{0}} \\
3^{0}\times 60^{-1} = 180^{-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{+36} \\
\qquad\qquad\quad 216^{-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{15^{-1}} \\
\qquad\qquad\quad\ \ 66^{-1} \\
\qquad\qquad\quad\ \ 15^{-1} \\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{60^{-1}} \\
\qquad\qquad\quad\ \ 6^{-1}\times 60^{-1} = 360^{-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+49} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 409^{-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 15^{-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 109 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 15 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{105} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4\times 60 = 240^{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15^{-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{240} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Probe durch die Multiplikation

$$\begin{array}{l}
\overset{+1}{1},\quad \overset{0}{14},\quad \overset{-1}{27},\quad \overset{-2}{16} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\overset{-1}{15}} \\
\overset{0}{18},\quad \overset{-1}{36},\quad \overset{-2}{49},\ \ldots\ 0.
\end{array}$$

Anmerkung. Dieſe Diviſion hätte ſich auch auf folgende Weiſe machen laſſen:

Dividen-

Dividendum $= \frac{40205 + 0^{-3}}{15^{-1}} = 268036^{-2} =$

$4467^{-1} + 16^{-2} = 74^{0} + 27^{-1} + 16^{-2} = 1^{+1} + 14^{0} + 27^{-1} + 16^{-2}$.

b) $(183^{0}.\ 8^{-1}.\ 55^{-2}.\ 10^{-3}.\ 48^{-4}) : (16^{0}.\ 25^{-1}.\ 33^{-2}.\ 12^{-3})$.

Auflöſung. Quotus $(11^{0}.\ 9^{-1})$

	183^{0}.	8^{-1}.	55^{-2}.	10^{-3}.	48
	16^{0}	25^{-1}	33^{-2}	12^{-3}	
*	180	41^{-1}	5^{-2}	12^{-3}	
		147^{-1}.	49^{-2}	58^{-3}.	48^{-4}
		16^{0}	25^{-1}	33^{-2}	12^{-3}
**		147^{-1}	49^{-2}	58^{-3}	48^{-4}

* Iſt entſtanden aus: $176^{0}.\ 275^{-1}.\ 363^{-2}.\ 132^{-3}$.

** aus: $144^{-1}.\ 225^{-2}.\ 297^{-3}.\ 108^{-4}$. durch Reduction.

Anmerkung. Mit Reſolvirung kann das Beyſpiel alſo aufgelöſet werden:

$$\frac{\text{Dividendum}}{\text{Divisor.}} = \frac{2.373'606.648^{-4}}{3'547.992^{-3}} = 669^{-1}$$

$$669^{-1} = 11^{0} + 9^{-1}.$$

q. e. pr.

c) Noch ein Beyſpiel aus Käſtners Mathemat. Lehrb. I. Th. nebſt Erklärung.

(Diviſor $59^{-1}.\ 08^{-2}.\ 19^{-3}.\ 37^{-4}.\ 24^{-5}.\ 25^{-6}.\ 41^{-7}.\ 39^{-8}$.) (Quotus 30)

Dividend. $(29^{0}.\ 34^{-1}.\ 09^{-2}.\ 48^{-3}.\ 42^{-4}.\ 12^{-5}.\ 50^{-6}.\ 49^{-7}.\ 30^{-8})$

(1774^{-1})

	59^{-1}.	08^{-2}.	19^{-3}.	37^{-4}.	24^{-5}.	25^{-6}.	41^{-7}.	39^{-8}.	
	1770^{-1}	240^{-2}	570^{-3}	1110^{-4}	720^{-5}	750^{-6}	1230^{-7}	1170^{-8}	*
** 29^{0}	34^{-1}	9^{-2}	48^{-3}	42^{-4}	12^{-5}	50^{-6}	49^{-7}	30^{-8}	

*) Dieſe Reihe enthält das Dreyßigfache des Diviſors $59^{-1}\ 08^{-2}$ .....; wird ſie durch Reduktion auf die höhern Ordnungen gebracht, ſo entſteht die zweyte.

** Aus dieſer Reduktion ergeben ſich dann folgende Quotuſſe: $29^{0}.\ 4^{-1}.\ 9^{-2}.\ 18^{-3}.\ 12^{-4}.\ 12^{-5}.\ 20^{-6}.\ 19^{-7}$. und folgende Reſte: $30^{-1}.\ 00^{-2}.\ 30^{-3}.\ 30^{-4}.\ 00^{-5}.\ 30^{-6}.\ 30^{-7}.\ 30^{-8}$.

IV. Ein

IV. Ein vierter Fall — ſtumme Zahlen, mit oder ohne Decimalen — durch Sexageſimalen zu dividiren, iſt nur unter der Bedingniß gedenk- und auflösbar, daß man das Dividend als eine Nullwürde von 60 anſieht, übrigens die Decimalſtellen, wie bey Regel II gleichmacht.

Beyſpiel $(6{,}023) : (\overset{0}{5} . \overset{-1}{17})$

Auflöſung. $\frac{6{,}023}{5^{0}.17^{-1}} = \frac{6{,}023^{0}}{317^{-1}}$

$$\begin{array}{l} 6{,}023^{0} \\ \underline{317^{-1}} \;\big|\; 19^{+1} = 0{,}019^{+1} \\ 2853 \\ \;\;317 \\ \underline{2853} \\ \;\;\;0 \end{array}$$

Beweis. $0{,}019^{+1} \times 317^{-1} = 6{,}023^{0}$
$= 6{,}023.$

Auf das nemliche Reſultat kommt man, wenn die Decimalſtellen beyderſeits gleichgemacht werden:

$$\frac{6{,}023}{5^{0}.17^{-1}} = \frac{6{,}023^{0}}{317000^{-1}} = \frac{19^{+1}}{1000} = 0{,}019^{+1}$$

Oder wenn man die Nenner der Fractionen ſichtbar macht.

$$\frac{\not{6}\not{0}\not{2}\not{3}}{1000} \times \frac{60}{\not{3}\not{1}\not{7}} = \frac{19}{1000} \cdot 60 = 0{,}019 \times 60^{+1} = 0{,}019^{+1}.$$

Viertes Hauptſtück.

Lehre von der Verbindung der Größen

oder:

Von den Permutationen und Kombinationen.

Da die Lehre von den Permutationen in der Würdenlehre ihre Anwendung findet, ſo müſſen ſie hier, nebſt den mit ihnen zuſammenhängenden Kombinationen, ganz kurz behandelt werden.

Erſter

Erſter Artikel.

Von den Permutationen.

§. 145.

Permutation nennt man eine ſolche Verſetzung mehrerer Dinge, (die wir durch Buchſtaben ausdrücken wollen), unter einander, daß ſie immer in einer andern Ordnung auf einander folgen.

Satz. Die Permutationen einer Anzahl gegebener Dinge (oder Elemente) findet man, wenn man ſo viele in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen, von 1 angefangen, mit einander multiplicirt, als Dinge gegeben ſind.— Der Beweis wird ſo geführt:

1°. Ein Ding z. B. a läßt ſich 1mal permutiren.

2°. Zwey Dinge, z. B. a, b laſſen ſich zweymal ab, ba .. alſo 1.2. mal ....

3°. Drey Dinge a, b, c laſſen ſich ſechsmal

abc, bac, cab }
acb, bca, cba } alſo 1. 2. 3mal ....

4°. Vier Dinge a, b, c, d laſſen ſich 1. 2. 3. 4mal, d. i. vier und zwanzigmal verſetzen. Denn da jedes Ding wieder den erſten Platz einnehmen kann (abcd, bcda, cdab, dabc); und überdieß die lezten drey Buchſtaben jedesmal ſechs Veränderungen zulaſſen, ſo ergeben ſich 4×6 = 24 Veränderungen

abcd	bcda	cdab	dabc
acdb	bdac	cabd	dbca
adbc	bacd	cbda	dcab
abdc	bcad	cdba	dacb
acbd	bdca	cadb	dbac
adcb.	badc.	cbad.	dcba.

5°. Um alſo die Permutationen von 5 Dingen zu erhalten, darf ich nur die Permutationen von 4 Dingen noch mit 5 multipliciren. . —

6°. Folglich um die Permutationen von n Dingen zu erfahren, muß ich die Permutationen von (n — 1) Dingen

gen noch durch n multipliciren; läßt man nun der Ordnung nach n … 5, 6, 7, 8, 9, 10 … gelten, ſo ergiebt ſich folgendes:

5 Dinge leiden	1. 2. 3. 4. 5	=	120	Permutationen.
6 Dinge —	1. 2. 3. 4. 5. 6.	=	720	
7 Dinge —	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.	=	5040	
8 Dinge —	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8	=	40.320	
9 Dinge …..	40.320 × 9	=	362880	
10 Dinge …..	362880 × 10	=	3628800	
n Dinge …..	1. 2. 3. ….. n - 1 . n			

Die 24 Buchſtaben des Alphabets laſſen ſich alſo
1. 2. 3. 4. ……………… 21. 22. 23. 24 mal
= 620.448401.733239.439'360.000 mal verſetzen.

§. 146.

Sind aber einige der zu verſetzenden Dinge einerley, ſo vermindert ſich die Anzahl der Permutationen
bey zwey gleichen Dingen um das Doppelte (1.2fache)
bey drey ……….. um das Sechsfache (1.2.3fache)
bey vier ……….. um das 24fache (1. 2. 3. 4 fache)
wie man leicht aus dem vorhergehenden § abnehmen kann. Alſo geben 4 gleiche Buchſtaben z. B. aaaa nur eine $\left(\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}\right)$ Verſetzung, da ſie als verſchieden, 24 würden gegeben haben.

Im Falle alſo ein oder mehrere Dinge öfter vorkommen, ſo findet man die Anzahl der möglichen Permutationen, wenn man die Summe der Permutationen, welche die Dinge alle geben würden, wenn ſie verſchieden wären, durch das Product aus den Permutationen dividirt, welche die einzelnen gleichen Dinge leiden würden, wenn ſie ebenfalls verſchieden wären.

Beyſpiele I. In dem Worte amamus laſſen ſich die ſechs Buchſtaben $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2} = 180$ mal verſetzen.

II. In a^4b^3, oder aaaabbb. $\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.1.2.3} = 35$ mal.

III. In $a^3b^4c^2$ …. $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.4.1.2} = 1260$ mal.

An-

Anmerkung. So verhält es ſich auch, wenn zwey oder mehrere Dinge ihre beſtimmte Stelle behalten ſollen. In dieſem Falle vermindert ſich die Anzahl der Permutationen um das vielfache, um das die unveränderlichen Buchſtaben die Permutabilität der veränderlichen würde vermehret haben; d. h. man betrachtet die unveränderlichen Buchſtaben als gar nicht gegeben.

Z. B. 1°) in a, β, γ ſey a unveränderlich, d. i. bleibe immer auf dem erſten Platze. — Es werden alſo die Permutationen ſeyn $\frac{1.2.3}{3} = 2$. Nemlich $a\beta\gamma$, $a\gamma\beta$. — Wäre nemlich a veränderlich geweſen, ſo würde es die Permutationen von β und γ um das Dreyfache vermehrt haben.

2°) In a, b, β, γ, δ ſey ab unveränderlich; folglich ſind die möglichen Permutationen: $\frac{1.2.3.4.5}{4.5.}$ oder $1.2.3. = 6$.

3°) Sind nun von den veränderlichen Buchſtaben einige gleich, ſo tritt wieder die in dieſem § gegebene Regel ein, z. B. Wie oft laſſen ſich die Buchſtaben: a b c β, γ, δ; λ, λ, λ verſetzen, wenn a, b, c ihren Platz behaupten ſollen?..

Auflöſung. $\frac{1.\not{2}.3.4.5.\not{6}.7.\not{8}.\not{9}.1\not{0}}{1.\not{2}.1.\not{2}.\not{3}.\quad \not{8}.\not{9}.1\not{0}} = 420$ mal.

Zweyter Artikel.

Von den Kombinationen.

§. 147.

Kombiniren heißt eine Anzahl gegebener Dinge ſo verſetzen, daß Verbindungen zu je zwey, je drey, je vier d. i. Amben, Ternen, Quaternen u. ſ. f. entſtehen.

Es iſt aber die Kombination zweyfach:

I. Kombination im weitern Sinne, worin Wiederholungen des nemlichen Dinges, und zugleich Verſetzungen der Dinge Statt haben.

II. Kom.

II. Kombination im engern Sinne, wenn man nur ſolche Amben, Ternen, Quaternen gelten läßt, worin die Dinge verſchieden ſind.

§. 148.

A. Kombination im weitern Sinne.

I) Kombinationen nach Zweyen.

1. Ein Ding z. B. a giebt eine Verbindung nach zweyen aa oder 1^2 Ambo.

2. Zwey Dinge z. B. a, b geben vier Verbindungen nach Zweyen

aa, bb
ab, ba — — alſo $2^2 = 4$ Amben.

3. Drey Dinge geben neun Verbindungen nach Zweyen:

aa, bb, cc
ab bc ac — alſo $3^2 = 9$ Amben.
ba. cb ca.

Mithin geben N Dinge N^2 Verbindungen nach Zweyen.

II. Kombination nach Dreyen.

1. Ein Ding, a, giebt eine Verbindung nach Dreyen. aaa. — 1^3 Terno.

2. Zwey Dinge a, b geben 8 Verbindungen nach Dreyen.

aaa. aab. aba. baa
bbb. bba bab. abb. — alſo 2^3 Ternen.

3. Drey Dinge geben 27 Verbindungen nach Dreyen:

aaa.	bbb.	ccc	cca,	cac,	acc
aab,	aba,	baa	ccb,	cbc,	bcc
aac,	aca,	caa	abc,	bca,	cba
bba,	bab,	abb	acb,	bac,	cab
bbc,	bcb,	cbb	alſo 3^3 Verb. nach Dreyen.		

4. Folglich geben N Dinge N^3 Verbindungen nach Dreyen.

5. Allgemein geben N Dinge N^m Verbindungen nach m.

* Mit drey Würfeln, derer jeder ſechs Puncte oder Augen hat, ſind demnach $6^3 = 216$ verſchiedene Würfe möglich.

** Da

** Da die 9 Blätter der teutſchen Karte viermal, nemlich in jeder der vier Farben, vorkommen; ſo leiden ſie $9^4 = 6561$ verſchiedene Verbindungen nach Vieren. —

§. 149.

B. Kombination im engern Sinne.

I. Verbindung nach Zweyen.

1. Ein Ding giebt kein Ambo. $\frac{1.(1-1)}{1.2} = 0$. Ambo.

2. Zwey Dinge gäben für ſich $2^2 = 4$ Ambo. . aa, ab bb, ba. Da aber die Verdopplung des nemlichen Dinges hinwegfällt, ſo bleibt noch: 2. 1. Amben. — Da ferner in dieſen beyden Amben die nemlichen Buchſtaben vorkommen, ſo bleibt nur noch: $\frac{2.1}{1.2} = 1$ Ambo.

3. Drey Dinge geben für ſich $3.3 = 9$ Amben. Da aber hievon die Glieder aa, bb, cc wegfallen, ſo bleiben noch 3.2. Da aber auch von dieſen ſechs Amben je zwey die nemlichen Buchſtaben enthalten, ſo bleiben nur $\frac{3.2}{1.2} = 3$ Amben, d. i. jeder Buchſtab macht mit dem andern einen Ambo.

4. Aus dem nemlichen Grunde geben 4 Dinge: $\frac{4.3}{1.2} = 6$.

5 Dinge: $\frac{5.4}{1.2} = 10$

6 Dinge: $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Amben.

II. Verbindung nach Dreyen.

1. Ein Ding giebt keinen Terno . . . $\frac{1.(1-1)\,(1-2)}{1.\;2.\;\;3} = 0$.

2. Zwey Dinge geben ebenfalls: $\frac{2.1.0}{1\;2.3} = 0$ Terno.

3. Drey Dinge machen $\frac{3.2.1}{1.2.3} = 1$ Terno. abc.

4. Vier Dinge: $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ Terno. abc, bcd, acd, abd.

5. Fünf Dinge $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Terno.

abc , acd , ade
bcd , bde , cde
abd , abe , ace , bce.

Hieraus hat man ſich dann folgende allgemeine Regeln abgezogen: M Dinge geben nach der Kombination im engern Sinne:

a) Am-

a) Amben. $\frac{M.(M-1)}{1.2.}$

b) Ternen. $\frac{M.(M-1)(M-2).}{1.2.3}$

c) Quaternen. $\frac{M.(M-1)(M-2)(M-3).}{1.2.3.4}$

d) Quinternen. $\frac{M.(M-1)(M-2)(M-3(M-4).}{1.2.3.4.5}$

* Da die gewöhnliche Zahlenlotterie 90 Ziffer hat, ſo ſind darin möglich:

1. 90 Extracte.

2. . . . $\frac{90.89}{1.2} = 4005$ Amben.

3. . . . $\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117.480$ Ternen.

4. . . . $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2'555.190$ Quaternen.

5. . . . $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43'949.268$ Quinternen.

** Bey einem Quadrillſpiel mit 32 Kartenblättern ſind: $\frac{32.31.30.29.28.27.26.25}{1.2.3.4.5.6.7.8}$

$= 10'518300$ Veränderungen möglich.

Anmerkung. Aus den Geſetzen der Größenverbindung laſſen ſich über die erſtaunliche Mannigfaltigkeit und Abſtufungen der Producte in den drey Reichen der Natur, über die Wahr- oder Unwahrſcheinlichkeit des Gewinnes bey gewiſſen Spielen ꝛc. nützliche Reflexionen anſtellen.

Drit-

Zweyter Abſchnitt.

Von den Würden oder Potenzen.

§. 150.

Als Einleitung in die eigentliche Würdenlehre muß die Lehre von dem Quadrate und Kubike vorausgeſchickt werden. Die Ordnung, in welcher die Gegenſtände dieſes Abſchnittes behandelt werden, iſt folgende:

Erſtes Hauptſtück. Lehre vom Quadrate und Kubike.
Zweytes Hauptſtück. Eigentliche Würdenlehre
I. Monomiſcher —
II. Binomiſcher —
III. Polynomiſcher Größen. —

Erſtes Hauptſtück.

Lehre vom Quadrate und Kubike ſowohl der Zahlen als der Buchſtabengrößen.

Erſter Artikel.

Vom Quadrate.

§. 151.

Wenn man eine Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo heißt das Product das Quadrat dieſer Zahl, welche die Quadratwurzel genennt wird.. z. B. $3 \times 3 = 9$. Hier iſt 9 das Quadrat von 3; der einfache Factor 3 aber die Wurzel von 9.— Die Benennung Quadrat iſt aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrates, d. i. eines gleichſeitigen und rechtwinklichten Vierecks gefunden wird, wenn man eine Seite deſſelben mit ſich ſelbſt multiplicirt, z. B. ⋮⋮⋮ $3 \times 3 = 9$.

Die Quadratzahlen der neun Zahlziffer ſind folgende:

Wurzeln.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrate.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

* Zieht

* Zieht man nun in der Reihe dieſer Quadratzahlen die vorhergehende von der nächſtfolgenden ab, ſo ergeben ſich alle ungeraden Zahlen, welche immer um zwey ſteigen: 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19 u. ſ. w.

§. 152.

Man findet alſo das Quadrat was immer für einer Größe, wenn man die Wurzel, oder dieſe Größe ſelbſt als einfachen Factor mit ſich ſelbſt multiplicirt.

Z. B. $13 \times 13 = 169 = \square$ v. 13.

$a \times a = aa = a^2 = \square$ v. a.

Hieraus ergeben ſich nun die Folgeſätze:

I. Brüche werden zum Quadrate erhoben, wenn man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplicirt. Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuerſt in einen uneigentlichen Bruch.

Z. B. $(\frac{1}{2})_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$(\frac{3}{5})^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$

$(1\frac{5}{6})^2 = (\frac{11}{6})^2 = \frac{11 \times 11}{6.\ \ 6} = \frac{121}{36}.$

* Wenn die Wurzel einen Bruch enthält, muß auch das Quadrat einen enthalten; denn wenn Zähler und Nenner in der Wurzel Primzahlen untereinander oder abſolute ſind, ſo bleiben ſie auch im Quadrate Primzahlen unter ſich.

II. Erhebt man Decimalzahlen zum Quadrate, ſo müſſen die Decimalen im Quadrate jederzeit paarweiſe erſcheinen.

z. B. $(0{,}6)^2 = 0{,}36$

$(0{,}06)^2 = 0{,}0036$

$\left(\frac{a}{\partial^n}\right)^2 = \frac{a^2}{\partial^n \partial^n} = \frac{a^2}{\partial^{2n}}.$

III. Erhebt man Sexageſimalen zum Quadrate, ſo reſolvirt man am kürzeſten alles auf die niedrigſte Ordnung und multiplicirt die Wurzel mit ſich ſelbſt. Das Quadrat

muß dann zum Exponenten des Nenners in jedem Falle eine gerade Zahl erhalten.

Z. B. $(03^{\circ},\ \overset{-1}{06})^2 = \overset{-1}{186} \times \overset{-1}{186} = \frac{186}{60.} \times \frac{186}{60} =$

$\frac{34596}{60^2} = 34596^{-2}$

IV. Wenn die Wurzel aus mehreren Factoren beſteht, ſo muß auch das Quadrat — die Quadrate aller Factoren enthalten, und umgekehrt; wenn das Quadrat aus Factoren beſteht, derer jeder ein Quadrat iſt, ſo muß auch die Geſammtwurzel ein Product aus den einzelnen Wurzeln ſeyn.

* Um anzuzeigen, daß man die Quadratwurzel aus einem Quadrate ziehen ſoll, bedient man ſich des Zeichens $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt{}$.

Alſo: $(1 . 2 . 3 . 4)^2 = 1 . 4 . 9 . 16 = 576.$

oder $(24)^2 = 24.24 = 576.$

$(3 ab)^2 = 9 a^2 b^2.$

Folglich $\sqrt{4 x^2 y^2} = 2 xy.$

d. i. die Quadratwurzel aus $4 x^2 y^2$ iſt $2 xy$.

V. Jede Quadratzahl muß poſitiv ſeyn, ſie mag von einer poſitiven oder negativen Wurzel entſtehen; denn

$+a \times +a = +a^2$

$-a \times -a = +a^2.$

Es hat alſo jedes Quadrat eine doppelte Wurzel

d. i. $\sqrt{a^2} = \pm a.$

VI. Die Quadratwurzel aus einer Zahl z. B. A iſt alſo nichts anders als eine Größe z. B. ρ, welche mit ſich ſelbſt multiplicirt, die Zahl A wiedergiebt. Alſo wenn

$A = 25.$. ſo iſt $\rho = 5.$ Denn $5 \times 5 = 25.$

$A = \frac{49}{9} \ldots - \rho = \frac{7}{3}.$ Denn $\frac{7}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{49}{9}.$

VII. Soll man die Quadratwurzel aus einer Zahl ziehen, die kein wahres Quadrat iſt, ſo läßt ſich daraus die Wurzel niemals genau, ſondern nur durch Annäherung finden, hieraus entſtehen die ſurdiſchen oder Irrationalzahlen, welche durch die Wurzelzeichen vorgeſtellt werden:

Z. B. $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{b}, \sqrt{x}.$

Da

Da nun $\sqrt{b}$ wahrhaft die Wurzel von b, wiewohl einem unächten Quadrate iſt, ſo muß $(\sqrt{b})^2 = \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$ ſeyn. Oder was eines iſt: $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = \sqrt{b^2}$.

Anmerkung. Soll man die Quadratwurzel aus einem negativen Quadrate z. B. -49 ziehen, ſo erkennt man, daß die Wurzel davon weder $+7$, noch -7 ſey. Da dieſe Wurzel aber doch auch nicht $= 0$; alſo weder 0, zugleich weder weniger noch auch mehr als 0 iſt; ſo ergiebt ſich, daß man eine dritte Art von Zahlen annehmen müſſe, welche eingebildete (imaginäre) heißen, und die ſich unter der Form $\sqrt{-b^2}$ oder $\sqrt{-c}$ darſtellen laſſen.

Da nun $\sqrt{-36} = \sqrt{36 \times -1} = 6\sqrt{-1}$

So iſt auch $\sqrt{-b^2} = b.\sqrt{-1}$.

§. 153.

Um die Quadratwurzel aus einem reinen Quadrate zu ziehen, das nur zweyzifferig iſt, hat man nur die Producte der 9 Einheiten aus ſich ſelbſt zu wiſſen nothwendig.

Z. B. $\sqrt{81} = \pm 9$. $\sqrt{64} = \pm 8$. $\sqrt{36} = \pm 6$ u.ſ.w.

Für das Wurzelausziehen aus mehrziſſerigen Quadraten hat man eigne Regeln abſtrahirt, die auf folgenden Erfahrungs- oder auch Grundſätzen beruhen.

I. Wenn man eine Wurzel von n Zifferſtellen zum Quadrat erhebt, ſo kann dieſes nicht mehr als 2 n, und nicht weniger als 2 n — 1 Zifferſtellen erhalten.

Z. B. $1^2 = 1$. $19^2 = 361$. $109^2 = 11881$.

$9^2 = 81$. $91^2 = 8281$. $901^2 = 811801$.

Daß aber von dem Doppelten der Zifferſtellen der Wurzel im Quadrate 1 abgehe, hängt nur von dem erſten, oder höchſten Ziffer in der Wurzel ab, ob ſein Quadrat ein- oder zweyzifferig ſey.

II. Wenn man nun eine zweytheilige Wurzel (z. B. $48 = 40 + 8$) zum Quadrate erhebt, ſo enthält dieſes Quadrat

1) das Quadrat des erſten Theils,

2) das doppelte Product beyder Theile,

3) das Quadrat des zweyten Theils.

Es ſey $a = 40$
$b = 8$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 40 + 8 \\ 40 + 8 \\ \hline 1600 + 320 \\ \quad + 320 + 64 \\ \hline 1600 + 640 + 64 = 23|04 \end{array}$$

III. Nun ſteckt das Quadrat des erſten Theiles 4 offenbar in 23, ſo daß der lezte Ziffer von 16 unter die Hunderter Stelle des Quadrats zu ſtehen kommt. Das doppelte Product aus dem erſten und zweyten Theil hat ſeinen lezten Ziffer unter den Zehnern des Quadrates. Das Quadrat des lezten Theiles aber iſt in den Einſern und Zehnern zu ſuchen. Das Ganze wird noch augenſcheinlicher, wenn man anſtatt obiger Formel $(a+b)^2$ folgende ſubſtituirt, worin auch die Einſer und Zehner Stelle der Theile a und b ausgedrückt ſind.

Es ſey die Einſer Stelle $= 10^0$ | Die Hundert. Stelle $= 10^2$
— — — Zehner Stelle $= 10^1$ | Die Tauſend. Stelle $= 10$ u. ſ. w.

ſo wird:

$$\begin{array}{l} a.\ 10^1 + b.\ 10^0 \\ a.\ 10^1 + ab.\ 10^0 \\ \hline a^2.\ 10^2 + ab.\ 10^1 \\ \quad + ab.\ 10^1 + b^2\ 10^0 \\ \hline a^2.\ 10^2 + 2ab.\ 10^1 + b^2\ 10^0. \end{array}$$

§. 154.

Aufgabe. Aus einer Quadratzahl, die nicht über vier Ziffer hat, z. B. aus 1369 die Wurzel zu finden.

Auflöſung I. Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen von je zwey Ziffern; doch kann die lezte Klaſſe zur Linken auch aus einem Ziffer beſtehen.

II. Nun ziehe man der höchſten Klaſſe das ihr am nächſten kommende Quadrat eines der neun Zahlziffer ab, und ſchreibe die Wurzel davon beyſeite.

III. Setze zum allenfallſigen Reſte die nächſte Klaſſe herab, verdoppele die eben gefundene Wurzel, und dividire damit

damit ſo, daß der niedrigſte Ziffer der doppelten Wurzel unter den höchſten der neuen Klaſſe zu ſtehen kommt.

IV. Den neuen Quotienten ſchreibe man als zweyten Theil der Wurzel beyſeite, und zugleich in die leer gelaſſene Stelle des Diviſors, und multiplicire damit den ganzen Diviſor, und ziehe das Product vom Dividend ab. Iſt der Reſt = o, ſo iſt die Rechnung zu Ende und der verlangte Quotus gefunden.

Operation $\sqrt{13|69}$ (37

Operation	Beweis
*9	37
469	37
67**	259
469	111
0	13.69

* Nächſtes Quadrat.

** 6 iſt die doppelte erſte Wurzel; 7 wurde daran geſezt, weil man auch das Quadrat des zweyten Theiles 7 abziehen muß.

Anſtatt eines langwierigen Beweiſes über die Richtigkeit dieſes Verfahrens wollen wir die Quadratwurzel aus 7921 nach der Formel ziehen

$$a^2\,10^2 + 2ab.\,10^1 + b^2.\,10^0 = 79|21 \mid 80 = a.\,10^1$$
$$-a^2\,10^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = -6400 \quad 9 = b.\,10^0$$
$$2ab.\,10^1 + b^2.\,10^0 = 1521$$
$$2a.\,10^1 + b.\,10^0 = 160 + 9$$
$$\underline{2ab.\,10^1 + b^2\,10^0 = 1440 + 81 = 1521}$$
$$0.$$

§. 155.

Für dreyzifferige Wurzeln kann die Formel gelten:

$$a.\,10^2 + b.\,10^1 + c.\,10^0.$$

Erhebt man nun dieſe Reihe zum Quadrate, ſo hat man eine Norm, wie aus Quadraten von drey Klaſſen die Wurzel zu ziehen ſey.

a. 10²

$$\begin{array}{l} a.\,10^2 + b.\,10^1 + c.\,10^0 \\ a.\,10^2 + b.\,10^1 + c.\,10^0 \\ \hline a^2.10^4 + ab.10^3 + ac.10^2 \\ \quad + ab.10^3 + b^2\,10^2 + bc.\,10^1 \\ \quad\quad + ac.10^2 + bc\,10^1 + c^2\,10^0 \\ \hline a^2 10^4 + 2ab.10^3 + 2ac.10^2 + b^2 10^2 + 2bc.10^1 + c^2 10^0, = \\ a^2.10^4 + 2ab.10^3 + b^2 10^2 + 2(a.10^2 + b.10^1)\,c. + c^2 10^0. \end{array}$$

Aufgabe. Nach dieſer Formel die $\sqrt{}$ aus 247009 zu ziehen.

Auflöſung. Wurzel $= a.\,10^2 = 400$, $b.\,10^1 = 90$, $c.\,10^0 = 7$ } 497

$$\begin{array}{lr} a^2 10^4 + 2ab.10^3 + b^2\,10^2 + 2(a.10^2 + b.10^1)c + c^2\,10^0 & = 247.0|09 \\ -a^2\,10^4 & = 160.000 \\ \hline 2ab.10^3 + b^2\,10^2 + 2(a.10^2 + b.10^1)c + c^2\,10^0 & = 87.009 \\ 2\,a.\,10^2 & = 800 \\ \hline 2ab.10^3 & = 7200 \\ + b^2\,10^2 & = 8100 \\ \hline 2ab.10^3 + b^2\,10^2 & = 80100 \\ \hline 2(a.10^2 + b.10^1)\,c + c.^2 10^0 & = 6.909 \\ 2(a.10^2 + b.10^1) & = 980 \\ \hline 2(a.10^2 + b.10^1)c & = 6860 \\ + c^2\,10^0 & = 49 \\ \hline 2(a.10^2 + b.10^1)c^2 + c.10^0 & = 6.909 \\ \hline & 0 \end{array}$$

§. 156.

Aufgabe. Aus was immer für einer Zahl, die ein vollkommenes Quadrat iſt, und deren Wurzel aus mehr als zwey Ziffern beſteht, dieſe Wurzel zu finden.

Auflöſung I. Man theile die gegebene Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen von je zwey Ziffern, wie §. 149.

II. Nun ziehe man von der erſten Klaſſe zur Linken das größte Quadrat einer der neun einfachen Wurzeln ab,

das

das ſich ſubtrahiren läßt, und ſchreibe die Wurzel davon als erſten Theil der verlangten Wurzel (und als Quotienten) beyſeite.

III. Zum allenfallſigen Reſte der erſten Klaſſe ſetze man die folgende Klaſſe herab. Hierauf verdopple man die Wurzel, ſetze ihren niedrigſten Ziffer unter den höchſten der neuen Klaſſe, und dividire. Der Quotient iſt der zweyte Theil der Wurzel.

IV. Dieſen gefundenen neuen Theil der Wurzel ſchreibe man auch zu dem Diviſor, unter die lezte Zifferſtelle des Dividends, multiplicire den ſo vermehrten Diviſor durch den Quotienten, und ziehe das Product von den treffenden Zifferſtellen des Dividends ab.

V. Zum Reſte ſetze man die nächſte Klaſſe herab, betrachte die bishergefundene Wurzel als erſten Theil, und ſetze die Operation, wie bey Nro. III. und IV. ſo lange fort, bis alle Klaſſen herabgeſezt, und zulezt kein Reſt mehr übrig bleibt.

VI. So oft man auf die Nro. III. vorgeſchriebene Art mit dem Diviſor in das Dividend nicht dividiren kann, indem die treffenden Zifferſtellen des leztern weniger betragen, als die des erſtern, muß in der Wurzel als Quotus eine Nulle angeſchrieben, eine neue Klaſſe herabgeſezt, und ein neuer Diviſor geſucht werden.

VII. Sollte man das bey Nro. IV. ſich ergebende Product vom Dividend nicht abziehen können, ſo wäre dieſes ein Zeichen, daß man den Quotus zu hoch angeſezt habe; man muß ihn dann ſo lange vermindern, bis der Abzug angeht.

VIII. Für jede Klaſſe von zwey Nullen im Quadrate erhält die Wurzel eine einfache Nulle. — Ueberhaupt erhält die Wurzel ſo viele Zifferſtellen, als die Quadratzahl Klaſſen hat.

I. Auf-

I. Aufgabe. $\sqrt{1211736100}$.

```
Aufl. 12,11,73,61,00 | 34810
      9
      311
       64
      256
       5573
        688
       5504
         6961
         6961
           0.
```

II. Aufgabe. $\sqrt{81450625}$

```
Aufl. 81,45,06,25 | 90 25
      81
          45
          18
          4506
          1802
          3604
           90225
           18045
           90225
               0.
```

§. 157.

Soll man die Quadratwurzel aus Fractionen ziehen, welche reine Quadrate ſind, ſo muß die Wurzel aus Zähler und Nenner beſonders gezogen werden. — Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuvor in einen uneigentlichen Bruch. — Manchmal geht das Geſchäft des Wurzelausziehens erſt vor ſich, nachdem man die Fraction verkleinert hat.

Beyſpiele I. $\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \tfrac{1}{3}$.

II. $\sqrt{1\tfrac{9}{16}} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \tfrac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4}$.

III. $\tfrac{147}{192} \overset{3}{=} \sqrt{\tfrac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \tfrac{7}{8}$.

IV. $\sqrt{\tfrac{289}{841}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{841}} = \tfrac{17}{29}$.

V. $\sqrt{\frac{8a^2b^4}{18c^2x^6}} \overset{2}{=} \sqrt{\frac{4a^2b^4}{9c^2x^6}} = \frac{\sqrt{4a^2b^4}}{\sqrt{9c^2x^6}} = \frac{2ab^2}{3cx^3}$

§. 158.

Hat man die Quadratwurzel aus bloßen Decimalen, oder Ganzen mit Decimalen zu ziehen, welche aber reine Quadrate ſind, ſo verfährt man wie bey Ausziehung der Wurzel aus Quadraten ganzer Zahlen. Nur hat man in der Wurzel ſo viele Zifferſtellen der Ganzen und Decimalen abzuſchneiden, als im Quadrate Klaſſen von beyden waren.

I. Bey-

I. Beyſpiel. $\sqrt{17,850625}$

Auflöſung

```
17,85|06|25   (4,225
16
----
 185
  82
 164
-----
  2106
   842
  1684
------
  42225
   8445
  42225
  -----
      0
```

II. $\sqrt{0,038416} = 0,196$

§. 159.

Enthält das Quadrat, woraus die Wurzel zu ziehen iſt, Sexageſimalen verſchiedener Ordnungen, ſo reſolvirt man alles auf die niedrigſte Ordnung.

Z. B. $\sqrt{36^0\ 12^{-1}\ 01^{-2}}$

Auflöſung. $36^0 \quad 12^{-1} \quad 1^{-2}$

```
  36°    12⁻¹    1⁻²
  60
 ------
 2172⁻¹
   60
 ------
 130321⁻²
```

$\sqrt{13|03|21^{-2}} \quad 361^{-1} = 6^0\ 01^{-1}.$

```
 9
---
403
 66
396
---
 721
 721
 ---
   0
```

Anmerkung. Da bey Sexageſimalen die Wurzel auch aus dem Nenner gezogen werden muß, ſo ſieht man leicht ein, daß man, um die Wurzel auch aus dem Nenner

zu ziehen, nur den Exponenten des Quadrates halbiren dürfe. — Alſo

$$\sqrt{a^2 \xi^{-n}} = a\xi^{\frac{-n}{2}}$$

§. 180.

Hat man die Quadratwurzel aus einer Irrationalzahl zu ziehen, ſo verwandelt man dieſe in eine unendliche Reihe, indem man eine beliebige Anzahl paarweiſer Nullen anhängt, und findet dann die Wurzel durch Annäherung in Decimalen. — Führt die Irrationalzahl auch Decimalen bey ſich, ſo ergänzt man leztere, wenn ihre Anzahl noch nicht gerade iſt, zu lauter Paaren d. i. Klaſſen von zwey und zwey Decimalſtellen. Man kann, um aller Verwirrung vorzubeugen, die allenfalls vorhandenen Ganzen von der Rechten zur Linken, die Decimalen aber von der Linken zur Rechten in Klaſſen eintheilen. Irrationale Brüche, worin Zähler und Nenner irrational iſt, verwandelt man am bequemſten in einen Decimalbruch, der nach Umſtänden endlich oder unendlich werden kann. — Iſt blos der Zähler irrational, ſo kann man am Ende der Rechnung die Wurzel des Zählers durch jene des Nenners dividiren. — Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuerſt in einen uneigentlichen Bruch.

Anmerkung. Jede Fraction, worin Zähler und Nenner irrational ſind, läßt ſich in eine andere umwandeln, worin der Nenner rational wird, wenn man Zähler und Nenner mit dem Nenner multiplicirt, z. B.

$$\sqrt{\tfrac{5}{6}} = \sqrt{\tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{6}{6}} = \sqrt{\tfrac{30}{36}}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Beyſpiele. I. $\sqrt{280}$.

II. $\sqrt{17.5}$

III. $\sqrt{5\tfrac{2}{3}}$.

IV. $\sqrt{7\tfrac{5}{9}}$

V. $\sqrt{\tfrac{3}{7}}$.

Auf-

Aufl̈ſung

I. $\sqrt{280} = \sqrt{2|80,00|00|00}$ (16,733

```
   1
  ───
  180
  (26)
  156
  ────
  2400
  (327)
  2289
  ─────
  11100
  (3343)
  10029
  ──────
  107100
  (33463)
  100389
  ──────
    6711. Reſt.
```

* Um die Probe zu machen, muß man zum Producte der Wurzel aus ſich ſelbſt auch noch den Reſt addiren.

$(16,733)^2 = 279,993289$
$+6711$
$= 280,000000 = 280.$

II. $\sqrt{17,5} = \sqrt{17.500000}$ (4,1833

```
  (16)
  ───
  150
  (81)
  ────
  6900
  (828)
  6.624
  ─────
  27600
  (8363)
  25089
  ──────
  251100
  (83663)
  250989
  ──────
     111 Reſt.
```

Probe. $(4,1833)^2 =$

$\left.\begin{array}{r} 17,49999889 \\ +111 \end{array}\right\} = 17,5.$

III. $\sqrt{5\frac{2}{3}} = \sqrt{5,6666666} = 2,8047.$

IV. $\sqrt{7\frac{5}{9}}$

IV. $\sqrt{7\frac{5}{9}} = \sqrt{7{,}555555} = (2{,}74873.$

* Oder auch $\sqrt{7\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{9}} = \frac{8{,}2462112}{3} = 2{,}7487370$

V. $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4{,}5825757}{7} = 0{,}6546536.$

Anmerkung. Wenn man aus den Fractionen $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ und ähnlichen die Quadratwurzel zieht; ſo erhält man

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. .... $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

Verwandelt man nun dieſe Quadrate in unendliche Decimalbrüche, ſo ergiebt ſich die verlangte Wurzel ebenfalls in einem unendlichen Decimalbruch

Z. B. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{0{,}11111111..} = 0{,}3333 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$

$\sqrt{\frac{1}{81}} = \sqrt{0{,}012345679012..} = 0{,}111111. = \frac{1}{9}.$

Ganz anders verhält es ſich mit unendlichen Decimalbrüchen, welche aus irrationalen gemeinen entſtanden ſind, z. B. $\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{0{,}142857142857.} = 0{,}37796445,..$ wobey man in der Wurzel keine Spur eines nach beſtimmten Geſetzen fortlaufenden Decimalbruches bemerkt.

§. 161.

Sind die Sexageſimalen, woraus die Wurzel zu ziehen iſt, Irrationalzahlen, ſo reſolvirt man alle gegebenen Ordnungen auf die niedrigſte, welche aber zum Exponenten eine gerade Zahl haben muß, damit man des Wurzelausziehens aus dem Nenner überhoben ſey, und verwandelt die Irrationalzahl in eine unendliche Reihe.

Z. B. $\sqrt{4^{0}\ 20^{-1}.\ 17^{-2}.\ 35{,}8^{-3}} = \sqrt{937055{,}8^{-3}}$

$= \sqrt{56{,}22{,}33{,}48{,}00^{-4}}$ $(7498{,}22^{-2} = 2^{0}.4^{-1}\ 58{,}22^{-2}.$

```
 49
 ---
  722
  144
  576
  -----
  14633
   1489
  13401
  ------
   123248
    14988
   119904
   -------
     334400
     149962
     299924
     -------
      3447600
      1499642
      2999284 u. ſ. f.
      -------
       448316., Reſt.
```

Probe.

Probe.

$$(7498.22^{-2})^2 = 56223303.1684^{-4}$$
$$+44.8316$$
$$= 56223348.0000^{-4}.$$

§. 162.

Hat man die Quadratwurzel aus complexen Buchſtabengrößen, welche reine Quadrate ſind, zu ziehen, ſo verfährt man übrigens nach der Formel: $a^2 + 2ab + b^2$. Nur die Eintheilung der Quadratzahlen in Klaſſen von zwey und zwey Gliedern iſt nicht unbedingt anwendbar, wie aus folgendem Täfelchen zu erſehen iſt.

Gliederzahl in der Wurzel.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Gliederzahl im Quadrate.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.
Differenz	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Auch iſt das Quadrat des erſten Theiles der Wurzel jedesmal nur als eingliederig zu betrachten.

Beyſpiele I. $\sqrt{16m^2 - 56mn + 49n^2}$

II. $\sqrt{9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30xz - 40yz + 25z^2}$

Auflöſung. I. $\sqrt{16m^2 - 56mn + 49n^2}\ (4m - 7n$

$$16m^2$$
$$-56mn + 49n^2$$
$$8m - 7n$$
$$-56mn + 49n^2$$
$$0$$

$$(3x + 4y - 5z$$

II. $\sqrt{9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30xz - 40yz + 25z^2}$

$$9x^2$$
$$24xy + 16y^2$$
$$6x + 4y$$
$$24xy + 16y^2$$
$$- \quad -$$
$$-30xz - 40yz + 25z^2$$
$$6x + 8y - 5z$$
$$-30xz - 40yz + 25z^2$$
$$0$$

§. 163.

§. 163.

Für die Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen complexen Größen möge folgendes Beyſpiel als Form dienen.

$$\sqrt{x^2 - y} \quad \left(x - \frac{y}{2x} - \frac{y^2}{8x^3} - \frac{y^3}{16x^5} - \frac{5y^4}{128x^7} \right.$$

$$x^2$$

$$-y$$

$$2x - \frac{y}{2x}$$

$$\begin{array}{l} -y + \frac{y^2}{4x^2} \\ + \end{array}$$

$$-\frac{y^2}{4x^2}$$

$$2x - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{8x^3}$$

$$\mp \frac{y^2}{4x^2} \pm \frac{y^3}{8x^4} + \frac{y^4}{64x^6}$$

$$-\frac{y^3}{8x^4} - \frac{y^4}{64x^5}$$

$$+2x - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{4x^3} - \frac{y^3}{16x^5}$$

$$\mp \frac{y^3}{8x^4} \pm \frac{y}{16x^6} \pm \frac{y^5}{64x^8} \pm \frac{y^6}{256x^{10}}$$

$$-\frac{5y^4}{64x^6} - \frac{y^5}{64x^8} - \frac{y^6}{256x^{10}}$$

Zweyter Artikel.

V o m K u b u s.

§. 164.

Wenn man eine Zahl mit ſich ſelbſt, und dieſes Product, d. i. ihr Quadrat nochmal mit der nemlichen Zahl multiplicirt, ſo heißt das Product ein Kubus, oder eine Kubikzahl. Eine Kubikzahl iſt alſo ein Product aus drey gleichen Factoren. Der einzelne Factor iſt die Kubikwurzel.

Z. B. aaa = a^3 iſt die Kubikzahl von der Kubikwurzel a.

Die

Die Kubuſſe der neun einfachen Zahlen und der Zahl 10 ſtellt folgendes Täfelchen dar:

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Kubus.	1.	8.	27	64	125.	216.	343	512.	729.	1000.

Die erſten Differenzen dieſer Kubikzahlen ſind:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, wobey man kein beſtimmtes Progreſſionsgeſetz bemerkt; ſucht man aber die Differenz der erſten Unterſchiede, ſo entſteht die Reihe

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54; woraus man die Progreſſion um die Differenz 6 deutlich erſieht.

§. 165.

Aus dem Begriffe einer Kubikzahl und des Multiplicirens überhaupt ergeben ſich folgende Sätze.

I. Den Kubus von Fractionen erhält man, wenn Zähler und Nenner eigens kubirt. Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuerſt in einen uneigentlichen Bruch.

Alſo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}.$

$\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}.$

allgem. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$

II. Beſteht die Zahl, welche zum Kubus erhoben wird, aus mehrern Factoren, ſo muß der Kubus ein Product aus den Kubuſſen der einzelnen Factoren ſeyn. — Im Gegentheil muß die Kubikwurzel aus einer Kubikzahl, die ein Product mehrerer Kubuſſe iſt, auch ein Product der einzelnen Kubikwurzeln ſeyn. — Es iſt aber das Zeichen für die Kubikwurzel, $\sqrt[3]{}$ *

alſo. $(3\,abc)^3 = 27\,a^3 b^3 c^3.$

und $\sqrt[3]{\frac{-64 d^3 f^3}{125 g^3}} = \frac{4\,df}{5\,g}$

* Das Ziffer 3 in dem Wurzelzeichen bedeutet, daß die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden muß, ein Product aus drey gleichen Factoren ſeyn ſoll.

III. Erhebt man Decimalen zum Kubus, ſo enthält dieſer eben ſo viele Klaſſen von drey und drey Decimalſtellen, als in der Wurzel einfache Decimalſtellen waren.

Z. B.

Z. B. $(0{,}4)^3 = 0{,}064.$

$(0{,}04)^3 = 0{,}000064.$

allgem. $(a.\delta^{-n})^3 = a^3\delta^{-n}\delta^{-n}\delta^{-n} = a^3\delta^{-3n}.$

IV. Um Sexageſimalen zu kubiren, bringt man in der Wurzel zuerſt alles auf die niedrigſte Ordnung. Die Kubikzahl wird dann in jedem Falle einen Exponenten erhalten, der durch drey theilbar iſt.

Z. B. $(1^\circ.\ 13^{-1})^3 = (73^{-1})^3 = 73^{-1}.73^{-1}.73^{-1} = 389017^{-3}$

allgemein: $(a\xi^{-n})^3 = a^3\xi^{-n}\xi^{-n}\xi^{-n} = a^3.\xi^{-3n}.$

V. Ueberhaupt erhebt man Buchſtabengrößen zum Kubus, wenn man ihren Exponenten mit 3 multiplicirt.

Z. B. $(c)^3 = c.c.c. = c^3 = c^{1\times3}.$

$(c^2)^3 = c^2.c^2.c^2 = c^{2.3} = c^6$

allgem. $(x^n)^3 = x^n.x^n.x^n = x^{3n}.$

Im Gegentheile wird die Kubikwurzel aus Buchſtabengrößen gezogen, wenn man den Exponenten lezterer durch 3 dividirt.. alſo $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$

denn $a^2.a^2.a^2 = a^6.$

allgemein $\sqrt[3]{x^n} = x^{\frac{n}{3}}.$

VI. Eine poſitive Kubikwurzel giebt auch einen poſitiven Kubus; eine negative Wurzel aber einen negativen Kubus.

Denn: $(+a)^3 = +a\times+a\times+a = +a^3.$

$(-a)^3 = -a\times-a\times-a = +a^2\times-a = -a^3.$

$(-15)^3 = -3375\ldots$ oder weil $-15 = -1\times-3\times-5.$

$(-15)^3 = -1\times-27\times-125 = -3.375.$

Anmerkung. Negative Kubuſſe ſind alſo keineswegs imaginäre Zahlen, wie negative Quadrate; denn

$\sqrt[3]{-64} = -4.\quad \sqrt[3]{-a^3} = -a.$

Deßwegen iſt es einerley, zu ſchreiben $\sqrt{-a^3}$ oder $-\sqrt{a^3}$. in beyden Fällen iſt die Wurzel $-a$.

VII. Jede Zahl kann zwar eine Kubikwurzel ſeyn; nicht aber jede Zahl iſt ein reiner Kubus, wie ſchon aus dem Täfelchen der Kubikzahlen von 1 — 1000 zu ſehen iſt. Aus einer Zahl, welche kein Product aus drey gleichen Factoren

Factoren iſt, läßt ſich die Kubikwurzel nicht genau, ſondern nur durch Approximation finden; man heißt dergleichen Zahlen — irrationale Kubikzahlen, und drückt ſie mit dem Wurzelzeichen $\sqrt[3]{\ }$ aus.

Z. B. $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt[3]{-7}$.
allgemein: $\sqrt[3]{a}$.

§. 166.

Um die Kubikwurzel aus einem reinen Kubus zu ziehen, der nicht über drey Ziffern hat, bedarf es nichts weiters, als die Kubuſſe der neun Einheiten zu wiſſen.

Z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$. $\sqrt[3]{-64} = -4$.
$\sqrt[3]{-729} = -9$.

Der Mechanismus bey Ausziehung der Kubikwurzel aus mehrzifferigen Kubuſſen beruht auf folgenden Sätzen.

I. Der Kubus einer Wurzel von n Zifferſtellen kann nicht mehr als 3n, und nicht weniger als 3n − 2 Zifferſtellen enthalten.

Z. B. $1^3 = 1$	$10^3 = 1000$	$100^3 = 1000\,000$
$4^3 = 64$	$19^3 = 6859$	$999^3 = 997002.999$
$9^3 = 729$	$91^3 = 753571$	

Daß aber von dem Dreyfachen der Zifferſtellen der Wurzel in der Kubikzahl eine oder zwey abgehen, hängt nur davon ab, ob die höchſte Zifferſtelle (d. i. die erſte zur Linken), in der Wurzel einen ein- zwey- oder dreyzifferigen Kubus fodere.

II. Wenn man eine zweytheilige Wurzel z. B. $a + b$ zum Kubus erhebt, ſo enthält dieſer:

1°) den Kubus des erſten Theiles, a^3

2°) das dreyfache Quadrat des erſten Theiles, multiplicirt durch den zweyten, $3a^2b$.

3°) Das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles, multiplicirt durch den erſten Theil, $3ab^2$.

4°) Den Kubus des zweyten Theiles.

Beweis.

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \\
\quad + ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3.
\end{array}
$$

Folgeſatz. Alle dieſe vier Theile müſſen ſich von jedem reinen Kubus was immer für einer zweytheiligen Größe abziehen laſſen.

Beyſpiel. Welches iſt der Kubus von 37?

Operation. $a = 30$

$b = 7.$

$$
\begin{array}{rl}
a^3 = & 27000 \\
3a^2b = & 28900 \\
3ab^2 = & 4410 \\
b^3 = & 343 \\
\hline
\text{Summe} = & 50653 = (37)^3.
\end{array}
$$

Anmerkung 1. Nennt man lieber den erſten Theil der Wurzel, als den Zehner, $a.10^1$; den zweyten Theil aber, als die Einheit, $b.10^0$, ſo iſt:

$$(a.10^1 + b.10^0)^3 = a^3\,10^3 + 3\,a^2b.\,10^2 + 3\,ab^2\,10^1 + b^3\,10^0$$

Aus dieſer zweyten Formel ſieht man nun offenbar,

1. daß der Kubus des erſten Theiles unter den Tauſendern,
2. das dreyfache Quadrat des erſten Theils, mit dem zweyten multiplicirt, unter den Hunderten,
3. das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles, multiplicirt mit dem erſten, unter den Zehnern —
4. Endlich der Kubus des zweyten Theils unter den Einheiten der ganzen Kubikzahl ſeinen niedrigſten Ziffer habe, und von da müſſe abgezogen werden.

Dieſe

Dieſe Formel: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ läßt ſich auch ſo darſtellen: $a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\, b$.

§. 167.

Aufgabe. Aus einer gegebenen vollkommenen Kubikzahl, die nicht über ſechs Zifferſtellen hat, die Wurzel zu finden.

Auflöſung I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen von drey und drey Ziffern, bis auf die höchſte oder lezte, welche auch aus 2, 1 Ziffer beſtehen kann.

II. Ziehe von der erſten Klaſſe den größten Kubus einer der neun Urzahlen ab, der ſich ſubtrahiren läßt, und ſchreibe die Wurzel davon an die Stelle des Quotienten.

III. Zu dem allenfallſigen Reſte der erſten Klaſſe ſetze man die folgende Klaſſe herab, nehme das dreyfache Quadrat des erſten Theils der Wurzel als Diviſor, und ſchreibe deſſen niedrigſten Ziffer unter den höchſten der neuen Klaſſe, und dividire damit in die obenſtehenden Zahlen. Der Quotient iſt der zweyte Theil der Wurzel.

IV. Nun multiplicire man mit dieſem Quotient den Diviſor (erſtes Summand). Nehme das Quadrat des zweyten Theils, multiplicire es mit dem dreyfachen erſten, und ſetze den niedrigſten Ziffer dieſes Productes unter den Zehner der neuen Klaſſe (zweytes Summand). Endlich kubire man den zweyten Theil der Wurzel, ſetze den niedrigſten Ziffer dieſes Kubus unter die Einſerſtelle der neuen Klaſſe (drittes Summand) — addire dieſe drey Summanden, und ziehe die Summe von der noch übrigen ganzen Kubikzahl ab.

* Vielleicht ließe ſich bey Addirung dieſer drey Summanden ein Vortheil anwenden, wenn man zuerſt die Theile $3a^2 + 3ab + b^2$ addirte, und die Summe noch durch b multiplicirte.

Beyſpiel. Man ziehe die $\sqrt[3]{}$ aus 571787, nach der Formel.

Operation. $(a = 80.\ b = 3 \mid a + b = 83.$

$$
\begin{array}{rll}
 & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 571|787 \\
 & -a^3 & -512\,000 \\
\hline
 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 59.787 \\
 : & 3a^2 \ldots\ldots = & 19.200 \\
\hline
\times b & 3a^2b \ldots\ldots = & 57.600 \quad \times 3 \\
 & +3ab^2 \ldots = & 2\,160 \\
 & +b^3 = & 27 \\
\hline
 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 59.787 \\
 & - \quad - \quad - & - \\
\hline
 & 0. & 0
\end{array}
$$

* Oder auch alſo: $\left(\begin{array}{l} a = 80 \\ b = 3. \\ \hline a + b = 83. \end{array}\right.$

$$
\begin{array}{rl}
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 571|787 \\
-a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots = & -512\,000 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 59\,787 \\
: 3a^2 \ldots\ldots = & 19\,200 \\
b \times (3a^2 + 3ab + b^2) = & 19\,929 \times 3 \\
\hline
= 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 59\,787 \\
- \quad - \quad - & - \\
\hline
0 & 0
\end{array}
$$

§. 168.

Aufgabe. Aus was immer für einer Zahl, die ein reiner Kubus iſt, und aus mehr als ſechs Ziffern beſteht, die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflöſung I. Man theile die gegebene Kubikzahl in Klaſſen von drey und drey Ziffern, wie §. praec.

II. Um die beyden erſten Theile der Wurzel zu finden bleibt die Operation ganz die nemliche, wie §. cit.

III. Zum Reſte, der ſich nach Abzug der dreytheiligen Summe ergiebt, ſetze man die folgende Klaſſe herab, und betrachte die gefundenen zwey Ziffer, als den erſten Theil der

der Wurzel. Suche davon das dreyfache Quadrat, ſetze den niedrigſten Ziffer deſſelben unter den höchſten der neuen Klaſſe, und dividire ſo in die darüber ſtehende Zahl. Der Quotient iſt der dritte Theil der Wurzel.

IV. Nun multiplicire man mit dem neuen Theil der Wurzel den Diviſor, (erſtes Summand): Suche das dreyfache Quadrat des neuen Theils der Wurzel, und multiplicire es durch den ganzen vorhergehenden Theil. Setze den niedrigſten Ziffer dieſes Productes unter den Zehner der neuen Klaſſe, (zweytes Summand). Suche den Kubus des neuen Theils der Wurzel, und ſetze den niedrigſten Ziffer deſſelben unter die Einſerſtelle der neuen Klaſſe (drittes Summand). Addire hierauf dieſe drey Theile, und ziehe die Summe von der noch übrigen ganzen Kubikzahl ab.

V. Sind noch mehrere Klaſſen vorhanden, ſo betrachtet man die bisher gefundenen Theile der Wurzel immer als einen, und beginnt die Operation wieder von Nro. III. an, bis die Kubikzahl erſchöpft iſt. —

VI. So oft man auf die Nro. III vorgeſchriebene Art mit dem Diviſor in das Dividend nicht dividiren kann, indem lezteres weniger beträgt, als der erſte, ſo muß in der Wurzel als Quotus eine Nulle angeſchrieben, eine neue Klaſſe herabgeſezt, und ein neuer Diviſor geſucht werden.

VII. Sollte man die bey Nro. IV ſich ergebende dreyfache Summe vom Dividend nicht abziehen können, ſo wäre dieſes ein Zeichen, daß man den Quotus zu hoch angeſezt habe... Man müßte ihn dann ſo lange vermindern, bis der Abzug angeht.

VIII. Für jede Klaſſe von drey Nullen im Kubike, erhält die Wurzel eine einfache Nulle... Ueberhaupt bekommt die Wurzel ſo viele Zifferſtellen, als die Kubikzahl Klaſſen hat.

I. Auf-

I. Aufgabe. $\sqrt[3]{496981290961}$.

Auflöſung (7.921

$\sqrt[3]{496|981|290|961}$

343

153981
147
1323
1701
729

— 150039

3942290
18723
37446
948
8

— 3754088

188202961
1881792
23761

— 188202961

0.

II. Aufgabe. $\sqrt[3]{128.100'283|921}$ — Nach der Formel.

Auflöſung. $\sqrt[3]{128|100|283|921}$ (5041.

$a^3 =$ 125

$3a^2 =$ 3100
75

3100283.

$3a^2 =$ 7500
$3a^2b =$ 30000
$+ 3ab^2 =$ 2400
$b^3 =$ 64

$- 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ — 3024.064.

76219921.

$3a^2 = 3a^2b.$ =. . . 762048
$+ 3ab^2$ =. 1512
b^3 =. 1

$- 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ — 76'219 921

0

1. An-

1. **Anmerkung.** Wiewohl das Wurzelausziehen aus 9 — und 12ziſſerigen Kubuſſen, nach der zweytheiligen Formel nach der Meinung Einiger nicht ſtreng mathematiſch iſt, indem z. B. in der lezten Rechnung $a = 5 \ldots$ $a = 50$. $a = 504$ ſeyn muß: ſo iſt nichts deſto weniger dieſe Formel weit faßlicher und bequemer, als eine drey = oder viertheilige. Zugleich leitet ſich daraus ein Rechnungsvortheil ab, wodurch man des Addirens der dreyerley Summanden überhoben wird. — Man habe den Kubus: $C = x^3 + y^3 + z^3 + \ldots\ldots.$ deſſen Wurzel ſey $= x + y + z$. Hat man nun nach der Formel den Diviſor $3a^2$ gefunden, und damit den Quotus y erhalten, ſo kubire man ohne weiters die bisherige Wurzel $x + y$, und ziehe den Kubus von der oberſten Reihe $C = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y \ldots\ldots.$ ab. So kubirt man zulezt auch die ganze Wurzel $x + y + z$, wodurch man zugleich die Probe gemacht hat.

Z. B. . . $\sqrt[3]{24.137.569.000}$

Operation. (2890

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} & = & \sqrt[3]{24|137|569|000} \\
-a^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & = & 8 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 16.137 \\
3a^2 & = & 12 \\
-\;a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & -\;21.952 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 2\,185.569 \\
3a^2 & = & 2352 \\
-\;a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3 & = & 24137.569 \\
\hline
 & & 0 \quad 000
\end{array}
$$

2. **Anmerkung.** Verlangt man auch noch eine dreytheilige Formel für die Kubikzahlen, d. i. $(a + b + c)^3$, ſo iſt dieſe: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. welche Formel ſich kürzer alſo darſtellen läßt:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3.$$

Man ziehe nach dieſer Formel die Kubikwurzel aus der Zahl: 78402752.

Opera=

Operation.

$\sqrt[3]{\ }$, C.	=	$\sqrt[3]{78\|402\|752}$
a^3	=	64.000.000
		14 402.752
$3a^2$ . . .	=	4 800 00
$3a^2b$	=	9'600 000
$3ab^2$	=	480.000
b^3	=	8000
S	=	10'088.000
		4314752
$3(a+b)^2$	=	529.200
$3(a+b)^2c$	=	4'233.600
$3c^2(a+b)$	= . . .	80640
c^3	= . . .	512
S.	=	4'314.752
		0.

a	=	400
b	=	20
a+b	=	420
c	=	8
a+b+c	=	428.

§. 169.

Hat man die Kubikwurzel aus Fractionen zu ziehen, welche nach der Vorausſetzung reine Kubuſſe ſind, ſo muß man die Wurzel aus Zähler und Nenner beſonders ziehen. Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuvor in einen uneigentlichen Bruch.

Beyſpiele. I. $\sqrt[3]{\frac{4096}{15.625}} = \frac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[3]{15.625}} = \frac{16}{25}.$

II. $\sqrt[3]{\frac{729}{1\,000}} = \frac{9}{10}.$

III. $\sqrt[3]{169+\frac{1.955}{2.197}} = \sqrt[3]{\frac{373.248}{2.197}} = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}.$

§. 170.

Iſt der Kubus, woraus die Wurzel zu ziehen, eine Decimalzahl, mit Ganzen oder ohne dieſe, ſo ſetze man in der Wurzel ſo viele einzelne Ganze und Decimalen, als in der Kubikzahl Klaſſen von beyden ſtehen, und verfahre übrigens wie bey Ausziehung der Wurzel aus ganzen Zahlen.

Bey-

Beyſpiele. I. $\sqrt[3]{118{,}370771} = 4{,}91.$

* Die Wurzel aus dem Nenner iſt $= \sqrt[3]{1000.000} = 100.$

II. $\sqrt[3]{0{,}000074088} = 0{,}042.$

* Die Abweſenheit der Ganzen im Kubus wurde in der Wurzel durch 0, ... die erſte Klaſſe der Nullen durch eine einzige Nulle nach dem Komma angezeigt ...

Die übrige Operation zur Uebung!

§. 171.

Hat man die Kubikwurzel aus Irrationalzahlen zu ziehen, ſo verfährt man analogiſch, wie bey Ausziehung der Quadratwurzel aus Irrationalzahlen.

I. Man hängt der Irrationalzahl Klaſſen von drey und drey Nullen an, und verfährt übrigens wie bey reinen Kubuſſen. — Je mehr man in der Wurzel Decimalſtellen ſucht, deſto näher kommt man der wahren Wurzel.

II. Hat die Irrationalzahl bereits Decimalen, ſo ergänzt man dieſe vor allem zu 3, 6, 9 Stellen u. ſ. w.

III. Brüche, worin Zähler und Nenner irrational, verwandelt man am bequemſten in einen Decimalbruch. Iſt bloß der Zähler irrational, ſo kann man die Wurzel des Zählers durch jene des Nenners dividiren... Auf dieſe lezte Form läßt ſich aber leicht jeder Bruch reduciren, wenn man nur mit dem Quadrate des Nenners Zähler und Nenner multiplicirt; denn

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \times b^2}{b \times b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Manchmal verſchwindet die Irrationalität des Bruches nach der Verkleinerung z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{448}{875}} = \sqrt[3]{\frac{448:7}{875:7}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

Beyſpiele. I. $\sqrt[3]{586}$. II. $\sqrt[3]{18{,}7}$. III. $\sqrt[3]{28\frac{1}{3}}$.
IV. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Auf-

Aufloͤſung I. $\sqrt[3]{586{,}000000}$ .... (8,368209

$$
\begin{array}{r}
512 \\
\hline
7.4000 \\
1.92 \\
\hline
576 \\
216 \\
27 \\
\hline
59787 \\
\hline
14213000 \\
20667 \\
\hline
124002 \\
8964 \\
216 \\
\hline
\end{array}
$$

— 12490056 . . u. ſ. w. bis zur ſechsten Decimalſtelle, worauf als Reſt bleibt:

0,0000821845750466 71

Um die Probe zu machen, muß ich nun zum Kubus der Wurzel dieſen Reſt addiren:

$$
\begin{array}{rl}
(8{,}368209)^3 = & 585{,}9999178154249533 29 \\
& +0{,}0000821845750466 71 \\
\hline
= & 586{,}000 \ldots
\end{array}
$$

II. $\sqrt[3]{18{,}7} = \sqrt[3]{18{,}700|000|}$ ..... (2,6542.

III. $\sqrt[3]{28\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{28{,}600}$ ...... $= 3{,}0581..$

oder. $\sqrt[3]{28\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{143 \times 25}{5 \times 25}} = \frac{\sqrt[3]{3575}}{5} = \frac{15{,}2909}{5} =$ 3,05819

IV. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}90856030$

oder $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4} = \frac{3{,}6342412}{4}$

$= 0{,}9085603$

Anmerkung. Wenn man einen gemeinen Bruch, der ein reiner Kubus iſt, in einen unendlichen Decimalbruch verwandelt, und daraus die Kubikwurzel zieht, ſo erſcheint dieſe ebenfalls in einem unendlichen Decimalbruch. z. B. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{0{,}296296} = 0{,}666.., = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Eben ſo: $\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \sqrt[3]{0{,}004296296...} = 0{,}1666 = \frac{1}{6}$.

§. 172.

§. 172.

Hat man endlich die Kubikwurzel aus Sexageſimalen zu ziehen, und ſind dieſe I. rational, ſo reſolvirt man alles auf die niedrigſte Sorte.

II. Sind ſie aber irrational, ſo bringt man ſie auf einen Exponenten, der durch drey (3) theilbar iſt, d. i. macht den Nenner rational ($= \xi^{3n}$) und verfährt übrigens, wie bey andern Irrationalzahlen.

Beyſpiele. I. $\sqrt[3]{138^\circ \quad 7^{-1} \quad 20^{-2} \quad 43^{-3}}$

II. $\sqrt[3]{23^\circ \quad 25^{-1}}$

Auflöſung.

I. $\sqrt[3]{138^\circ\ 7^{-1}\ 20^{-2}\ 43^{-3}} = \sqrt[3]{28|934|443^{-3}} = 307^{-1} = 5^\circ\, 7^{-1}$

II. $\sqrt[3]{23^\circ \cdot 25^{-1}} = \sqrt[3]{1405^{-1}} = \sqrt[3]{5058000^{-3}}$

$\sqrt[3]{5|058|000,000000^{-3}} = 171,65^{-1}\ldots$

$= 2^\circ\ 51,65^{-1}\ldots$

Probe. $(171,65^{-1})^3 = 5.057.447,967125$

$+ 552032875^{-3}$ Reſt

$5.058.000,000000^{-3}$

§. 173.

Hat man die Kubikwurzel aus complexen Buchſtabengrößen, welche reine Kubuſſe ſind, zu ziehen: ſo verfährt man ganz nach der Formel: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.. Nur die Eintheilung in Klaſſen von drey und drey Gliedern iſt nicht durchaus richtig, in welchem Puncte man ſich an folgende Tabelle zu halten hat.

Gliederzahl in der Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Gliederzahl im Kubus	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.
Iſte Differenz	3	6	10	15	21	28	
IIte Differenz			4	5	6	7	8

Uebrigens iſt das erſte Glied jedes ſolchen Kubus eine einfache Größe und eine reine Kubikzahl.

Bey-

Beyſpiele. I. $\sqrt[3]{8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3}$.

II. $\sqrt[3]{8m^3 - 60m^2n + 150mn^2 - 125n^3 + 84m^2p - 420mnp + 525n^2p + 294mp^2 - 735np^2 + 343p^3}$

III. $\sqrt[3]{\frac{27x^3}{64} - 1\frac{1}{8}x^2y + xy^2 - \frac{8y^3}{27}}$.

Auflöſung I. $\sqrt[3]{8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3}$ $\quad (2a - 5b$

$$8a^3.$$
$$-60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$
$$12a^2$$
$$-60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$0.$$

$(2m - 5n + 7p)$

II. $\sqrt[3]{8m^3 - 60m^2n + 150mn^2 - 125n^3 + 84m^2p - 420mnp + 525n^2p + 294mp^2 - 735np^2 + 343p^3}$

$$8m^3$$
$$-60m^2n + 150mn^2 - 125n^3$$
$$12m^2$$
$$-60m^2n + 150mn^2 - 125n^3$$
$$+ \quad -$$
$$84m^2p - 420mnp + 525n^2p + 294mp^2 - 735np^2 + 343p^3$$
$$12m^2 \quad -60mn \quad +75n^2$$
$$84m^2p - 420mnp + 525n^2p + 294mp^2 - 735np^2 + 343p^3$$
$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$$
$$0.$$

III. $\sqrt[3]{\frac{27x^3}{64}} \quad 1\frac{1}{8}x^2y + xy^2 - \frac{8y^3}{27}.$ $\quad (\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y.$

$$-\frac{27x^3}{64}$$
$$-\frac{9x^2y}{8} + xy^2 - \frac{8y^3}{7}$$
$$* \frac{27x^2}{16}$$
$$-\frac{9}{8}x^2y + xy^2 - \frac{8y^3}{27}$$
$$+ \quad -** \quad +$$
$$0.$$

$*\ \frac{9}{8} \times \frac{16}{27} = \frac{2}{3}$

$**\ \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} \times 3 = 1.$

Zweytes

Zweytes Hauptſtück.
Eigentliche Würdenlehre.

§. 174.

Monomiſch (μόνȣ νόμȣ) heißt in der Würdenlehre eine einfache Größe, z. B. a, ab.

Binomiſch, eine zweygliederige Größe z. B. (a+b)

Polynomiſch, eine aus mehr als zwey Gliedern beſtehende Größe z. B. (a+b+c), in wieferne ſich alle dieſe Größen nach beſtimmten Geſetzen zu einer beliebigen Würde erheben, oder als Wurzeln aus einer Würde ausziehen laſſen. — Insbeſondere kann man die monomiſchen Würden in einer dreyfachen Rückſicht betrachten:

1°) als Würden, (im engern Sinne) wenn ihre Exponenten ganze Zahlen ſind,

2°) als Wurzelgrößen, wenn ihre Exponenten gebrochene Zahlen ſind,

3°) in ihrer Verbindung mit ſich ſelbſt oder andern gleichartigen Größen.

Erſter Artikel.
Würdenlehre monomiſcher Größen.

A. Monomiſche Größen als Würden.

§. 175.

I. Würde oder Dignität heißt ein Product aus lauter gleichen Factoren, oder das Product einer Größe aus ſich ſelbſt.

Z. B. 2 2 = 4 | 2.2.2. = 8 | 2.2.2.2 = 16.

allgemein aa, aaa, aaaa.

Die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Grad oder Exponent der Würde.

* Die

* Die Würden des zweyten Grades nennt man auch Quadrate; die des dritten Kubuſſe, oder Kubikzahlen; die des vierten — Biquadrate.

II. Der Exponent dient nur der Würde einen kürzern und faßlichern Ausdruck zu geben.

Z. B. $aa = a^2$. $aaa = a^3$. $aaaaaaa = a^7$.

III. Der Exponent 1 wird, ſo wie der Coefficient 1, nicht ausdrücklich geſezt, ſondern bey jeder Größe, die keinen andern Exponenten hat, verſtanden.

Z. B. $6 = 6^1$. $a = 1.a^1 = a^1$.

IV. Potenzen, ſo wie die einzelnen Factoren oder Wurzeln derſelben, ſind jederzeit nur Zahlen; denn nur Zahlen laſſen ſich durcheinander multipliciren, und geben ein Product aus gleichen Factoren.

V. Die Würden von 1 bleiben immer unverändert; die der übrigen natürlichen Zahlen aber wachſen nach einem beſtimmten Verhältniſſe. — Man kann dabey die Würde mit dem Exponenten blos anzeigen z. B. 2^3, 4^2, 5^4; oder die Multiplikation wirklich verrichten.

Folgendes wird die Sache erläutern.

Würde v.	2.	5.	10.
Ite	$2^1 = 2$.	$5^1 = 5$.	$10^1 = 10$.
II.	$2^2 = 4$.	$5^2 = 25$.	$10 = 100$.
III.	$2^3 = 8$.	$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$.
IV.	$2^4 = 16$.	$5^4 = 625$.	$10^4 = 10.000$.
V.	$2^5 = 32$.	$5^5 = 3125$.	$10^5 = 100.000$.
VI.	$2^6 = 64$.	$5^6 = 15625$.	$10^6 = 1\,000.000$.
VII.	$2^7 = 128$.	$5^7 = 78.125$.	$10^7 = 10'000.000$.
VIII.	$2^8 = 256$.	$5 = 390625$.	$10 = 100'000000$.
IX.	$2^9 = 512$.	$5^9 = 1953.125$.	$10^9 = 1.000'000.000$.
X.	$2^{10} = 1024$.	$5^{10} = 9765625$.	$10^{10} = 10.000'000.000$.
XI	$2^{11} = 2048$	$5^{11} = 48828.125$.	$10^{11} = 100.000'000.000$.
XIIte	$2^{12} = 4096$.	$5^{12} = 244'140.625$.	$10^{12} = 1''000.000'000.000$.

§. 176.

§. 176.

Allgemein ſind die Potenzen von a:

I.	II.	III.	IV.	V.	n^{te}
a,	aa,	aaa,	aaaa,	aaaaa,	aaa... n
a^1,	a^2,	a^3,	a^4,	a^5,	a^n.

* Man ſieht hieraus, daß man jedes nächſtfolgende Glied erhält, wenn man das Vorhergehende noch mit a multiplicirt.

Wenn die monomiſche Größe als Wurzel ein Product iſt, ſo muß auch jede Würde zugleich ein Product aus den einzelnen Würden aller Factoren in der Wurzel ſeyn. Man kann dergleichen monomiſche Größen entweder in Klammern einſchließen, und außerhalb der Klammern den Exponenten einmal anſetzen; oder man erhebt jeden Factor einzeln zur verlangten Würde.

Z. B. $(ab)^1$, $(ab)^2$, $(ab)^3$, $(ab)^4$, $(ab)^5$, $(ab)^6$, $(ab)^n$,
oder: a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, a^nb^n.
Ferner: $(3xy)^1$, $(3xy)^2$, $(3xy)^3$, $(3xy^4)$, $(3xy)^5$
$= 3xy$, $9x^2y^2$, $27x^3y^3$, $81x^4y^4$, $243x^5y^5$.

* Daher iſt es einerley, ob man die einzelnen Factoren einer Größe, oder das ganze Product zu einer verlangten Würde erhebt.

Z. B:	$(2.5)^2$,	$(2.5)^3$,	$(2.5)^4$,	$(2.5)^5$,	$(2.5)^6$
=	4×25	8×125,	16×625,	32×3125,	64×15625.
=	100,	1000.	10.000,	100.000,	1'000 000
=	10^2,	10^3.	10^4,	10^5,	10^6.

§. 177.

Die Würden einer **negativen** Größe z. B. —a ſind der Ordnung nach folgende:

$-a^1$, $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$, $+a^8$, $-a^9$ u.ſ.w.

Hieraus ergiebt ſich die allgemeine Regel: Alle Würden einer negativen Größe werden poſitiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl; hingegen negativ, wenn der Würdeexponent ungerad iſt. Alſo wird die 16te Dignität von —2b ſeyn: $+65.536\ b^{16}$. Die 17te hingegen $-131072\ b^{17}$.

§. 178.

§. 178.

Die negativen Exponenten ſtehen bei Fractionen, deren Zähler = 1 iſt. — Man ſchreibe obige Reihe a, a^2, a^3.... verkehrt an:

$$a^6 \ , \ a^5 \ , \ a^4 \ , \ a^3 \ , \ a^2 \ , \ a^1.$$

oder: aaaaaa , aaaaa , aaaa , aaa , aa , a.

Man ſieht hier offenbar, daß jedes nächſtfolgende Glied aus dem Vorhergehenden entſtehe, wenn man dieſes durch a dividirt:

denn: $\frac{aaaaaa}{a} = a^5$. $\frac{a^5}{a} = a^4$. $\frac{a^4}{a} = a^3$.

$\frac{a^3}{a} = a^2$. $\frac{a^2}{a} = a^1$.

Setze ich nun dieſe Reihe mit der doppelten Bezeichnung noch weiter fort, ſo muß auf a folgen: $\frac{a}{a} = 1$ oder a^0. auf dieſes $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}; ferner $\frac{1}{a^2}$, oder a^{-2} u. ſ. w.

Nemlich a^2 , a^1 , a^0 , a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} , a^{-5} u. ſ. w.

$$aa \ , \ a \ , \ \frac{a}{a} \ , \ \frac{1}{a} \ , \ \frac{1}{aa} \ , \ \frac{1}{aaa} \ , \ \frac{1}{aaaa} \ , \ \frac{1}{aaaaa}$$

$$1 \ , \ \frac{1}{a+1} \ , \ \frac{1}{a^2} \ , \ \frac{1}{a^3} \ , \ \frac{1}{a^4} \ , \ \frac{1}{a^5}$$

§. 179.

Hieraus ergeben ſich die wichtigen Sätze:

I. Potenzen von einerlei Größe werden dividirt, wenn man den Exponenten des Diviſors von jenem des Dividends ſubtrahirt, oder, was eines iſt, mit veränderten Zeichen zu dieſen addirt.

Z. B. $\frac{aaa}{a} = aa = a^2$ | $\frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4$

oder $a^3 : a = a^{3-1} = a^2$ | $a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4$

allgemein: $a^m : a^n = a^{m-n}$

II. Da die Multiplikation der Gegenſatz der Diviſion iſt, ſo werden die Potenzen von einerlei Größe multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt;

Z. B.

Z. B. $a \times a = a^1 a^1 = a^{1+1} = a^2$

$a^2 \times a^3 = a^2 a^3 = a^{2+3} = a^5$

Allgemein $a^m \times a^n = a^m a^n = a^{m+n}$

III. Eine Zahl mit dem Exponent $0 = 1$.

Denn $x^0 = x^{m-m}$

$x^{m-m} = x^m : x^m = 1.$

alſo $x^0 = 1.$ *

* Eine Größe zur Nullwürde erheben heißt folglich, ſie durch ſich ſelbſt dividiren.

IV. Eine Größe mit negativen Exponenten iſt gleich einer Fraction, deren Zähler 1, und deren Nenner die Größe mit poſitivem Exponenten iſt.

Denn: $x^{-n} = x^{n-2n} = x^n : x^{2n}$

$$x^n : x^{2n} = \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{x^n}{x^n x^n} = \frac{1}{x^n}.$$

alſo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

§. 180.

Mittelſt des letzten Satzes kann man jede Fraction in eine Würde mit negativen Exponenten verwandeln, und den Nenner ganz entbehren. Z. B. $\frac{1}{a} = a^{-1}$. $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$.

$\frac{1}{a^3} = a^{-3}$. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Es kann eine ſolche Größe noch andere Factoren mit poſitiven oder negativen Exponenten bei ſich führen.

Z. B. $bc^{-1} = b \times \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$.

$bc^{-1}d^{-2} = \frac{b}{cd^2}$ u. ſ. w.

Im Gegentheile iſt auch $\frac{b}{a^{-1}} = a^{+1}b$

$\frac{c}{x^{-n}} = cx^n$.

Anmerkung. Hier ſieht man nun den Grund ein, warum die Dezimalen und Sexageſimalen (§. §. 124, 138) mit negativen Exponenten bezeichnet werden können.

$\frac{a}{10}$, $\frac{a}{100}$, $\frac{a}{1000}$, $\frac{a}{10,000}$, $\frac{a}{100,000}$ u. ſ. w.

$= \frac{a}{10^1}$, $\frac{a}{10^2}$, $\frac{a}{10^3}$, $\frac{a}{10^4}$, $\frac{a}{10^5}$

$= a.10^{-1}$, $a.10^{-2}$, $a.10^{-3}$, $a.10^{-4}$, $a.10^{-5}$ ..... $a\delta^{-n}$,
wobei a jede ganze Zahl, δ aber 10, und n den Exponenten vorſtellt.

Eben ſo iſt: $\frac{a.60}{60}$, $\frac{a}{60}$, $\frac{a}{60^2}$, $\frac{a}{60^3}$, $\frac{a}{60^4}$

d. i. a. Stunden, Minuten, Sekunden, Terzen, Quarten

$= a.60^0$, $a.60^{-1}$, $a.60^{-2}$, $a.60^{-3}$, $a.60^{-4}$ ... $a.\xi^{-n}$

wo a wieder jede beliebige Zahl, ξ aber 60, und n einen beliebigen Exponenten in ganzen Zahlen vorſtellt.

§. 181.

Da die (§. 179. I. II.) gegebenen Regeln allgemein ſind, ſo gelten ſie auch für die Multiplikation und Diviſion der Größen mit negativen Exponenten.

Alſo z. B. $a^{-2} \times a^{-3} = a^{-5}$ Denn $a^{-2} \times a^{-3} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^3}$

$= \frac{1}{a^5} = a^{-5}$

Allgemein $a^{-m} \times a^{-n} = a^{m+n}$

Ferner: $a^2 : a^{-5} = a^{2+5} = a^7$.

Denn $a^2 : a^{-5} = a^2 : \frac{1}{a^5} = \frac{a^2 \times a^5}{1} = a^7$.

Allgemein $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$.

§. 182.

Um Würden auf ein neues zu potenziren, darf man ſie nur ſo oft als Factor anſchreiben, als der Exponent der neuen Würde, zu der man ſie erheben ſoll, Einheiten hat, und dann multipliciren.

Z. B. um das Quadrat von x^3 zu erhalten, ſchreibe ich

$x^3 \times x^3 = x^{3 \times 2} = x^6$

oder $\left(y^{\pm n}\right)^2 = y^{\pm 2n}$. d. h. um eine Würde zu quadriren, verdopple man ihren Exponenten.

Um

Um den Kubus von x^4 zu erhalten, ſchreibe ich

$$x^4 \times x^4 \times x^4 = x^{4+4+4} = x^{4\times3} = x^{12}$$

d. h. um eine Würde zu kubiren, multiplicire man ihren Exponenten mit 3. Alſo $(x^{-n})^3 = x^{-3n}$

Hieraus ergiebt ſich die allgemeine Regel: Um Würden auf ein neues zu potenziren, multiplicire man den vorigen Exponenten durch den der neuen Würde.

Alſo: $\left.\begin{array}{l}(a^{\pm n})^2 = a^{\pm 2n} \\ (a^{\pm n})^3 = a^{\pm 3n} \\ (a^{\pm n})^4 = a^{\pm 4n}\end{array}\right\}$ allgemein: $(a^{\pm n})^m = a^{\pm mn}$.

Anmerkung. Hieraus leitet ſich eine Methode ab, die höhern Potenzen einer Zahl z. B. von 3 leichter zu finden. Um z. B. die 18te Würde der Zahl 3 zu finden, multiplicire ich den Kubus von 3 mit ſich ſelbſt, d. i. erhebe ihn zum Quadrate, ſo giebt dieß die 6te Würde von 3.

$$(3^3)^2 = 3^6 \ldots = 27 \times 27 = 729.$$

Erhebt man dieſe auf ein neues zum Kubus, ſo ergiebt ſich die 18te Würde von 3. —

Denn $(3^6)^3 = 3^{18} = (729^3) = 387420489$.

Oder um die 5te Würde der Zahl 32 zu erhalten, multiplicire ich ihr Quadrat mit ihrem Kubus:

$$(32^2) \times (32)^3 = 32^{2+3} = 32^5$$
$$= 1024 \times 32768 = 1'048.576.$$

§. 183.

Würden heißen

1) Gleichnamig, wenn ſie gleichen Exponenten, aber verſchiedene Größen haben, z. B. a^3, b^3, c^3; ungleichnamig, wenn ihre Exponenten verſchieden ſind, z. B. a^2, a^3, a^4.

2) Gleichartig, wenn ſie einerlei Größe und einerlei Exponenten haben, z. B. $a^2 + 5a^2$ oder $b^{-3} + 7b^{-3}$; ungleichartig, wenn die Größen oder die Exponenten verſchieden ſind.

* Um dieſes zu verſinnlichen, habe man die Größen a, b, c, und a ſtelle einen Zoll, b einen Fuß, c eine Ruthe vor; erhebt man ſie nun zu gleichnamigen Würden, ſo erhält man:

$a = 1$ Zoll. $a^2 = \square$ Zoll. $a^3 =$ Kubikzoll.
$b = 1$ Fuß. $b^2 = \square$ Fuß. $b^3 =$ Kubikfuß.
$c = 1$ Ruthe. $c^2 = \square$ Ruthe. $c^3 =$ Kubikruthe.

Keine von dieſen neun Größen iſt mit der andern gleichartig, außer jede mit ſich ſelbſt; denn entweder iſt darin die Größe, oder der Exponent (die Anzahl der Dimenſionen) verſchieden. Wohl aber ſind je drei und drei untereinander ſtehende Ausdrücke gleichnamig.

Anmerkung. Daß ſich gleichartige Würden im ſtrengen Sinne addiren und ſubtrahiren laſſen, und wie die vier Stammsrechnungsarten mit Würdengrößen zu behandeln ſeien, wurde ſchon im erſten Hauptſtücke gezeigt. Da aber dort nur Würden mit poſitiven Exponenten vorkamen, ſo wollen wir einige Rechnungsbeiſpiele mit Würdengrößen von negativen Exponenten herſetzen.

§. 184.

Addition und Subtraction.

1°)

$$\begin{array}{l} 3a^{-1} + \tfrac{1}{2}b^{-2} \\ 5a^{-1} - 7b^{-2} \\ \hline 8a^{-1} - 6\tfrac{1}{2}b^{-2} \end{array} \qquad \text{Probe.} \quad \begin{array}{l} 8a^{-1} - 6\tfrac{1}{2}b^{-2} \\ \underset{-}{3a^{-1}} \underset{-}{+} \tfrac{1}{2}b^{-2} \\ \hline 5a^{-1} - 7b^{-2} \end{array}$$

2°)

$$\begin{array}{rl} & 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5a^0 - 6a^{-1} + 7a^{-2} \\ - & (\;\;a^3 - 2a^2 + 3a - 4a^0 + 5a^{-1} - 6a^{-2}) \\ & \;\;- \quad\; + \quad\;\; - \quad\;\; + \quad\;\; - \quad\;\; + \\ \hline & a^3 + 5a^2 - 7a + 9a^0 - 11a^{-1} + 13a^{-2} \\ \text{Probe.} & a^3 - 2a^2 + 3a - 4a^0 + 5a^{-1} - 6a^{-2} \\ \hline & 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5a^0 - 6a^{-1} + 7a^{-2} \end{array}$$

§. 185.

§. 185.

Multiplication und Diviſion.

1°)

$$\begin{array}{lll}
a^{-1} & + b^{-1} & \\
a^{-1} & - b^{-1} & \\
\hline
a^{-2} & + a^{-1}b^{-1} & \\
 & - a^{-1}b^{-1} & - b^{-2} \\
\hline
a^{-2} & & - b^{-2}
\end{array}$$

2°)

$$\frac{81 x^{-4}}{10.000} - \frac{16}{625} y^{-4} \; \left(\frac{27 x^{-3}}{1000} + \frac{9 x^{-2} y^{-1}}{250} + \frac{6}{125} x^{-1} y^{-2} + \frac{8}{125} y^{-3}.\right.$$

$$\left(\frac{3}{10} x^{-1} - \frac{2}{5} y^{-1}\right)$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{81 x^{-4}}{10.000} & - \frac{54}{5000} x^{-3}y^{-1} & & \\
-\ \frac{81 x^{-4}}{10.000} & + \frac{54}{5000} x^{-3}y^{-1} & & \\
\hline
 & + \frac{54 x^{-3} y^{-1}}{5000} & - \frac{16}{625} y^{-4} & \\
 & \pm \frac{54 x^{-3} y^{-1}}{5000} & \mp \frac{9}{625} x^{-2}y^{-2} & \\
\hline
 & & + \frac{9}{625} x^{-2}y^{-2} & - \frac{16}{625} y^{-4} \\
 & & \pm \frac{9}{625} x^{-2}y^{-2} & \mp \frac{12 x^{-1} y^{-3}}{625} \\
\hline
 & & & + \frac{12}{625} x^{-1}y^{-3} - \frac{16 y^{-4}}{625} \\
 & & & \pm \frac{12}{625} x^{-1}y^{-3} \mp \frac{16 y^{-4}}{625} \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

§. 186.

Die negativen Exponenten haben ihren vorzüglichen Nutzen bei den unendlichen Reihen, die ſich ergeben, wenn eine einfache Größe, z. B. a durch eine complexe z. B. $a+b$ dividirt werden ſoll, obwohl der Diviſor kein Factor des Dividends iſt.

In einem ſolchen Falle ſetzt man die Diviſion ſo lange fort, als man will; wobei dann immer der wahre Quotus, wiewohl immer in verſchiedenen Formen, herauskommen muß.

Erklärungen.

1. Eine Menge von Größen, die nach einem beſtimmten Geſetze fortlaufen, heißt eine Reihe (Series).

2. Die einzelnen Größen ſind die Glieder der Reihe (Termini). Jenes Glied, worin das allgemeine Geſetz erſcheint, nach welchem ein Glied aus dem andern entſpringt, heißt das allgemeine Glied (terminus generalis).

3. Die Reihe heißt unendlich, wenn ſich nie alle Glieder derſelben darſtellen laſſen; widrigenfalls heißt ſie beſtimmt oder endlich.

4. Um bei ſolchen Reihen die Fractionen entbehren zu können, bedient man ſich mit Vortheil der negativen Exponenten.

Beiſpiele. I. $\frac{x}{x-1}$

Operation. $x \quad | \quad 1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4} \ldots \frac{x^{n}}{x-1}$

$x-1$

$- \quad +$

$+x^{0}$

$x^{0}-x^{-1}$

$- \quad +$

$x^{-1}-x^{-2}$

$- \quad +$

$x^{-2}-x^{-3}$

$- \quad +$

$x^{-3}-x^{-4}$

$- \quad +$ u. ſ. w.

II. $\frac{x}{x+1}=x^{0}-x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}+x^{-4} \ldots \pm \frac{x^{-n}}{x+1}.$

Anmer-

Anmerkung 1. Kehrt man in dem letzten Beiſpiele den Diviſor um, d. i. ſetzt: $\frac{x}{1+x}$, ſo erhält man:

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 \ldots\ldots + x^{2n-1} - x^{2n}.$$

Es ſey $x = 1$ ſo wird

$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots$ welche Reihe entweder 1, oder 0 beträgt, je nach dem ſie mit einem poſitiven oder negativen Gliede geſchloſſen wird. Ohngeachtet dieſer ſcheinbaren Unrichtigkeit wird die Reihe doch $= \frac{1}{2}$, wenn man noch den Reſt $\frac{\pm x^m}{1+x}$ dazu zählt; denn ſchließe ich mit einem poſitiven Gliede (wenn der Exponent von x gerade iſt), ſo wird $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Schließe ich mit einem negativen, ſo wird $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Anmerkung 2. Die Größe $\frac{1}{1-x}$ giebt die unendliche Reihe: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots\ldots x^n$
Setzt man nun wieder: $x = 1$; ſo wird

$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+1 \ldots\ldots$ ohne Ende; woraus die Mathematiker den Satz ableiten, daß $\frac{1}{0} = \infty$, d. i. der Ausdruck des Unendlichen ſey.

§. 187.

Als allgemeine Formeln ſolcher Diviſionen, welche ſich in unendliche Reihen auflöſen laſſen, gelten

I. $$\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} - \frac{b^3x}{a^4} + \frac{b^4x}{a^5} \ldots\ldots \frac{b^nx}{a^{n+1}}$$

$$= a^{-1}x - a^{-2}bx + a^{-3}b^2x - a^{-4}b^3x + a^{-5}b^4x \cdots \overset{-(n+1)}{a} b^n x.$$

Das allgemeine Glied iſt: $-\frac{bx^{\circ}}{a}$.

* Es ſey $a = 2$, $b = 1$, $x = 2$, ſo entſteht $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$, alſo um $\frac{1}{96}$ zu wenig. Nehme ich noch ein Glied $+ a^{-6}b^5x$, ſo wird um $\frac{1}{192}$ zu viel.

viel. — Will man aber noch weiter alſo fortfahren, ſo erhält man den Quotus immer genauer.

II. $\frac{x}{a-b} = a^{-1}x + a^{-2}bx + a^{-3}b^2x + a^{-4}b^3x \ldots\ldots a^{-n}b^{n-1}x.$

worin das allgemeine Glied $= \frac{+bx^{o}}{a} = a^{-1}bx^{o}$ iſt.

III. Die Fraction $\frac{1}{1-x-x^2}$ giebt die unendliche Reihe:

$1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10}$, worin jedes folgende Gliederpaar ein Product von dem vorhergehenden, in $-x^3$ iſt.

z. B. $(1 + x) \times -x^3 = -x^3 - x^4$

$(-x^3 - x^4) \times -x^3 = +x^6 + x^7$

$(x^6 + x^7) \times -x^3 = -x^9 - x^{10}$ u. ſ. w.

* Es ſey $x = \frac{1}{2}$, ſo erhält man

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} \ldots\ldots$$

$$= \frac{1024 + 512 - 128 - 64 + 16 + 8 - 2 - 1}{1024} = \frac{1365}{1024} = 1\,\frac{341}{1024}$$

Nun iſt dieſe Fraction nur um $\frac{1}{3072}$ kleiner, als $\frac{1}{3}$;

nemlich $\frac{1}{3} = \frac{1024}{3072}$,

und $\frac{341}{1024} = \frac{1023}{3072}$.

IV. Was beträgt die unendliche Reihe:

$\frac{x}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots\ldots$

wenn $x = \frac{1}{2}$ iſt?

Zur Uebung!

B.

Monomiſche Größen als Wurzelgrößen.

§. 188.

Wurzelgröße heißt ein Ausdruck $\sqrt[n]{x^m}$, welcher anzeigt, daß man aus einer gegebenen Größe x^m eine beſtimmte

ſtimmte Wurzel vom Grade n ziehen ſoll. — In dieſer allgemeinen Form aller Wurzelgrößen ſtellt alſo

1) n den Exponenten oder Grad der Wurzel
2) m den Exponenten oder Grad der Größe
3) x die Größe ſelbſt vor.

Um die Sache durch einzelne Fälle deutlicher einzuſehen, betrachte man folgende Größen:

$\sqrt[2]{x^m}$ oder $\sqrt{x^m}$ heißt die zweite oder Quadratwurzel aus x^m
$\sqrt[3]{x^m}$ heißt die dritte oder Kubikwurzel aus x^m
$\sqrt[4]{x^m}$ — die vierte Wurzel aus x^m
$\sqrt[5]{x^m}$ — die fünfte Wurzel aus x^m
$\sqrt[n]{x^m}$ — die nte Wurzel aus x^m.

Im Gegentheile iſt wieder

Die zweite Würde von $\sqrt{x^m}$ d. i. $\left(\sqrt{x^m}\right)^2$
— dritte — von $\sqrt[3]{x^m}$ d. i. $\left(\sqrt[3]{x^m}\right)^3$
— vierte — von $\sqrt[4]{x^m}$ d. i. $\left(\sqrt[4]{x^m}\right)^4$
— fünfte — von $\sqrt[5]{x^m}$ d. i. $\left(\sqrt[5]{x^m}\right)^5$
die nte Würde von $\sqrt[n]{x^m}$ d. i. $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n$
$= x^m$.

Man ſieht hieraus offenbar, daß

I. Die Quadratwurzel zweimal
II. Die Kubikwurzel dreimal
III. Die vierte Wurzel viermal
IV. Die nte Wurzel n mal

als Factor mit ſich ſelbſt multiplicirt werden müſſe, um die Größe x^m wieder hervorzubringen.

Anmerkung. Da die Wurzelgrößen meiſtens Irrationalzahlen ſind, ſo nennet man die Rechnung mit Wurzelgrößen auch: Rechnung mit Irrationalzahlen.

§. 189.

§. 189.

1) Wurzelgrößen, die gleiche Größen und Exponenten haben, heißen **gleichartig**, und laſſen ſich folglich addiren und ſubtrahiren, z. B. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

Denn wenn ich mir die Wurzel aus 3 als eine beſtimmte Größe z. B. β denke: ſo erhalte ich $2\beta + 5\beta = 7\beta$.

Eben ſo $1\sqrt{a}$ oder $\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$.

allgemein $a\sqrt[n]{x^m} \pm b\sqrt[n]{x^m} = (a \pm b)\sqrt[n]{x^m}$.

2) Wurzeln des nemlichen Grades aber aus verſchiedenen Größen ſind **ungleichartig**; z. B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, u. ſ. w.

allgemein $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a^{2m}}$, $\sqrt[n]{a^{3m}}$ oder $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}$, u. ſ. w.

3) Wurzeln von gleichem Grade heißt man **gleichnamig**, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ ... vom verſchiedenen Grade aber ungleichnamig, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[r]{c}$, $\sqrt[x]{y}$..

§. 190.

Wenn die Größe hinter dem Wurzelzeichen, oder auch nur ein Factor derſelben, eine Würde des nemlichen Grades iſt, den der Exponent der Wurzel anzeigt, ſo kann man die verlangte Wurzel aus der ganzen Größe, oder aus dem rationalen Factor derſelben wirklich ausziehen, und mit dem gehörigen Zeichen vor das Wurzelzeichen ſchreiben.

Z. B. $\sqrt{16} = \pm 4$. $\sqrt{a^2} = \pm a$

$\sqrt[3]{-27} = -3$. $\sqrt[3]{-b^3} = -b$.

Hat nun die Wurzelgröße einen Coefficienten, ſo muß dieſer mit der ſich ergebenden Wurzel multiplicirt werden.

Z. B. $2\sqrt{9} = \pm 2 \cdot 3 = \pm 6$.

$5\sqrt[3]{64} = 5 \cdot 4 = 20$.

Als Beiſpiele, worin blos ein Factor der Wurzel-Größe rational iſt, mögen folgende Formeln dienen:

I. $3\sqrt{8}$

I. $3\sqrt{8} = 3\sqrt{4.2} = 6\sqrt{2}$.

II. $2\sqrt{45} = 2\sqrt{9.5} = 6\sqrt{5}$.

III. $4\sqrt[3]{81} = 4\sqrt[3]{27.3} = 12\sqrt[3]{3}$.

IV. $2\sqrt[3]{-24} = 2\sqrt[3]{-8\times3} = -4\sqrt[3]{3}$.

oder $= 2\sqrt[3]{8\times-3} = 4\sqrt[3]{-3}$.

V. $2\sqrt{-847} = 2\sqrt{-7\times121} = 22\sqrt{-7}$.

VI. $\sqrt[3]{a^4b^3} = b\sqrt[3]{a^4} = ab\sqrt[3]{a}$.

Anmerkung. Bey der ſogenannten Kardans-Regel (§. §. 268 et seq.) kommen ſolche Irrationalgrößen beſtändig vor.

§. 192.

Im Gegentheile läßt ſich jeder Coëficient, oder ein einzelner Factor deſſelben, der vor dem Wurzelzeichen ſteht, als ein Factor hinter dieſes bringen, wenn man ihn zur Würde des nemlichen Grades erhebt, den der Wurzelexponent ausſpricht.

Z. B. $2\sqrt{3} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$.

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27.2} = \sqrt[3]{54}$.

$10\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{10.000\times5} = \sqrt[4]{50.000}$.

allgemein: $a^n\sqrt[m]{b^x} = \sqrt[m]{a^{mn}.b^x}$.

§. 193.

Wenn in der allgemeinen Formel der Irrationalzahlen: $\sqrt[n]{x^m}$ ... die Größe x^m poſitiv iſt, ſo läßt ſich die Wurzel in jedem Falle entweder ganz, oder doch durch Annäherung finden.

Iſt aber x^m negativ, ſo werden alle Wurzeln mit geraden Exponenten (d. i. wenn: $n = 2, 4, 6, 8, 10$ u. ſ. f.) unmögliche Zahlen (vergl. §. 177); iſt aber $n = 3, 5, 7, 9$ d. i. eine ungerade Zahl, und x ebenfalls negativ, ſo wird auch die Wurzel negativ. — Iſt endlich x^m keine

Würde

Würde von dem Grade, welchen der Wurzelexponent n anzeigt, ſo iſt $\sqrt[n]{x^m}$ eine Irrationalgröße.

Anmerkung. Wenn $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{an}}$, d. h. $x = y^n$ iſt, ſo iſt $\sqrt[n]{x^m}$ rational.

§. 194.

Da man bey Potenzirung einer Größe, z. B. a^m zum Quadrate, Kubus, Biquadrate ꝛc. zur n^{ten} Würde den Exponent der Größe durch 2, 3, 4 ꝛc. ... n multiplicirt: ſo hat man im Gegentheile, um aus der Größe A^m die Wurzel vom 2ten, 3ten, 4ten .... n^{ten} Grade zu ziehen, nichts weiter zu thun, als den Exponenten m durch 2, 3, 4 ... n zu dividiren.

Alſo läßt ſich jede Wurzelgröße auf den Ausdruck einer Würde mit gebrochenen Exponenten bringen, wenn man den Würdenexponenten durch den der Wurzel dividirt.

Alſo $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$ $\quad \sqrt[4]{a^m} = a^{\frac{m}{4}}$

$\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

So oft nun bey der Diviſion der Exponenten der Quotus eine ganze Zahl wird, ſo oft läßt ſich die Wurzel rein finden; widrigenfalls iſt die Wurzelgröße irrational.

Anmerkung. Die Größe $\sqrt{4^3}$ iſt rational, wiewohl der Wurzelexponent in 3 nicht enthalten iſt; denn 4 iſt $= 2^2$: folglich $\sqrt{4^3} = \sqrt{2^6}$. (§. praec. Anm.)

§. 195.

Man kann nun nach Belieben eine Wurzelgröße, ihres Werthes unbeſchadet, auf einen andern Ausdruck bringen, wenn man die beiden Exponenten, den der Wurzel und den ihrer Größe, mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt, z. B. $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4}$.

Denn

Denn dieſe Ausdrücke ſind ſo viel als: $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{3}{6}}$, $a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Man laſſe $a = 4$ ſeyn; ſo iſt: $\sqrt{4} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2.$$
$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2.$$
$$\sqrt[8]{a^4} = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2.$$

Aus gleichem Grunde läßt ſich jede Würdengröße, deren Exponent eine ganze Zahl iſt, in eine Wurzelgröße, das iſt, in eine Würde umſchaffen, welche zum Exponenten einen uneigentlichen Bruch hat.

Z. B. $a = \sqrt{a^2}$ oder $a^{\frac{2}{2}}$ oder $a = \sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}$
$a^2 = \sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}}$.

Z. B. Es ſey $a = 3$
ſo iſt $\sqrt{a^2} = \sqrt{9} = 3$. und $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{27} = 3$. u. ſ. w.

Hieraus gehen nun folgende Sätze hervor.

I. Die Wurzelgrößen laſſen ſich in jedem Falle in Würden mit gebrochenen Exponenten verwandeln; und wechſelſeitig.

II. Die Wurzelgrößen ſind wahre Würden; alſo gelten bei ihnen die nemlichen Regeln, welche bisher für die Würden gegeben wurden.

III. Mit den Wurzelgrößen laſſen ſich die nemlichen Operationen vornehmen, wie mit den eigentlichen Würden, d. h. man kann ſie addiren, ſubtrahiren, multipliciren, dividiren, zu neuen Würden erheben, oder aus ihnen neue Wurzeln ausziehen.

§. 196.

Aufgabe. Wurzelgrößen zu addiren oder zu ſubtrahiren.

Auf-

Auflöſung. Man betrachte ſie als Würden mit gebrochenen Exponenten, und behandle ſie wie eigentliche Würden.

Bey gleichartigen Wurzelgrößen läßt ſich die Addition und Subtraction wirklich verrichten, bei ungleichartigen blos anzeigen.

Beyſpiele. I.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{a} - 4\sqrt[3]{b} - 7\sqrt{c} \\ \underline{4\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} - 9\sqrt{d}.} \\ 7\sqrt{a} - \sqrt[3]{b} - 7\sqrt{c} - 9\sqrt{d} \end{array}$$

Probe.

$$\begin{array}{l} 7\sqrt{a} - \sqrt[3]{b} - 7\sqrt{c} - 9\sqrt{d} \\ \underline{\overset{4\sqrt{a}}{-} \overset{+}{-} 3\sqrt[3]{b} - \quad \overset{-}{+} 9\sqrt{d}.} \\ 3\sqrt{a} - 4\sqrt[3]{b} - 7\sqrt{c}. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 8\sqrt[m]{x} - 10\sqrt[n]{xy} + \sqrt{x^m} \\ \underline{-(\underset{-}{7\sqrt[m]{x}} \underset{-}{+} 2\sqrt[n]{xy} \underset{+}{-} 3\sqrt[m]{x^2})} \\ \sqrt[m]{x} - 12\sqrt[n]{xy} + \sqrt{x^m} + 3\sqrt[m]{x^2}. \end{array}$$

* Dieſe Rechnungen laſſen ſich nemlich auch alſo darſtellen.

I. $\left(3a^{\frac{1}{2}} - 4b^{\frac{1}{3}} - 7c^{\frac{1}{2}}\right) + \left(4a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{3}} - 9d^{\frac{1}{2}}\right)$

II. $\left(8x^{\frac{1}{m}} - 10(xy)^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{m}{2}}\right) - \left(7x^{\frac{1}{m}} + 2(xy)^{\frac{1}{n}} - 3x^{\frac{2}{m}}.\right)$

Die erſte Reihe giebt: $7a^{\frac{1}{2}} - 4b^{\frac{1}{3}} - 7c^{\frac{1}{2}} - 9d^{\frac{1}{2}}$.

Die zweyte: $x^{\frac{1}{m}} - 12(xy)^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{m}{2}} + 3x^{\frac{2}{m}}$.

§. 197.

Aufgabe. Ungleichnamige Wurzelgrößen gleichnamig zu machen. Z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{b}$.

Auflöſung.

I. Man verwandle die Wurzelgröße in eine Würde mit gebrochenem Exponenten $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$.

II. Brin-

II. Bringe dieſe Exponenten auf gleichen Nenner:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3} = \frac{3, 2}{6}.$$

$$a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}} \ldots b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{6}}.$$

III. Nun ſetze man den gemeinſchaftlichen Nenner als Exponenten in das Wurzelzeichen, und laſſe die Zähler als Exponenten der Größen ſtehen.

$$a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}$$

$$b^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{b^2}.$$

Z. B. Man mache gleichnamig: $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[n]{y^m}$.

Operation: $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \\ \sqrt[n]{y^m} = y^{\frac{m}{n}}\end{array}\right\} \frac{n}{m}, \frac{m}{n} = \frac{n^2, m^2}{mn}$$

alſo $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n^2}{mn}}$ und $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{m^2}{mn}}$.

folglich $x^{\frac{n^2}{mn}} = \sqrt[mn]{x^{n^2}}$

und $y^{\frac{m^2}{mn}} = \sqrt[mn]{y^{m^2}}$.

§. 198.

Aufgabe. Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren.

Auflöſung. I. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, ſo multiplicire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.

II. Sind ſie ungleichnamig, ſo mache man ſie gleichnamig, und verfahre wie vorher.

Z. B. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Beweis. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$. d. i. ſo wie es erlaubt iſt, den zu mehreren Größen gemeinſchaftlich gehörigen Exponenten, nach Parentheſen, einmal anzuſchreiben; eben ſo kann man auch das zu mehrern Factorn gehörige Wurzelzeichen vom nemlichen Grade einmal ſetzen: alſo $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d} = \sqrt{abcd}$.

Bey-

Beyſpiele. 1) $5\sqrt{p} \times 3\sqrt{q} \times 2\sqrt{r} = 30\sqrt{pqr}$.

2) $2\sqrt{a} \times 3\sqrt[3]{b} \times 4\sqrt[4]{c} = 2a^{\frac{1}{2}} \times 3b^{\frac{1}{3}} \times 4c^{\frac{1}{4}}$

$= 2a^{\frac{6}{12}} \times 3b^{\frac{4}{12}} \times 4c^{\frac{3}{12}} = 2\sqrt[12]{a^6} \times 3\sqrt[12]{b^4} \times 4\sqrt[12]{c^3} =$

$24\sqrt[12]{a^6 b^4 c^3}$.

3) $a\sqrt[m]{x^n} \times b\sqrt[n]{y^m} = ax^{\frac{n}{m}} \times by^{\frac{m}{n}}$

$= ax^{\frac{n^2}{mn}} \times b.y^{\frac{m^2}{mn}} = a\sqrt[mn]{x^{n^2}} \times b\sqrt[mn]{y^{m^2}}$

$= ab\sqrt[mn]{x^{n^2} y^{m^2}}$.

§. 199.

Aufgabe. Wurzelgrößen durcheinander zu dividiren.

Auflöſung. I. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, ſo dividire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen durcheinander.

II. Sind ſie aber ungleichnamig, ſo mache man ſie gleichnamig, und verfahre wie vorher.

Z. B. $20\sqrt{a^3} : 5\sqrt{a} = \frac{20\sqrt{a^3}}{5\sqrt{a}} = 4\sqrt{\frac{a^3}{a}} = 4\sqrt{a^2} = 4a$.

Das ganze Verfahren ergiebt ſich aus dem Begriffe der Diviſion als Gegenſatz der Multiplication; und anſtatt zu ſagen:

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d}}$, ſagt man kürzer $\sqrt{\frac{a}{d}}$; ſo wie anſtatt $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$ kürzer $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Beyſpiele. 1) $24\sqrt{c} : 12\sqrt[3]{cd} = 24c^{\frac{1}{2}} : 12(cd)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{24c^{\frac{3}{6}}}{12(cd)^{\frac{2}{6}}} = \frac{24}{12}\left(\frac{c^3}{(cd)^2}\right)^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{\frac{c}{d^2}}$

2) $a\sqrt[m]{}$

2) $a\sqrt[m]{xy} : b\sqrt[n]{x} = a\,(xy)^{\frac{1}{m}} : bx^{\frac{1}{n}}$

$$= \frac{a}{b}\,\frac{(xy)^{\frac{n}{mn}}}{x^{\frac{m}{mn}}} = \frac{a}{b}\times\left(\frac{(xy)^n}{x^m}\right)^{\frac{1}{mn}} = \frac{a}{b}\sqrt[mn]{x^{n-m}\cdot y^n}.$$

§. 200.

Aufgabe. Wurzelgrößen zu potenziren.

Auflöſung. Man erhebe die Größe hinter dem Wurzelzeichen zur verlangten Würde, d. i., multiplicire ihren Exponenten durch den der neuen Würde, z. B.

$(\sqrt{m})^2 = \sqrt{m^2} = m$. Denn $(\sqrt{m})^2 = (m^{\frac{1}{2}})^2 = m^{\frac{2}{2}} = m^1 = m$.

Beyſpiele. I. $(\sqrt[3]{x^2})^2 = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} = x^{1\frac{1}{3}} = x\times x^{\frac{1}{3}}$
$= x\sqrt[3]{x}$.

So kann man in allen Fällen, wo der Exponent der Würde größer iſt, als der der Wurzel, die Diviſion verrichten, und den rationalen Theil vor das Wurzelzeichen ſetzen, den irrationalen aber, wenn einer bleibt, hinter daſſelbe.

* Man ſetze in dem letzten Beyſpiele $\sqrt[3]{x^4}$, es ſey $x=5$,
ſo wird $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{625} = 8.549879\cdots$
und $x\sqrt[3]{x} = 5\sqrt[3]{5} = 5\times\overline{1.7099759\cdot} = 8.5498795\cdots$

** Aus gleichem Grunde iſt $\sqrt{y^5} = \sqrt{y^4\cdot y} = y^2\sqrt{y}$.
Es ſey $y = 2$
ſo wird $\sqrt{y^5} = \sqrt{32} = 5.6568544\cdots\cdots$
$y^2\sqrt{y} = 4\sqrt{2} = 4\times\overline{1.4142136} = 5.6568544\cdots\cdots$

II. $(\sqrt[m]{x^n})^\pi = \sqrt[m]{x^{n\pi}}$.

§. 201.

Aufgabe. Aus Wurzelgrößen neue Wurzeln auszuziehen.

Aufloͤſung. Man multiplicire die Wurzelexponenten durch einander; denn dieſes heißt eben ſo viel, als die Wurzelgroͤße in eine Wuͤrde mit gebrochenen Exponenten verwandeln, und dieſen durch den neuen Wurzelexponenten dividiren. (vergl. §. 194.)

Z. B. $\sqrt{\ }$ aus $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a}$; denn $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

und $\sqrt{\ }$ aus $\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b}$. — $(b^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{b}$.

* Es ſey $a = 625$, folglich $\sqrt{625} = 25$.

und wieder $\sqrt{25} = 5$. oder $\sqrt[4]{5.5.5.5.} = 5$.

Um alſo die 4te Wurzel aus einer Groͤße zu ziehen, ſuche man zuerſt die Quadratwurzel, und ziehe aus dieſe noch einmal die zweite Wurzel.

** Es ſey $b = 4096$, ſo erhaͤlt man

$\sqrt[6]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Beyſpiele.

I. $\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a})} = + \sqrt[12]{a}$.

* Im Falle bey der erſten Wurzelgroͤße ein Factor ſtuͤnde, muͤßte man damit die ganze Wurzelgroͤße noch multipliciren. Steht aber ein Factor bey der zweiten Wurzelgroͤße, ſo ſchaft man ihn kuͤrzer hinter die Wurzel.

II. $\frac{1}{3}\sqrt{(\sqrt[3]{c})} = \frac{1}{3}\sqrt[6]{c}$.

III. $\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{x})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^n x}} = \sqrt[mn]{a^n x}$.

* Es ſey $m = 2.\ n = 3.\ a = 2.\ x = 8$; ſo erhaͤlt man

$\sqrt{(2\sqrt[3]{8})} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$.

oder auch $\sqrt{\overline{2\sqrt[3]{8}}} = \sqrt{2.2} = 2$.

Anmerkung. Da die zuſammengeſetzten Wurzelgroͤßen oder Irrationalzahlen in der Lehre von den hoͤhern Gleichungen durchaus vorkommen, ſo ſchien es nothwendig, die Rechnungsarten mit ſolchen Groͤßen eigens — aber ganz kurz zu behandeln.

C.

Stamm-Rechnungsarten mit Irrationalzahlen.

§. 202.

Aufgabe. Irrationalgrößen zu addiren und ſubtrahiren.

Auflöſung. I. Man ſchreibe Gleichartiges unter Gleichartiges.

II. Addire oder ſubtrahire die Coefficienten gleichartiger Wurzelgrößen, und befolge übrigens alle Regeln, die bei der Addition und Subtraction der Buchſtabengrößen gegeben worden.

III. Manchmal läßt ſich die Gleichartigkeit zweier Größen durch Ausziehung der Wurzel aus einem rationalen Factor herſtellen.

Beyſpiele. I.

$$\begin{array}{r} 5 + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \\ 12 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \\ \hline 17 - \sqrt{2} - 4\sqrt{3}. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{lrrrr} & 3\sqrt{5} & - \sqrt{3} & + 3\sqrt{2} & - \sqrt{-1} \\ & 2\sqrt{5} & + \sqrt{27} & - \sqrt{8} & + \sqrt{-4} \\ \hline \text{gleichartig} & 3\sqrt{5} & - \sqrt{3} & + 3\sqrt{2} & - \sqrt{-1} \\ \text{gemacht:} & 2\sqrt{5} & + 3\sqrt{3} & - 2\sqrt{2} & + 2\sqrt{-1} \\ \hline \text{Summe} & 5\sqrt{5} & + 2\sqrt{3} & + \sqrt{2} & + \sqrt{-1} \\ \text{Probe.} & 2\sqrt{5} & + 3\sqrt{3} & - 2\sqrt{2} & + 2\sqrt{-1} \\ & - & - & + & - \\ \hline & 3\sqrt{5} & - \sqrt{3} & + 3\sqrt{2} & - \sqrt{-1}. \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{lr} & 3\sqrt{7} - \sqrt{-2} \\ & -(2\sqrt{7} \pm \sqrt{-8}) \\ \hline & \sqrt{7} - 3\sqrt{-2} \\ \text{Probe} & + 2\sqrt{7} + \sqrt{-8} \\ \hline & 3\sqrt{7} - \sqrt{-2}. \end{array}$$

§. 203.

Aufgabe. Irrationalgrößen durcheinander zu multipliciren.

Auflöſung. I. Man multiplicire jedes Glied des Multiplikands durch jedes des Multiplikators.

II. Beſtimme die einzelnen Producte nach §. 198, und addire ſie nach den Regeln der Addition.

Beyſpiele.

$$\begin{array}{l} \text{I.}\quad 1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{-1} \\ \quad\; 1 - \sqrt{3} \\ \hline 1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{-1} \\ \quad - \sqrt{3} - 2\sqrt{9} + 3\sqrt{-3} \\ \hline 1 + \sqrt{3} - 3\sqrt{-1} + 3\sqrt{-3} - 2\sqrt{9}\,(= -6) \end{array}$$

Produkt: $+ \sqrt{3} - 3\sqrt{-1} + 3\sqrt{-3}. - 5.$

II. Welches iſt das Quadrat, und welches der Kubus von $2 + \sqrt{-3}$.

Auflöſung.

$$\begin{array}{l} 2 + \sqrt{-3} \\ 2 + \sqrt{-3} \\ \hline 4 + 2\sqrt{-3} \\ \quad + 2\sqrt{-3} + -3 \\ \hline 1 + 4\sqrt{-3}.\ \text{Quadrat} = (2+\sqrt{-3})^2 \\ 2 + \sqrt{-3} \\ \hline 2 + 8\sqrt{-3} \\ \quad + \sqrt{-3} + 4.-3 \\ \hline 9\sqrt{-3} - 10\ \text{Kubus} = (2+\sqrt{-3})^3. \end{array}$$

III. Welches iſt der Kubus von $\frac{-3 + 3\sqrt{-3}}{2}$?

Auflöſung. Man kubire zuerſt den Zähler, dann den Nenner.

$$\begin{array}{l|l} -3 - 3\sqrt{-3} & -18 + 18\sqrt{-3} \\ -3 - 3\sqrt{-3} & -3 - 3\sqrt{-3} \\ \hline +9 + 9\sqrt{-3} & +54 - 54\sqrt{-3} \\ \quad + 9\sqrt{-3} + 9.-3 & \quad +54\sqrt{-3} - 54 \times -3 \\ \hline -18 + 18\sqrt{-3}\ \text{Quadrat.} & 216\ \text{Kubus v.}\ (-3 - 3\sqrt{-3}) \end{array}$$

Der Nenner 2 giebt zum Kubus 8, folglich:

$$\left(\frac{-3 - 3\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \frac{216}{8} = 27.$$

Anmer-

Anmerkung. Wie man aus ſolchen irrationalen Binomien die Quadrat- oder Kubikwurzel finden könne, kommt ſpäter bey den höhern Gleichungen vor.

§. 204.

Aufgabe. Irrationalzahlen durcheinander zu dividiren.

Auflöſung. I. Man bringe die Wurzelgrößen im Diviſor und Dividend auf die kleinſte Form (durch Ausziehung der Wurzel, oder eine andere Abkürzung, wo es möglich iſt), und ſchreibe die Diviſion in Geſtalt einer Fraction an.

II. Um den Nenner rational zu machen, multiplicire man Zähler und Nenner mit einer Größe, welche ſich zum Diviſor oder Nenner verhält, wie Summe und Differenz.

Beyſpiel.

I. $(24+2\sqrt{2}-15\sqrt{4}):(6+5\sqrt{2})$.

II. $\dfrac{-57}{2\sqrt{2}+5\sqrt{3}}$

III. $\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Operation.

I. $$\frac{24+2\sqrt{2}-15\sqrt{4}}{6+5\sqrt{2}}=\frac{-6+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}$$

$$-\frac{6+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}\times\frac{6-5\sqrt{2}}{6-5\sqrt{2}}=\frac{-56+42\sqrt{2}}{-14}=4-3\sqrt{2}.$$

II. $$\frac{-57}{3\sqrt{2}-5\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}=\frac{-171\sqrt{2}+285\sqrt{3}}{-57}$$
$$=3\sqrt{2}-5\sqrt{3}.$$

III. $$\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$$

3√10

$$\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{15\sqrt{10}+27\sqrt{3}+33\sqrt{2}+12\sqrt{15}}{x}$$

Anmerkung. Wenn der Nenner ohnehin rational iſt, bedarf es weiter nichts, als daß man damit alle Glieder des Dividends, wo möglich, dividire oder verkleinere.

Z. B. $\frac{4\sqrt{3}-8\sqrt{-1}}{6}=\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{-1}}{3}$

und $\frac{16\sqrt{-2}+24\sqrt{2}}{8}=2\sqrt{-2}+3\sqrt{2}$.

Zweyter Artikel.

Würdenlehre binomiſcher Größen.

A. Binomien als zu potenzirende Größen.

§. 205.

Der Ausdruck des allgemeinen Geſetzes, das man bemerkt, wenn man eine binomiſche Größe, z. B. $a \pm b$, zu höhern Potenzen erhebt, heißt der Binomiſche Lehrſatz, (Theorema binomiale) für deſſen Erfinder Newton gehalten wird.

Dieſer Lehrſatz gewährt zugleich eine allgemeine Norm, wie jedes Binomium zu was immer für eine Würde erhoben, oder wie daraus jede beliebige Wurzel gezogen werden könne.

Man habe das Binomium $(a+b)^1$, oder $a+b$; davon werden die höhern Würden alſo gefunden:

$$\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a + b \\
& \underline{a + b} \\
& a^2 + ab \\
& \quad + ab + b^2 \\
(a+b)^2 = & \overline{a^2 + 2ab + b^2} \\
& \underline{a + b} \\
& a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
& \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
(a+b)^3 = & \overline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \\
& \underline{a + b} \\
& a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
& \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
(a+b)^4 = & \overline{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4} \\
(a+b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 = & a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{array}$$

Die nemlichen Potenzen des Binomiums $(a-b)$ ſind

$$\begin{array}{rl}
(a-b)^1 = & a - b \\
(a-b)^2 = & a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)^3 = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a-b)^4 = & a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
(a-b)^5 = & a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \\
(a-b)^6 = & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6
\end{array}$$

Anmerkungen.

1. Die Potenzen des Binomiums $(a-b)$ unterſcheiden ſich von jenen des erſten $(a+b)$ nur durch die Zeichen in einigen Gliedern. Es bekommen nemlich alle ungeraden Potenzen von $-b$ das Zeichen $-$, alle geraden aber behalten $+$. (vergl. §. 177.)

2. In jedem Gliede, worin nur ein Theil des Binomiums ausdrücklich ſteht, läßt ſich der andere Theil mit der Nullwürde, ſo wie auch der Exponent und Coefficient 1 hinzudenken.

Die 5te Würde von $(a \pm b)$ kann alſo auch auf folgende Art dargeſtellt werden.

$$(a \pm b)^5 = 1a^5b^0 \pm 5a^4b^1 + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5a^1b^4 \pm 1a^0b^5.$$

Folge-

Folgeſätze.

I. Jedes Glied dieſer Potenzen iſt ein Produkt aus drei Factoren, nemlich einer Potenz von a, einer Potenz von b, und einem Coefficienten.

II. Jede Potenz des Binomiums enthält ein Glied mehr, als ihr Exponent Einheiten hat; es läßt ſich alſo ſchließen, daß $(a \pm b)^m$ m + 1 Glieder geben müſſe.

III. Die Summe der Exponenten von den beiden Theilen des Binomiums (a und b) giebt in jedem Gliede den Grad der verlangten Würde m; das heißt: in jedem Gliede des Binomiums $(a \pm b)^m$ kommen m Buchſtaben vor.

§. 206.

a) Geſetze der Exponenten für den erſten Theil des Binomiums.

Der Exponent des erſten Theiles (a) iſt im erſten Gliede der Exponent der gegebenen Würde ſelbſt, oder = m.

Dieſer Exponent nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede, (wenn die Reihe endlich iſt) zu Null wird.

Allgemein gehen folglich in dem Binomium $(a \pm b)^m$ die Exponenten des erſten Theiles a, alſo fort:

$$a^m, \; a^{m-1}, \; a^{m-2}, \; a^{m-3}, \; a^{m-4}, \; a^{m-5}.$$

Iſt nun m = 1 ſo wird der Exponent von a im zweiten
m = 2 — — — im dritten
m = 3 — — — im vierten
m = 4 — — — im fünften
Gliede zu Null, wie dieſes §. 205 ſichtbar iſt.

Folgeſatz. Iſt m eine Fraction, oder eine negative Größe, ſo kann der Exponent von a niemals zu Null werden,

den, d. h. das letzte Glied der Reihe kann niemals gefunden werden, ſie iſt alſo unendlich.

Z. B. Es ſey $m = \frac{3}{2}$, ſo erhält man:

$a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{3}{2}}, a^{-\frac{5}{2}}, a^{-\frac{7}{2}} \ldots\ldots$:

Oder es ſey $m = -2$, ſo ergiebt ſich für a

$a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, a^{-6}, a^{-7}$ u. ſ. w.

§. 207.

b) Geſetze der Exponenten für den zweiten Theil des Binomiums.

Der Exponent des zweiten Theiles (b) iſt im erſten Gliede = 0, und wächſt in jedem folgenden Gliede um 1, bis er endlich im letzten Gliede (bei einer endlichen Reihe) dem Exponenten (m) der gegebenen Würde gleich wird.

Alſo ſind die Exponenten des Theiles b im Binomium $(a \pm b)^m$ folgende: $b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5 \ldots\ldots b^m$.

Iſt nun m eine ganze Zahl, z. B. 2, 3, 4, 5, ſo ſteht der höchſte Exponent von b im dritten, vierten, fünften, ſechſten Gliede, d. i. die Reihe wird drei- vier- fünf- ſechsgliedrig, wie aus den fünf erſten Potenzen §. praec. zu erſehen iſt.

Iſt aber m eine Fraction oder eine negative Größe, ſo läßt ſich das letzte Glied nicht finden, folglich iſt die Reihe unendlich. — Es ſey $m = \frac{3}{2}$, ſo ſind die Potenzen von b: $b^0, b^1, b^2, b^3, b^4 \ldots\ldots\ldots$ d. h. ſie entfernen ſich immer weiter von $\frac{3}{2}$. So verhält es ſich auch, wenn m eine negative Größe vorſtellt.

Anmerkung. Stellt man nun die Exponenten von a und b zuſammen: $a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-n}$

$b^0, b^1, b^2, b^3, b^{0+n}$

ſo ſieht man, daß die Summe der Exponenten immer = m ſey.

§. 208.

§. 208.

c) Geſetze der Coefficienten im Binomium.

Betrachtet man folgende Tabelle, welche die Coefficienten der vierzehn erſten Würden von $(a+b)^m$ enthält:

1. 1.
1. 2. 1.
1. 3. 3. 1.
1. 4. 6. 4. 1.
1. 5. 10. 10. 5. 1.
1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.
1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1.
1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1.
1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1.
1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1.
1. 11. 55. 165. 330. 462. 462. 330. 165. 55. 11. 1.
1. 12. 66. 220. 495. 792. 924. 792. 495. 220. 66. 12. 1.
1. 13. 78. 286. 715. 1287. 1716. 1716. 1287. 715. 286. 78. 13. 1.
1. 14. 91. 364. 1001. 2002. 3003. 3432. 3003. 2002. 1001. 364. 91. 14. 1

ſo ergeben ſich folgende Reſultate.

I. Die Coefficienten ſteigen vom Anfange bis in die Mitte, nehmen aber hierauf in der nemlichen Ordnung wieder ab. Bei den geraden ſteht der größte in der Mitte, bei den ungeraden Potenzen aber ſind zwei mittlere, welche die größten und gleich ſind.

II. Die Summe der Coefficienten, einer endlichen Reihe, giebt für jede Potenz die gleiche Würde von 2. Denn man ſetze $a=1$ und $b=1$; ſo wird $a+b=2$, d. i. jedes Glied, außer den Coefficienten wird 1, wobei man alſo nur die Coefficienten zu addiren hat.

Erſte Potenz $1+1 = 2 = 2^1$
Zweite — $1+2+1 = 4 = 2^2$
Dritte — $1+3+3+1 = 8 = 2^3$
Vierte — $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$

folglich auch $(1+1)^{12} = 2^{12} = 4096$. u. ſ. w.

III. Die Coefficienten der vier erſten Würden laſſen ſich auch alſo darſtellen.

$(a+b)$

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1}ab + \frac{2.1}{1.2}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3.2}{1.2}ab^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4.3}{1.2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}b^4.$$

IV. Dieſe Betrachtung führt uns nun auf den wichtigen Satz, welcher das Hauptgeſetz für die Coefficienten jedes Binomiums enthält.

Der Coefficient des erſten Gliedes iſt 1. Die Coefficienten der übrigen Glieder ſind ein Product aus den Exponenten von a in allen vorhergehenden Gliedern, getheilt durch das Produkt aus ſo vielen in natürlicher Ordnung fortlaufenden Zahlen, von 1 angefangen, als Glieder vorangehen.

Beweis dieſes Satzes für den Fall, daß der Exponent des Binomiums eine poſitive ganze Zahl iſt.

1°) Es ſey in dem Binomium $(a+b)^\mu$ der Exponent $\mu=4$, und das Theorem für dieſe Potenz erwieſen, d. i. $(a+b)^\mu =$

$$a^\mu + \frac{\mu}{1}a^{\mu-1}b + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}a^{\mu-2}b^2 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}a^{\mu-3}b^3$$
$$+ \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4}a^{\mu-4}b^4.$$

2°) Nun multiplicire man dieſe Reihe durch a+b.

Das Produkt aus dem erſten Theile a iſt =

$$a^{\mu+1} + \frac{\mu}{1}a^\mu b + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}a^{\mu-1}b^2 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}a^{\mu-2}b^3$$
$$+ \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4}a^{\mu-3}b^4.$$

Das Produkt aus dem zweiten Theile b =

$$a^\mu b + \frac{\mu}{1}a^{\mu-1}b^2 + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}a^{\mu-2}b^3 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}a^{\mu-3}b^4$$
$$+ \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4}a^{\mu-4}b^5.$$

Anmer.

Anmerkung. Um die folgende Operation deutlicher zu machen, mögen folgende Formeln da ſtehen:

a) $1 + \frac{\alpha}{1} = \frac{\alpha + 1}{1}$.

b) $\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha.\beta}{1.2} = \frac{2\alpha + \alpha.\beta}{1.\ 2.} = \frac{\alpha}{1} \times \left(\frac{\beta}{2} + 1\right)$.

c) $\frac{\alpha.\beta}{1.2.} + \frac{\alpha.\beta.\gamma}{1.2.3} = \frac{3\alpha.\beta + \alpha.\beta.\gamma}{1.\ 2.\ 3.} = \frac{\alpha.\beta}{1.2} \times \left(\frac{\gamma}{3} + 1\right)$.

d) $\frac{\alpha.\beta.\gamma}{1.2.3} + \frac{\alpha.\beta.\gamma.\delta}{1.2.3.4} = \frac{4\alpha.\beta.\gamma + \alpha.\beta.\gamma.\delta}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{1.2.3} \times \left(\frac{\delta}{4} + 1\right)$.

Es iſt aber: $\frac{\beta}{2} + 1 = \frac{\beta + 2}{2}$.

$\frac{\gamma}{3} + 1 = \frac{\gamma + 3}{3}$ und $\frac{\delta}{4} + 1 = \frac{\delta + 4}{4}$.

3°) Schreibt man nun die gleichartigen Glieder beider Reihen untereinander, und addirt ſie, ſo erhält man:

Erſtes Glied. $a^{\mu+1}$.

Zweites. $a^{\mu}b + \frac{\mu}{1}a^{\mu}b = \frac{\mu+1}{1}.a^{\mu}b$.

Drittes. $\frac{\mu}{1}a^{\mu-1}b^2 + \frac{\mu.\mu-1}{1.\ 2}.a^{\mu-1}b^2$

$= \mu \times \frac{\mu-1}{2} + 1 \times a^{\mu-1}b^2 = \frac{\mu+1.\mu}{1.2}a^{\mu-1}b^2$.

Viertes. $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}.a^{\mu-2}b^3 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{\mu-2}b^3$

$= \frac{\mu.\mu-1}{1.\ 2.} \times \frac{\mu-2}{3} + 1 \times a^{\mu-2}b^3 = \frac{\mu+1.\mu.\mu-2}{1.2.3.}a^{\mu-2}b^3$.

Fünftes. $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{\mu-3}b^4 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}a^{\mu-3}b^4$

$= \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.\ 2.\ 3.} \times \frac{\mu-3}{4} + 1 \times a^{\mu-3}b^4 = \frac{\mu+1.\mu.\mu-1.\mu-2}{1.\ 2.\ 3\ 4.}a^{\mu-3}b^4$.

Sechſtes. $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{\mu-4}b^5 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{\mu-4}b^5$

$= \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \times \frac{\mu-4}{5} + 1 \times a^{\mu-4}b^5 = \frac{\mu+1.\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{\mu-4}b^5$.

4°) Es

4°) Es iſt aber $(a+b)^{\mu} \times (a+b) = (a+b)^{\mu+1}$.

Alſo $(a+b)^{\mu+1} = a^{\mu+1} + \frac{\mu+1}{1} a^{\mu} b + \frac{\mu+1.\mu}{1.2} a^{\mu-1} b^2$

$$+ \frac{\mu+1.\mu.\mu-1}{1.2.3} a^{\mu-2} b^3 + \frac{\mu+1.\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3.4} a^{\mu-3} b^4$$

$$+ \frac{\mu+1.\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4.5} a^{\mu-4} b^5.$$

5°) Hieraus ergeben ſich nun folgende Schlüſſe:

a) Da das Binomium $(a+b)^{\mu}$ (wenn $\mu = 4$) fünf, d. i. $\mu + 1$ Glieder; das Binomium $(a+b)^{\mu+1}$ aber ſechs, d. i. $\mu + 2$ Glieder gab, ſo folgt, daß wenn im allgemeinen m der Exponent, und eine ganze Zahl iſt, die Dignität des Binomiums m + 1 Glieder haben muß.

b) Die Exponenten von a fallen immer, und werden im letzten Gliede = 0. Die Exponenten von b ſteigen von 0 bis $\mu+1$; beide ſind alſo dem Geſetze gemäß.

c) Die Coefficienten, vom zweiten Gliede angefangen, ſind Produkte aus den Exponenten von a in den vorhergehenden Gliedern, getheilt durch die Produkte aus ſo vielen in natürlicher Ordnung fortlaufenden Zahlen, von 1 angefangen, als Glieder vorangehen; folglich ſind auch ſie ganz dem Geſetze gemäß.

Da nun alle Theile des Binomiſchen Lehrſatzes geſetzmäßig ſind, ſo iſt das Theorem ſelbſt geſetzmäßig, folglich für die Potenz 5 erwieſen. Auf demſelben Weg ergiebt ſich aus der geſetzmäßigen 5ten Potenz die geſetzmäßige ſechste, aus dieſer die ſiebente u. ſ. w.

Wenn alſo $\mu+1, 2, 3 \ldots + x = m$, eine ganze Zahl und poſitiv iſt, ſo iſt der Newtoniſche Lehrſatz für dieſen Fall mit mathematiſcher Strenge dargethan.

§. 239.

Unterſucht und zergliedert man die Binomien, deren Exponent eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo findet man, daß

ſie

ſie ſich ganz auf die Geſetze der Kombination und Permutation (§. §. 145, 147) gründen.

Z. B. Das Binomium $(a+b)^4$ läßt ſich auch ſo darſtellen: $(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)$.

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$= aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$$

= aaaa +	aaab +	aabb +	abbb +	bbbb
	aaba	bbaa	babb	
	abaa	abab	bbab	
	baaa	baba	bbba	
		baab		
		abba		

d. i. In jedem Gliede des Binomiums $(a+b)^4$ kommen vier Buchſtaben, und zwar jedesmal andere vor. Die möglichen Permutationen der Buchſtaben in einem jeden Gliede zeigt der Coefficient an.

Deßwegen iſt von a^4 und b^4 der Coefficient 1, weil ſich aaaa, ſo wie bbbb, nur einmal verſetzen läßt.

Von a^3b und ab^3 iſt der Coefficient 4, weil ſich dieſe Buchſtaben $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$ mal . . .
von $a^2\,b^2$ iſt der Coefficient 6, weil ſich dieſe Buchſtaben $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$ mal verſetzen laſſen.

§. 210.

Allgemein habe man das Binomium $(a+b)^m$, welches $m+1$ Glieder geben muß, in derer jedem m Buchſtaben vorkommen. Dafür erhält man, was die Zahl der zu verbindenden Buchſtaben, oder ihrer Exponenten betrifft, folgende Combinationen:

$$\times\begin{cases} a^m, & a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, a^{m-5} \ldots\ldots a^{m-m} \\ b^0, & b^1, b^2, b^3, b^4, b^5 \ldots\ldots b^m \end{cases}$$

* Die

* Die arithmetiſche Progreſſionslehre beweiſt den Satz, daß, wenn das erſte Glied $= a$, das letzte Glied z, die Differenz d, und die Gliederanzahl n iſt,

$$n = \frac{z - a}{d} + 1 \text{ ſey.}$$

Legt man nun die Exponenten von b zu Grunde, ſo wird $a = 0.$ $d = 1.$ $z = m$

$$\text{folglich } n = \frac{m - 0}{1} + 1 = m + 1.$$

Die Coefficienten für dieſe Glieder beſtimmen ſich nach den Regeln der Permutation.

Coefficient von

$$a^m = \frac{1.2.3\ldots.m}{1.2.3\ldots.m} = 1$$

$$a^{m-1}b = \frac{1.2.3\ldots.m-1.m}{1.2.3\ldots.m-1.1} = \frac{m.m-1}{1.m-1} = \frac{m}{1}$$

$$a^{m-2}b^2 = \frac{1.2.3\ldots.m-2.m-1.m}{1.2.3\ldots.m-1.1.2} = \frac{m.m-1}{1.2}$$

$$a^{m-3}b^3 = \frac{1.2.3\ldots.m-3.m-2.m-1.m}{1.2.3\ldots.m-3.1.2.3} = \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.}$$

$$a^{m-4}b^4 = \frac{1.2.3\ldots.m-4.m-3.m-2.m-1.m}{1.2.3\ldots.m-4.1.2.3.4.} = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$

. . . .

$$a^{m-m}b^m = \frac{1.2.3\ldots.m}{1.2.3\ldots.m} = 1.$$

* Der Ausdruck für den Coefficienten des letzten Gliedes beweiſet wieder, daß, wenn m eine gebrochene oder negative Zahl iſt, die Reihe unendlich werden müſſe, indem ſich der Coefficient des letzten Gliedes $(= 1)$, alſo auch das letzte Glied ſelbſt niemals finden läßt.

§. 211.

Hieraus leitet ſich eine leichte Methode ab, die Coefficienten aller Glieder für eine beſtimmte Potenz des Binomius, z. B. für die 8te zu finden. Man ſchreibt nämlich die

die natürlichen Zahlen von 8 bis 1 in abnehmender ſowohl, als aufſteigender Ordnung untereinander, ſo daß die erſte Reihe die Zähler, die zweite die Nenner eben ſo vieler Fractionen vorſtelle.

$$\tfrac{8}{1}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{6}{3}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{1}{8}.$$

Der Coefficient des erſten Gliedes iſt bekanntlich $= 1$.

— — des zweiten — $\frac{8}{1} = 8$

— — des dritten — $\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} = 28$

— — des vierten — $\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} = 28 \times \frac{6}{3} = 56$

— — des fünften — $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 56 \times \frac{5}{4} = 70$

— — des ſechsten — $\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 70 \times \frac{4}{5} = 56$

— — des ſiebenten — $56 \times \frac{3}{6} = 28$

— — des achten — $28 \times \frac{2}{7} = 8$

— — des neunten — $8 \times \frac{1}{8} = 1.$

§. 212.

Der allgemeine Ausdruck des Binomiums $(a \pm b)^m$, wenn man Kürze halber, die Coefficienten vom zweiten Gliede an durch A, B, C, D, E, u. ſ. w. ausdrückt, iſt nun dieſer:

$$(a \pm b)^m = a^m \pm A a^{m-1} \cdot b^1 + B a^{m-2} \cdot b^2 \pm C a^{m-3} \cdot b^3$$
$$+ D a^{m-4} \cdot b^4 \pm E.a^{m-5} \cdot b^5 \pm \ldots F a^{m-n} \cdot b^n.$$

Dieſe Reihe läßt ſich aber noch bequemer alſo darſtellen. Da $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

ſo iſt auch $(a+b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$

d. h.

d. h. Man ſuche die Reihe von $\left(1+\frac{b}{a}\right)$, und multipliciere ſie am Ende mit a^m.

Setzt man nun Kürze halber $\frac{b}{a}=q\ldots$ ſo erhält man
$a^m(1+q)^m = a^m(1+Aq^1+Bq^2+Cq^3+Dq^4+Eq^5\ldots Zq^n)$

Z. B. Man erhebe nach dieſer Formel $(a+b)$ zur ſechsten Würde.

Auflöſung. $(a+b)^6 = a^6\left(1+\frac{b}{a}\right)^6$

$$= a^6\Big(1+\frac{6}{1}.\frac{b}{a}+\frac{6.5}{1.2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3}+\frac{6.5.4.3.}{1.2.3.4.}\frac{b^4}{a^4}$$
$$+\frac{6.5.4.3.2.}{1.2.3.4.5.}\frac{b^5}{a^5}+\frac{6.5.4.3.2.1.}{1.2.3.4.5.6.}\frac{b^6}{a^6}\Big)$$
$$= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

§. 213.

Um endlich die Coefficienten, als welche im Rechnen die größte Beſchwerde verurſachen, noch mehr abzukürzen, und zugleich eine Norm zu haben, wie der nächſtfolgende Coefficient aus dem vorhergehenden zu beſtimmen ſey, hat man nur nothwendig, das allgemeine Glied zu finden, mit welchem der Coefficient im nächſt vorhergehenden Gliede zu multipliciren iſt. Dieſes allgemeine Glied iſt $\frac{m-\delta}{1+\delta}$, wo m den Grad des Binomium, δ aber der Ordnung nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4.. vorſtellt.

Nach dieſer Vorausſetzung iſt alſo

$$A = 1\times\frac{m}{1} = \frac{m}{1}$$
$$B = A\times\frac{m-1}{1+1}$$
$$C = B\times\frac{m-2}{1+2}$$
$$D = C\times\frac{m-3}{1+3}$$

$$E = D \times \frac{m-4}{1+4}$$

$$F = E \times \frac{m-5}{1+5}$$

$$Z = Y \times \frac{m-\delta}{1+\delta}$$

§. 214.

Der Binomiſche Lehrſatz gilt auch für den Fall, daß der Exponent der Würde eine gebrochene Zahl, oder $= \frac{m}{n}$ iſt. d. i. $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ oder $\sqrt[n]{(a+b)^m} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{1.\,2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1\cdot\frac{m}{n}-2}{1.\,2.\,3} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 + \ldots.$$

Beweis.

I. Setzt man den Exponenten $= \varepsilon$, als einer ganzen Zahl, ſo iſt:

$$(a+b)^{\varepsilon} = a^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon.}{1} a^{\varepsilon-1} b + \frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{1.2} a^{\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{\varepsilon.\varepsilon-1.\varepsilon-2}{1.2.3} a^{\varepsilon-3} b^3 + \ldots\ldots$$

II. Setzt man dieſe Reihe 2, 3, 4, ... oder überhaupt n mal als Factor, und verrichtet man die Multiplication, ſo läßt ſich nachweiſen, daß man dadurch nachſtehende geſetzmäßige Reihen erhalte:

$$1^{\circ})\; a^{2\varepsilon} + 2\varepsilon.\, a^{2\varepsilon-1} b + \frac{2\varepsilon.2\varepsilon-1}{1.\,2} a^{2\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{2\varepsilon.2\varepsilon-1.2\varepsilon-2}{1.\,2.\,3} a^{2\varepsilon-3} b^3 + \ldots.$$

$$2^{\circ})\; a^{3\varepsilon} + 3\varepsilon.\, a^{3\varepsilon-1} b + \frac{3\varepsilon.3\varepsilon-1}{1.\,2} a^{3\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{3\varepsilon.3\varepsilon-1.3\varepsilon-2}{1.\,2.\,3} a^{3\varepsilon-3} b^3 + \ldots.$$

$$3^\circ)\ a^{4\varepsilon} + 4\varepsilon \,.\, a^{4\varepsilon-1}b + \frac{4\varepsilon \,.\, 4\varepsilon-1 \,.}{1.\ 2} a^{4\varepsilon-2}b^2 + \frac{4\varepsilon.4\varepsilon-1.4\varepsilon-2.}{1.\ 2.\ 3} a^{4\varepsilon-3}b^3 + \ldots$$

$$4^\circ)\ a^{n\varepsilon} + n\varepsilon.a^{n\varepsilon-1}b + \frac{n\varepsilon.n\varepsilon-1.}{1.\ 2} a^{n\varepsilon-2}b^2 + \frac{n\varepsilon\,.\,n\varepsilon-1\,.\,n\varepsilon-2\,.}{1.\ 2.\ 3} a^{n\varepsilon-3}b^3 + \ldots$$

III. Eben dieſe Reihen wird man aber auch erhalten, wenn man $\varepsilon = \frac{m}{n}$ ſetzt; denn der Werth von ε hat keinen Einfluß auf den Kalkul.

IV. Subſtituirt man man nun in der Reihe 4° für ε den Werth $\frac{m}{n}$, ſo erhält man:

$$a^m + m\, a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3}b^3 + \ldots$$

V. Dieſe Reihe aber gleicht der m^{ten} Potenz von $a+b$; daher iſt

$$\text{VI.}\quad a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}.a^{\frac{m-1}{n}}\, b + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m-1.}{n}}{1.\ 2} a^{\frac{m-2}{n}}\, b^2 + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m-1.}{n}\frac{m-2}{n}}{1.\ 2.\ 3} a^{\frac{m-3}{n}}\, b^3 + \ldots = \sqrt[n]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{n}} \text{ q. e. d.}$$

§. 215.

Der Binomiſche Lehrſatz gilt auch für den Fall, daß der Exponent der Würde negativ iſt.

 Beweis.

Beweis.

I. Man erhebe $(a+b)$ zur -2ten Potenz, oder man theile 1 durch $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und man erhält den Quotus ...

$$a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 - 6a^{-7}b^5 + \ldots\ldots$$

II. Dieſer Quotus iſt die geſetzmäßige Reihe für den Exponenten $-m = -2$; oder $(a+b)^{-m} =$

$$a^{-m} - m a^{-(m+1)} b + \frac{m.m+1}{1.\ 2} a^{-(m+2)} b^2$$

$$- \frac{m.m+1.m+2}{1.\ 2.\ 5} a^{-(m+3)} b^3 + - + - \ldots.$$

III. Erhebt man nun dieſe Reihe zu der nächſt höhern negativen Potenz, d. i. dividirt man dieſelbe durch $a+b$, ſo wird der Quotus in jeder Hinſicht die geſetzmäßige Reihe für $-m = -3$ ſeyn.

Operation.

Quotus. $a^{-(m+1)} - \overline{m+1}\,.\,a^{-(m+2)}.\,b + \frac{m+1.m+2}{1.\;2.}a^{-(m+3)}.\,b^2 - \frac{m+1.m+2.m+3}{1.\;2.\;3.}a^{-(m+4)}.\,b^3 + \ldots.$

$$a^{-m} - m\,a^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.\;2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3}a^{-(m+3)}b^3 + \ldots$$

$(a \quad + \quad b)$

$$\underset{-}{-}\,a^{-m} \underset{-}{+} a^{-(m+1)}b$$

$$-\,(m+1)\,a^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.\;2}a^{-(m+2)}b^2$$

$(a \quad + \quad b)$

$$\underset{+}{-}\,(m+1)\,a^{-(m+1)}b \underset{+}{-} (m+1)\,a^{-(m+2)}b^2$$

$$\frac{m+2.m+1}{1.\;2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3}a^{-(m+3)}b^3.$$

$(a \quad + \quad b)$

$$\underset{-}{}\frac{m+2.m+1}{1.\;2}a^{-(m+2)}b^2 \underset{-}{+} \frac{m+1.m+2}{1.\;2}a^{-(m+3)}b^3.$$

$$-\frac{m+1.m+2.m+3}{1.\;2.\;3}a^{-(m+3)}b^3 + \frac{m.m+1.m+2.m+3}{1.\;2.\;3.\;4}a^{-(m+4)}b^4 \ldots.$$

$(a \quad + \quad b)$

u. ſ. w.

Es iſt klar, daß, wenn man mit a theilt, der negative Exponent, von a um 1 —; eben ſo einleuchtend iſt es, daß, wenn man das Produkt aus jedem einzelnen Quotus in b zu dem unmittelbar folgenden Gliede addirt, jeder Factor im Zähler des Coefficienten ebenfalls um 1 größer werden müſſe. Die Exponenten von b bleiben unverändert.

Setzt man nun $m=3$, ſo iſt der gefundene Quotus oder $(a+b)^{-m} = a^{-m} - m a^{-(m+1)} b + \frac{m . m+1}{1.\ 2} a^{-(m+2)} b^2$

$$+ \frac{m . m+1 . m+2}{1.\ 2.\ 3.} a^{-(m+3)} b^3 + - \ldots\ldots$$

Es iſt alſo der Lehrſatz auch für $-m = -3$ erwieſen, und zugleich das Geſetz aufgefunden, nach welchem aus der Diviſion mit $a+b$ in die niedrigere negative Potenz die nächſthöhere nothwendig hervorgeht.

Folgeſatz. Aus der Verbindung dieſer beiden Beweiſe läßt ſich leicht zeigen, daß der binomiſche Lehrſatz auch für den Fall gelte, wenn der Exponent eine negative Fraction iſt; wenn nemlich

$(a+b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)^m}$ iſt, ſo muß auch

$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)^{-m}}$ ſeyn.

Anmerkung. In der Potenz von $(a+b)^{-3}$ ſind die Triagonalzahlen von 1 angefangen die Coefficienten.

$1 = 1+0$

$3 = \frac{3}{1} = 1+2$

$6 = \frac{3.4}{1.2} = 1+2+3$

$10 = \frac{3.4.5}{1.2.3} = 1+2+3+4$

$15 = \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} = 1+2+3+4+5$

$21 = \frac{3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5} = 1+2+3+4+5+6.$

Es fällt bei einigem Nachdenken als nothwendig auf, daß die Coefficienten um den letzten Factor im Zähler des vorher-

vorhergehenden Bruches wachſen, und folglich die nächſt höhere Triagonalzahl der Coefficient jedes folgenden Gliedes ſey.

Dividirt man nun mit $a+b$ in die Reihe von Nro. I, ſo läßt ſich ſtrenge nachweiſen, daß nebſt den geſetzmäßigen Exponenten eben dieſe Triagonalzahlen als Coefficienten im Quotus erſcheinen müſſen; und daß folglich die Reihe

von Nro. III. $= (a+b)^{-3}$ ſey.

§. 216.

Aufgabe. Das Binomium $(a+b)^{-m}$ d. i. $\left(\frac{1}{(a+b)^m}\right)$ zu potenziren, oder in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

Auflöſung. I. Man beſtimme zuerſt die Exponenten von a und b:

$$a^{-m},\ a^{(-m-1)}b^1,\ a^{(-m-2)}b^2,\ a^{(-m-3)}b^3,\ a^{(-m-4)}b^4,\ a^{-m-n}b^n$$

$$= a^{-m},\ a^{-(m+1)}b,\ a^{-(m+2)}b^2,\ a^{-(m+3)}b^3,\ a^{-(m+4)}b^4,\ a^{-m+n}b^n$$

$$= \frac{b^0}{a^m},\ \frac{b^1}{a^{m+1}},\ \frac{b^2}{a^{m+2}},\ \frac{b^3}{a^{m+3}},\ \frac{b^4}{a^{m+4}},\ \frac{b^n}{a^{m+n}}$$

II. Nun beſtimme man auch die Coefficienten:

$$A = -\frac{m}{1}$$

$$B = -\frac{m.(-m-1)}{1.\ 2} = \frac{m.(m+1).}{1.\ 2}$$

$$C = -\frac{m.(-m-1)(-m-2)}{1.\ 2.\ 3} = -\frac{m\times(m+1)(m+2).}{1.\ 2.\ 3}$$

$$D = +\frac{m(m+1).(m+2)(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$E = -\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4).}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

Oder kürzer nach §. 213.

$$(-)\ A = -\frac{m.}{1}$$

$$(+)\ B = -A\times-\left(\frac{m+1}{1+1}\right)$$

$$-\ C = -B\times-\left(\frac{m+2}{1+2}\right)$$

$+ D$

$$+D = -C \times -\left(\frac{m+3}{1+3}\right)$$

$$-E = +D \times -\left(\frac{m+4}{1+4}\right)$$

$$\pm Z = \pm Y \times -\left(\frac{m+\delta}{1+\delta}\right)$$

Anmerkung. Da auch $(a+b)^{-m} = a^{-m}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-m}$ $= a^{-m}(1+f)^{-m}$ iſt, ſo läßt ſich die Reihe auch ſo darſtellen.

$$(1+f)^{-m} = 1 - Af + Bf^2 - Cf^3 + Df^4 + Zf^n.$$

§. 217.

Anwendungen.

I. Welches iſt die fünfte Würde von $\frac{2x}{3} + \frac{1y}{2}$.

Auflöſung. $a = \frac{2}{3}x$

$b = \frac{1}{2}y$

$$\begin{array}{r|l}
a^5 & = \frac{32}{243}x^5. \\
5a^4b & = \frac{5\cdot16x^4}{81} \times \frac{1y}{2} = \frac{40x^4y}{81}. \\
10a^3b^2 & = \frac{10\cdot8x^3}{27} \times \frac{1y^2}{4} = \frac{20x^3y^2}{27} \\
10a^2b^3 & = \frac{10\cdot4x^2}{9} \times \frac{1y^3}{8} = \frac{5x^2y^3}{9}. \\
5ab^4 & = \frac{5\cdot2x}{3} \times \frac{1}{16}y^4 = \frac{5}{24}xy^4. \\
b^5 & = \frac{1}{32}y^5.
\end{array}$$

Alſo iſt die verlangte Würde von $\left(\frac{2x}{3} + \frac{1y}{2}\right)$

$$= \frac{32}{243}x^5 + \frac{40x^4y}{81} + \frac{20x^3y^2}{27} + \frac{5}{9}x^2y^3 + \frac{5}{24}xy^4 + \frac{1}{32}y^5.$$

II. Welches iſt das Quadrat von $\left(\frac{1}{a+b}\right)$? oder $(a+b)^{-2}$ werde in eine unendliche Reihe verwandelt.

Auf-

Aufløſung. (§. 216. Nro. II.)

$$(a+b)^{-2}=a^{-2}-\tfrac{2}{1}.a^{-3}b+\tfrac{2}{1}.\tfrac{3}{2}a^{-4}b^2-3.\tfrac{4}{3}a^{-5}b^3+4.\tfrac{5}{4}a^{-6}b^4-5.\tfrac{6}{5}a^{-7}b^5\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}\ldots\ldots$$

III. Man potenzire $\frac{1}{(a+b)^{+3}}$ oder $(a+b)^{-3}$

Aufløſung.

$$(a+b)^{-3}=a^{-3}-\tfrac{3}{1}a^{-4}b+\tfrac{3}{1}.\tfrac{4}{2}a^{-5}b^2-6.\tfrac{5}{3}a^{-6}b^3+10.\tfrac{6}{4}a^{-7}b^4\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{a^3}-\frac{3b}{a^4}+\frac{6b^2}{a^5}-\frac{10b^3}{a^6}+\frac{21b^4}{a^7}-\frac{28b^5}{a^8}\ldots\ldots$$

Anmerkung. Drückt man das in den letzten zwey Beiſpielen bemerkte Geſetz allgemein aus, ſo erhält man:

$$(a+b)^{-m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}.\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{b^2}{a^{m+2}}$$

$$-\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{b^3}{a^{m+3}}\text{ u. ſ. w.}$$

Läßt man in dieſem Binomium den Exponenten m weg, und verwandelt es in eine unendliche Reihe, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}+\frac{b^6}{a^7}\ldots\ldots$$

Wird nun dieſe Reihe mit a+b multiplicirt, ſo muß nothwendiger Weiſe der Zähler der Fraction, d. i. 1 als Product erſcheinen.

B. Binomien als Wurzelgrößen.

§. 218.

Da ſich Wurzelgrößen in Würden mit gebrochenen Exponenten verwandeln laſſen (§. 194.) und z. B.

$$\sqrt{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$$

$\sqrt[n]{(a+b)^m}=(a+b)^{\frac{m}{n}}$ iſt; ſo hat man weiter nichts

zu

zu thun, als anſtatt des Exponenten m den Exponenten $\frac{m}{n}$ zu ſubſtituiren, und darnach die Würden von a, und die Coefficienten zu beſtimmen.

§. 219.

Aufgabe. Die Größe $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ zu potenziren.

Auflöſung.

I. Man beſtimme die Exponenten von a (und b).

$$a^{\frac{m}{n}},\ a^{\frac{m}{n}-1}.\,b,\ a^{\frac{m}{n}-2}.\,b^2,\ a^{\frac{m}{n}-3}.\,b^3,\ a^{\frac{m}{n}-4}.\,b^4,\ a^{\frac{m}{n}-5}.\,b^5 \ldots\ldots$$

$$= a^{\frac{m}{n}},\ a^{\frac{m-n}{n}}\,b,\ a^{\frac{m-2n}{n}}\,b^2,\ a^{\frac{m-3n}{n}}\,b^3,\ a^{\frac{m-4n}{n}}\,b^4,\ a^{\frac{m-5n}{n}}\,b^5 \ldots\ldots$$

Anmerkung. Man ſieht hier, daß dieſe Reihe nicht wohl anwendbar ſey, indem a in lauter Irrationalzahlen erſcheint, und man alſo eben ſo viele Wurzeln auszuziehen hätte, als die Reihe Glieder erhält. Dieſe Schwierigkeit verſchwindet aber, wenn man bedenkt, daß ſich jedes Binomium in ſolche zwey Theile zerlegen laſſe, wovon der erſte (a) eine Würde vom Grade n, d. h. $a = \triangle^n$

folglich $a^{\frac{m}{n}} = \triangle^{\frac{mn}{n}} = \triangle^m$.

Anmerkung. 2. Setzt man nun wieder $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$ und $\frac{b}{a} = f$; ſo erhält man die Reihe:

$$1 + Af + Bf^2 + Cf^3 + Df^4 + Ef^5 + Ff^6 \ldots\ldots Zf^{z-1}.$$

II. Nun beſtimme man auch die Coefficienten:

$$A = \frac{m}{1.n}$$

$$B = \frac{m.(m-n)}{1.\ 2.\ n^2}$$

$$C = \frac{m.(m-n)\ (m-2n)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ n^3}$$

$$D = \frac{m.(m-n).(m-2n).(m-3n)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4\,n^4}$$

E =

$$E = \frac{m.(m-n).(m-2n).(m-3n).(m-4n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 6\, n^5}$$ u. ſ. w.

Oder noch kürzer

$$A = \frac{m.}{n} \qquad \text{(und wenn } \frac{m}{n} = q) \quad \ldots\ldots\ q$$

$$B = \frac{A.(m-n)}{2n} \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{A.(q-1)}{1.\ 2}$$

$$C = \frac{B.(m-2n)}{3n} \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{B.(q-2)}{3}$$

$$D = \frac{C.(m-3n)}{4n} \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{C.(q-3)}{4}$$

$$E = \frac{D\,(m-4n)}{5n} \text{ u. ſ. w. } = \frac{D\,(q-4).}{5}$$

§. 220.

Anwendung. I. Welches iſt die Quadratwurzel aus $(a+b)$? oder $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$.

Auflöſung. Man ſetze $a = q^2$ .. folglich $(q^2+b)^{\frac{1}{2}} = q\left(1+\frac{b}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ... und $\frac{b}{q^2} = f$.

ſo erhält man: $q(1+\frac{1}{2}f - \frac{1}{8}f^2 + \frac{1}{16}f^3 - \frac{5}{128}f^4) = \sqrt{(a+b)}$.

* Es ſey $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{26}$ und $a = 25$. folglich $b = 1$ und $f = \frac{1}{25} = 0{,}04$. $q = 5$.

So iſt die Wurzel aus 26

$= 5\,(1 + 0{,}02 - 0{,}0002 + 0{,}000002 - 0{,}000000025\,..)$
$= 5 \times 1.019801975 = 5{,}09900$ bis auf die fünfte Zifferſtelle ganz genau.

II. Welches iſt die Kubikwurzel aus $(a+b)$? — oder $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$.

Auflöſung. Man ſetze $(a+b)^{\frac{1}{3}} = (c^3+b)^{\frac{1}{3}} = c\left(1+\frac{b}{c^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\frac{b}{c^3} = f$ .. ſo erhält man

$$c\,(1+\tfrac{1}{3}f - \tfrac{1}{9}f^2 + \tfrac{5}{81}f^3 - \tfrac{10}{243}f^4 + \tfrac{22}{729}f^5 - \tfrac{154}{2187}f^6\,..) = \sqrt[3]{(a+b)}$$

* Man

* Man habe die Aufgabe: $\sqrt[3]{(200)}$..
d. i. $a+b=200$. Es ſey $a=c^3=125$

$$b=75 \,..\, \frac{b}{c^3}=\frac{75}{125}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

ſo iſt die Kubikwurzel aus 200

$$=(1+0{,}2-0{,}04+0{,}01333\ldots-0{,}00533\ldots.$$
$$+\,0{,}0023466\ldots)\,5$$
$$=5\times 1{,}17034\ldots.=5{,}85.$$

Es iſt aber der Kubus von $(5{,}85)=200{,}20$..

Mithin nur um $\frac{2}{10}$ größer als 200.

§. 221.

Hat man endlich Binomien zu potenziren, derer Exponent ein negativer Bruch iſt, ſo verfährt man ganz, wie §. 219 gezeigt wurde; nur die Zeichen der Glieder wechſeln, und die Exponenten von a ſind durchaus negativ.

Aufgabe. Das Binomium $\frac{1}{(a+b)}^{\frac{m}{n}}$ oder $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ zu potenziren.

Auflöſung. I. Man beſtimme die Exponenten von a und b.

$$a^{-\frac{m}{n}},\ a^{-\left(\frac{m}{n}+1\right)}b,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+2\right)}b^2,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+3\right)}b^3,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+4\right)}b^4\ldots$$

$$=a^{-\frac{m}{n}},\ a^{-\left(\frac{m+n}{n}\right)}b,\ a^{-\left(\frac{m+2n}{n}\right)}b^2,\ a^{-\left(\frac{m+3n}{n}\right)}b^3,\ a^{-\left(\frac{m+4n}{n}\right)}b^4\ldots$$

$$=\frac{b^0}{a^{\frac{m}{n}}},\ \frac{b^1}{a^{\frac{m+n}{n}}},\ \frac{b^2}{a^{\frac{m+2n}{n}}},\ \frac{b^3}{a^{\frac{m+3n}{n}}},\ \frac{b^4}{a^{\frac{m+4n}{n}}}\ \text{rc.}$$

II. Nun beſtimme man auch die Coefficienten.

$$A=-\frac{m}{n}$$

$$B=+\frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2}$$

$$C=-\frac{m.(m+n).(m+2n)}{1.\ 2\ .\ 3n^3}$$

D =

$$D = + \frac{m.(m+n).(m+2n).(m+3n)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4n^4}$$

$$E = - \frac{m.(m+n).(m+2n).(m+3n).(m+4n)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5n^5}$$ u. ſ. w.

(vergl. §. 219.)

Setzt man nun wieder $(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}}$, und iſt $a = y^n$ folglich $a^{-\frac{m}{n}} = y^{-m}$ und $\frac{b}{a} = p$. ſo erhält man wieder:

$$(1-Ap+Bp^2-Cp^3+Dp^4-Ep^5+Fp^6....)\,y^{-m} = (a+b)^{-\frac{m}{n}}$$

Anwendung. Man ziehe die Kubikwurzel aus $\frac{2}{3}$; oder verwandle $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{12}} = \frac{2}{(12)^{\frac{1}{3}}} = 2 \times (12)^{-\frac{1}{3}}$ in eine unendliche Reihe.

Auflöſung. Es ſey $a=8.$ $b=4$ folglich $\frac{b}{a} = f = \frac{1}{2}$. alſo $2 \times 8^{-\frac{1}{3}} \times (1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = (1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}$

$$(1+f)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}f + \frac{2}{9}f^2 - \frac{14}{81}f^3 + \frac{35}{243}f^4 - \frac{91}{729}f^5 + \frac{728}{6561}f^6 \ldots\ldots$$

Substituirt man für f. f^2 ꝛc. ſeinen Werth, und drückt die gemeinen Fractionen in Decimalen aus, ſo erhält man:

Poſitive	Negative Glieder.
+ 1,000000	— 0,166666
0,055555	— 0,021918
0,009000	— 0,003900
0,001733	— 0,192479
Summe + 1,066288.	

Differenz 1.066288
— 0.192479
0.873809. —

Wovon der Kubus 0,6672 .... nur um 0,0006 größer iſt, als 0,666 ... = $\frac{2}{3}$.

Drit-

Dritter Artikel.

Würdenlehre polynomiſcher Größen.

§. 222.

Dieſer ganze Artikel beſchränkt ſich auf eine Anweiſung, wie man mehrgliederige Größen, bloß nach den Regeln der Kombination, zum Quadrate, Kubus und Biquadrate, (denn dieſe Würden kommen am öfteſten vor) erheben könne, ohne dabei die mühſame Multiplication aller Glieder anwenden zu müſſen.

Man habe z. B. das Trinomium $(a+b+c)$. Es ſoll hievon das Quadrat, der Kubus, oder das Biquadrat gefunden werden. — Es heißt nun dieſes nichts anders, als beſtimmen, wie viele Kombinationen dieſe drei Buchſtaben, nach zweien, dreien, vieren zulaſſen. Setzt man alſo die möglichen Kombinationen aus, und verkürzt die Permutationen gleicher Buchſtaben durch die Coefficienten, ſo hat man die verlangten Würden des Trinomiums.

§. 223.

I. Aufgabe. Das Trinomium $a+b+c$ zu quadriren.

Auflöſungen. Man beſtimme nach §. 148 die Kombinationen dieſer Buchſtaben zu zweien, derer drei Buchſtaben $3^2 = 9$ zulaſſen.

$$aa,\ bb,\ cc = a^2,\ b^2,\ c^2$$
$$ab,\ ac,\ bc$$
$$ba,\ ca,\ cb$$

Kürze die Producte aus gleichen Buchſtaben durch die Coefficienten ab, d. h. addire ſie $2ab$, $2ac$, $2bc$.; ſo hat man die verlangte Würde:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Anmerkung. $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$

II. Aufgabe. Das Quadrinomium $(a+b+c+d)$ zu quadriren.

Auf-

Auflöſung. Man verfahre wie im vorhergehenden §.

Vier Buchſtaben laſſen $4^2 = 16$ Kombinationen nach zweien zu

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2+d^2 \\ 2ab+2ac+2ad \\ +2bc+2bd \\ +2cd \end{array}\right\} \text{Summe der Coefficienten} = 16.$$

Hat man alſo was immer für ein Polynomium z. B. $(2p+3q+7x-4y)$ zu quadriren, ſo ſuche man erſtens die Quadrate jedes Gliedes:

$$4p^2+9q^2+49x^2+16y^2.$$

Zweitens multiplicire man das Doppelte eines jeden Gliedes (außer dem Letzten) mit allen nachſtehenden Gliedern.

$$\begin{array}{rl} \text{(Doppeltes} & 4p+6q+14x) \\ & (2p+3q+7x-4y) \\ \hline & 12pq+28px-16py \\ & \quad +42qx-24qy \\ & \qquad -56xy \end{array}$$

giebt alſo ſechs Producte.

Das Quadrat des gegebenen Polynomium iſt nun:

$$4p^2+9q^2+49x^2+16y^2+12pq+28px+42qx-16py-24qy-56xy.$$

§. 224.

Auf eine analoge Art verfährt man, wenn ein Trinomium, z. B. $a+b+c$ zu kubiren iſt. Drei Buchſtaben geben $3^3 = 27$ Kombinationen nach Dreien

$$aaa,\ bbb,\ ccc = a^3,\ b^3,\ c^3.$$

$$a^2b,\ a^2c,\ ab^2,\ cb^2,\ ac^2,\ bc^2$$

... ...

... ...

(Die Reihen von Punkten zeigen an, daß ſich jedes dieſer Glieder dreimal verſetzen laſſe, mithin den Coefficienten 3 bekomme);

en II

endlich a b c, deſſen Buchſtaben ſich 1. 2. 3 = 6 Mal verſetzen laſſen.

Alſo $(a+b+c)^3 =$

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2 +3bc^2+6abc.$$

Summe der Coefficienten... 27.

Das Quatrinomium $(a+b+c-d)^3$ giebt folgende Kombinationen:

$$+a^3+b^3+c^3-d^3.$$

$$+3a^2b+3a^2c-3a^2d+3ab^2+3b^2c-3b^2d+3ac^2+3bc^2$$
$$-3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2$$
$$+6abc-6abd-6acd-6bcd\ldots$$
Summe der Coefficienten $64 = 4^3$.

Hat man alſo ein Polynomium z. B. $2p+3q+4x-5y$ zum Kubus zu erheben, ſo ſuche man

1°) Die Kubuſſe jedes einzelnen Gliedes
$$8p^3+27q^3+64x^3-125y^3.$$

2°) Das dreifache Quadrat jedes Theiles multiplicirt mit jedem einzelnen der übrigen Glieder.

$$(12p^2+27q^2+48x^2+75y)$$
$$2p+3q+4x-5y$$
$$36p^2q+48p^2x-60p^2y$$
$$54pq^2+108q^2x-135q^2y$$
$$96px^2+144qx^2-240x^2y$$
$$150py^2+225qy^2+300xy^2.$$

3°) Endlich das ſechsfache Product aus je drei verſchiedenen Gliedern:

$$(12p+18q)$$
$$2p+3q+4x-5y$$
$$144pqx-240pxy-180pqy$$
$$-360qxy.$$

Es

Es iſt alſo der Kubus von $(2p+3q+4x-5y) =$
$$8p^3+27q^3+64x^3-125y^3+36p^2q+48p^2x-60p^2y$$
$$+54pq^2+108q^2x-135q^2y+96px^2+144qx^2$$
$$-240x^2y+150py^2+225qy^2+300xy^2+144pqx$$
$$-240pxy-180pqy-360qxy.$$

§. 225.

Das Biquadrat eines Quadrinomiums endlich, wie $(a+b+c+d)$ giebt folgende Kombinationen zu vieren.

a^4, b^4, c^4, d^4 . . . . Coefficient $+1$.

$$\left.\begin{matrix} a^3b, & a^3c, & a^3d \\ ab^3, & b^3c, & b^3d \\ ac^3, & bc^3, & c^3d \\ ad^3, & bd^3, & cd^3 \end{matrix}\right\} \text{Coefficient } +4.$$

$$\left.\begin{matrix} a^2b^2, & a^2c^2, & a^2d^2 \\ b^2c^2, & b^2d^2, & c^2d^2 \end{matrix}\right\} \text{Coefficient } +6.$$

$$\left.\begin{matrix} a^2bc, & a^2bd, & a^2cd \\ ab^2c, & ab^2d, & cb^2d \\ abc^2, & ac^2d, & bc^2d \\ abd^2, & acd^2, & bcd^2 \end{matrix}\right\} \text{Coefficient } +12.$$

$abcd$ . . . Coefficient $+24$.

Summe der Coefficienten $4^4 = 256$.

Das Biquadrat von $(a+b-c)$ iſt $=$
$$a^4+b^4+c^4+4a^3b-4a^3c+4ab^3-4b^3c-4ac^3-4bc^3$$
$$+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2-12a^2bc-12ab^2c+12abc^2.$$

Summe der Coefficienten $3^4 = 81$.

§. 226.

Wie man aus Polynomien die Quadrat- und Kubikwurzel ziehen müſſe, wurde ſchon früher erklärt. — Um die vierte Wurzel zu erhalten, betrachte man das Biquadrat als eine Poteſtät des zweiten Grades, und ziehe aus der Quadratwurzel noch einmal dieſelbe Wurzel. — Hat man aber aus Polynomien noch andere Wurzeln zu ziehen,

oder ſie zu höhern Potenzen zu erheben, ſo kann man ſie in Binomien verwandeln, welches dadurch geſchieht, daß man zwei oder mehr Größen mittelſt Parentheſen einſchließt, und als eine Größe betrachtet; in der Folge läßt ſich dann die Operation vollends entwickeln; oder man behandelt ſie nach den Regeln der Kombination und Permutation (vergl. §. 210).

Beiſpiel I. Welches iſt die fünfte Würde von $(a+b-c)$?

Operation.

$$[a+(b-c)]^5 = a^5 + 5a^4(b-c)^1 + 10a^3(b-c)^2 + 10a^2(b-c)^3 + 5a(b-c)^4 + (b-c)^5.$$

Nun iſt $(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$

$$(b-c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$$
$$(b-c)^4 = b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$$
$$(b-c)^5 = b^5 - 5b^4c + 10b^3c^2 - 10b^2c^3 + 5bc^4 - c^5.$$

Mithin iſt $(a+b-c)^5 =$

$$a^5 + 5a^4b - 5a^4c + 10a^3b^2 - 20a^3bc + 10a^3c^2 + 10a^2b^3 - 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 - 10a^2c^3 + 5ab^4 - 20ab^3c + 30ab^2c^2 - 20abc^3 + 5ac^4 + b^5 - 5b^4c + 10b^3c^2 - 10b^2c^3 + 5bc^4 - c^5 \ldots$$

* Zu dieſem Reſultate würde man beinahe früher durch die gewöhnliche Combination dieſer Größen $(a+b-c)$ gelangt ſein (§. 222).

II. Das Quinomium $(a+b-c-d-e)^6$ nach den Regeln der Combination zu potenziren.

Operation. Die möglichen Combinationen für die Exponenten ſind:

a) Verbindung mit einem Buchſtaben.	b) Verbindung mit zwei Buchſtaben.	c) Verbindung mit drei Buchſtaben.	d) Verbindung mit vier Buchſtaben.
6+0	5+1	4+1+1	3+1+1+1
	4+2	3+2+1	2+2+1+1
	3+3	2+2+2	

e) mit fünf Buchſtaben.

2+1+1+1+1.

I. a^6

I. $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6.$

II. Coefficient 6

$$\left\{\begin{array}{l} +a^5b \\ -a^5c \\ -a^5d \\ -a^5e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +ab^5 \\ -b^5c \\ -b^5d \\ -b^5e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -ac^5 \\ -bc^5 \\ +c^5d \\ +c^5e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -ad^5 \\ -bd^5 \\ +cd^5 \\ +d^5e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -ae^5 \\ -be^5 \\ +ce^5 \\ +de^5. \end{array}\right.$$

III. Coefficient 15

$$\left\{\begin{array}{l} +a^4b^2 \\ a^4c^2 \\ a^4d^2 \\ a^4e^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +a^2b^4 \\ b^4c^2 \\ b^4d^2 \\ b^4e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +a^2c^4 \\ b^2c^4 \\ c^4d^2 \\ c^4e^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +a^2d^4 \\ b^2d^4 \\ c^2d^4 \\ d^4e^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +a^2e^4 \\ b^2e^4 \\ c^2e^4 \\ d^2e^4. \end{array}\right.$$

IV. Coefficient 30

$$\left\{\begin{array}{l} -a^4bc \\ -a^4bd \\ -a^4be \\ +a^4cd \\ +a^4ce \\ +{}^4ade \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -ab^4c \\ -ab^4d \\ -ab^4e \\ +b^4cd \\ +b^4ce \\ +b^4de \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +abc^4 \\ -ac^4d \\ -ac^4e \\ -bc^4d \\ -bc^4e \\ +c^4de \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +abd^4 \\ -acd^4 \\ -ad^4e \\ -bcd^4 \\ -bd^4e \\ +cd^4e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +abe^4 \\ -ace^4 \\ -ade^4 \\ -bce^4 \\ -bde^4 \\ +cde^4 \end{array}\right.$$

V. Coefficient 20.

$$\left\{\begin{array}{l} +a^3b^3 \\ -a^3c^3 \\ -a^3d^3 \\ -a^3e^3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -b^3c^3 \\ -b^3d^3 \\ -b^3e^3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +c^3d^3 \\ +c^3e^3 \end{array}\right. \left(+d^3e^3. \right.$$

VI. Coefficient 60.

$$\left\{\begin{array}{l} -a^3b^2c \\ -a^3b^2d \\ -a^3b^2e \\ +a^3bc^2 \\ -a^3c^2d \\ -a^3c^2e \\ +a^3bd^2 \\ -a^3cd^2 \\ -a^3d^2e \\ +a^3be^2 \\ -a^3ce^2 \\ -a^3de^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -a^2b^3c \\ -a^2b^3d \\ -a^2b^3e \\ +ab^3c^2 \\ +ab^3d^2 \\ +ab^3e^2 \\ -b^3c^2d \\ -b^3c^2e \\ -b^3cd^2 \\ -b^3ce^2 \\ -b^3d^2e \\ -b^3de^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -a^2bc^3 \\ +a^2c^3d \\ +a^2c^3e \\ -ab^2c^3 \\ -ac^3d^2 \\ -ac^3e^2 \\ +b^2c^3d \\ +b^2c^3e \\ -bc^3d^2 \\ -bc^3e^2 \\ +c^3d^2e \\ +c^3d^2e \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -a^2bd^3 \\ +a^2cd^3 \\ +a^2d^3e \\ -ab^2d^3 \\ -ac^2d^3 \\ -ad^3e^2 \\ +b^2cd^3 \\ +b^2d^3e \\ -bc^2d^3 \\ -bd^3e^2 \\ +c^2d^3e \\ +cd^3e^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -a^2be^3 \\ +a^2ce^3 \\ +a^2de^3 \\ -ab^2e^3 \\ -ac^2e^3 \\ -ad^2e^3 \\ +b^2ce^3 \\ +b^2de^3 \\ -bc^2e^3 \\ -bd^2e^3 \\ +c^2de^3 \\ +cd^2e^3. \end{array}\right.$$

VII. Coefficient 90.	$+a^2b^2c^2$	$+a^2c^2e^2$	$+b^2d^2e^2$
	$+a^2b^2d^2$	$a^2d^2e^2$	$c^2d^2e^2$.
	$+a^2b^2e^2$	$b^2c^2d^2$	
	$+a^2c^2d^2$	$b^2c^2e^2$	

VIII. Coefficient 120.	$+a^3bcd$	$+ab^3cd$	$+abc^3d$	$+abcd^3$	$+abce^3$
	$+a^3bce$	$+ab^3ce$	$+abc^3e$	$+abd^3e$	$+abde^3$
	$+a^3bde$	$+ab^3de$	$-ac^3de$	$-acd^3e$	$-acde^3$
	$-a^3cde$	$-b^3cde$	$-bc^3de$	$-bcd^3e$	$-bcde^3$.

IX. Coefficient 180.	$+a^2b^2cd$	$-a^2bcd^2$	$-ab^2c^2d$	$-ab^2ce^2$	$+abc^2e^2$
	$+a^2b^2ce$	$-a^2bd^2e$	$-ab^2c^2e$	$-ab^2de^2$	$-ac^2de^2$
	$+a^2b^2de$	$+a^2cd^2e$	$+b^2c^2de$	$+b^2cde^2$	$-bc^2de^2$
	$-a^2bc^2d$	$-a^2bce^2$	$-ab^2cd^2$	$+abc^2d^2$	$+abd^2e^2$
	$-a^2bc^2e$	$-a^2bde^2$	$-ab^2d^2e$	$-ac^2d^2e$	$-acd^2e^2$
	$+a^2c^2de$	$+a^2cde^2$	$+b^2cd^2e$	$-bc^2d^2e$	$-bcd^2e^2$.

X. Coefficient 360.	$-a^2bcde$
	$-ab^2cde$
	$+abc^2de$
	$+abcd^2e$
	$+abcde^2$.

Multiplicirt man alle Glieder mit ihren Coefficienten, ſo giebt die Summe der letztern, wenn man ſie alle poſitiv nimmt: $15625 = 5^6$.

Anmerkung. Die Lehre von den Potenzen binomiſcher und polynomiſcher Größen macht den Uebergang von der niedern zur höhern Mathematik, und wird der Arithmetik nur als integrirender Theil beigefügt.

Zweyte

Zweite Abtheilung.

Höhere Arithmetik oder Algebra.

Höhere Arithmetik, oder Algebra überhaupt.

Vorbegriffe.

§. 228.

Algebra iſt jener Theil der Mathematik, welcher unbekannte Größen aus bekannten Eigenſchaften derſelben durch Gleichungen finden lehrt.

I. Gleichung (Aequatio) iſt der doppelte Ausdruck einerlei Größe, durch das Aequationszeichen zuſammengeſtellt.

Z. B. $a+b=3a+2b-2a-b$

$$x-y=\frac{ax-ay}{a}$$

Die beiden Ausdrücke der nemlichen Größe heißen die Seiten (latera); die durch + oder — verbundenen Größen aber die Glieder der Gleichung (termini aequationis.) z. B. in der erſten Gleichung ſtellt $a+b$ die eine; $3a+2b-2a-b$ die andere Seite vor. Die erſte Seite beſteht aus zwei, die andere aus vier Gliedern.

II. Im engern Sinne iſt Gleichung der doppelte Ausdruck von einerlei Größe, wodurch eine unbekannte Größe aus bekannten Eigenſchaften derſelben gefunden wird. — Man bezeichnet aber die unbekannten, d. i. zu ſuchenden Größen durch die Endesbuchſtaben v, x, y, z; die bekannten Größen aber durch die übrigen Buchſtaben des Alphabets, oder durch Zahlen.

III. Man theilt die Gleichungen ein

a) nach der Zahl der unbekannten Größen.

1) In Gleichungen mit einer,

2) in Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

b) Nach

b) Nach dem Exponenten der unbekannten Größe.

1) In Gleichungen des erſten Grades, oder einfache, wenn die unbekannte Größe, nachdem ſie nicht mehr als Diviſor und zugleich Factor (verſchiedenen Glieder) ſteht, eine einfache Größe iſt, und die erſte Potenz nicht überſchreitet.

2) In Gleichungen eines höhern Grades, oder zuſammengeſetzte, wenn die unbekannte Größe die erſte Potenz überſteigt; und zwar heißen dieſe höhern Gleichungen: quadratiſche, kubiſche, biquadratiſche, je nach dem die höchſte Würde der unbekannten Größe ein Quadrat, Kubus oder Biquadrat iſt.

Die höhern Gleichungen ſind ferner

α) rein, wenn die unbekannte Größe nur in einer und der nemlichen Potenz,

β) unrein, wenn ſie in verſchiedenen Potenzen vorkommt.

c) Nach der Zahl der möglichen Werthe oder Wurzeln einer Gleichung,

1) in beſtimmte, wenn für die unbekannte Größe nur ein Werth,

2) in unbeſtimmte Gleichungen, wenn für die unbekannte Größe mehrere Werthe möglich ſind.

§. 229.

Man theilt die Algebra ein

I. In die niedere oder Elementar-Algebra, welche ſich mit Löſung der Gleichungen vom erſten bis vierten Grade ſowohl reiner, als unreiner, beſtimmter und unbeſtimmter beſchäftiget, und von der wir hier handeln.

II. In die höhere Algebra, welche die Functionen, die Rechnungen des Unendlichen, den Differenzial- und Integral-Kalkul zum Gegenſtande hat.

Anmerkung. Man nennt die Algebra auch Analyſis (Analytik), und zwar

1) Ana-

1) Analyſis des Endlichen. — Elementaralgebra.
2) Analyſis des Unendlichen. — Höhere Algebra.

Ferner heißt die Erſtere beſtimmte oder unbeſtimmte Analytik, je nach dem ſie ſich mit Löſung beſtimmter oder unbeſtimmter Probleme beſchäftiget.

§. 230.

Allgemeine Grundſätze für alle möglichen Gleichungen.

I. Eine Gleichung bleibt unverändert, wenn man auf beiden Seiten

1) gleiches addirt, oder ſubtrahirt,

2) durch Gleiches multiplicirt, oder dividirt,

3) beiderſeits zu einerlei Würde erhebt, oder gleiche Wurzeln auszieht.

Z. B. α) $x = a + b$
$\pm a = \pm a$
$x \pm a = 2a + b.$
oder $x - a = b.$

β) $x = a + b$
$c = c$
$cx = ac + bc.$
oder $\frac{x}{c} = \frac{a+b}{c}$

γ) $\sqrt{x} = a - 1$
quadirt: $x = a^2 - 2a + 1.$

δ) $x^3 = 24a^3b$
$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{24a^3b} = \sqrt[3]{8a^3} \times 3b = 2a\sqrt[3]{3b}.$

II. Jedes Glied einer Gleichung läßt ſich, wenn man ſein Zeichen verändert, verſetzen; d. i. von einer Seite auf die andere ſchaffen.

z. B. $a + b = x$
$a = x - b.$

oder $x - a = b$
$x = a + b.$

III. Die Zeichen aller Glieder laſſen ſich in die entgegengeſetzten verwandeln; denn auf ſolche Weiſe wird die Gleichung nur durch — 1 multiplicirt.

Z. B. $-x = -a + b$
$x = a - b.$
$12 = 15 - 3$
$-12 = -15 + 3.$

IV. Eine Größe, welche mit der andern durch Multiplication verbunden iſt, läßt ſich davon trennen, wenn man alle Glieder der Gleichung damit dividirt.

Z. B. $6x + 12a = 18b$
6:) $x + 2a = 3b.$

V. Größen, welche bei einer andern als Diviſorn oder Nenner vorkommen, laſſen ſich davon trennen, wenn man damit alle Glieder der Gleichung multiplicirt.

Z. B. $\frac{2a}{3} + 3b = c$

$3 \times \quad 2a + 9b = 3c.$

Denn $\frac{6a}{3} + 9b = 3c$
$(2a + 9b = 3c.)$

VI. Jede Gleichung läßt ſich auf o (Null) bringen, wenn man alle Glieder auf eine Seite ſchafft.

Z. B. $2a + 3b = 4c - d$
$2a + 3b - 4c + d = 0.$

oder $0 = 4c - d - 2a - 3b.$

und $Ax^3 + Bx^2 + Cx = P.$
$Ax^3 + Bx^2 + Cx - P = 0.$

§. 231.

§. 231.

Die Behandlungsart der Gleichungen bezieht ſich auf folgende drei Punkte, welche auch die Momente der Algebra genannt werden.

I. Die Formation oder Bildung der Gleichung aus den gegebenen Bedingungen und bekannten Eigenſchaften der unbekannten Größen. Dadurch wird die Aufgabe aus der bürgerlichen Sprache in die algebraiſche übertragen.

II. Die Reduction, wodurch man der Gleichung eine einfachere und ſchicklichere Geſtalt giebt, vorzüglich wenn die unbekannte Größe als Nenner, oder Wurzelgröße, oder auf beiden Seiten vorkommt.

III. Die Solution, oder endliche Reduction, wodurch die Gleichung zu Ende gebracht, und der Werth der unbekannten Größe, d. i. eine Zahl gefunden wird, welche allen gegebenen Bedingungen der Gleichung entſpricht. — Dieſe gefundene Zahl — oder Zahlen, wenn eine Gleichung derer mehrere zuläßt — nennt man die Werthe oder Wurzeln der Gleichung.

Die Solution muß durch die Probe bewährt werden. Es beſteht aber dieſe darin, daß man für die unbekannte Größe ihr Aequivalent ſetzt (ſubſtituirt), worauf die gegebene Gleichung unverändert bleiben muß, wenn die Solution richtig geſchehen ſeyn ſoll.

Dritter Abſchnitt.
(Elementar-Algebra.)

Von den zur Elementar-Algebra gehörigen Gleichungen und Problemen insbeſondere.

§. 232.

Die Ordnung, in welcher die Gegenſtände dieſes Abſchnittes vorgetragen werden, ergiebt ſich aus folgender Ueberſicht:

Erſtes Hauptſtück. Beſtimmte Analytik, oder von der Löſung beſtimmter Probleme.

Erſter Artikel. Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Zweiter Artikel. Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

Dritter Artikel. Höhere und zwar reine und unrein quadratiſche Gleichungen.

Vierter Artikel. Höhere rein und unrein kubiſche Gleichungen.

Fünfter Artikel. Höhere rein und unrein biquadratiſche Gleichungen.

Zweites Hauptſtück. Unbeſtimmte Analytik, oder von der Löſung unbeſtimmter Probleme.

Erſter Artikel. Von den unbeſtimmten Problemen überhaupt.

Zweiter Artikel. Von der Regula Coeci oder Virginum.

Erſtes Hauptſtück.

Beſtimmte Analytik.

§. 233.

Der Unterſchied zwiſchen beſtimmten und unbeſtimmten Problemen ſoll durch folgendes Beiſpiel deutlich werden. Man habe die beiden Aufgaben:

I. Zwei Zahlen zu finden, welche mit einander 100 betragen.

II. Zwei Zahlen zu finden, derer Summe 100, und Differenz 6 beträgt.

So erkennt man auf den erſten Anblick, daß die erſte Aufgabe unendlich viele Auflöſungen in ganzen und gebrochenen, poſitiven und negativen Zahlen zulaſſe, mithin ein unbeſtimmtes Problem ſey.

Z. B. $1+99=2+98=3+97=4+96=5+95=6+94$ u. ſ. w.
$\frac{1}{2}+99\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+99\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+99\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+99\frac{3}{4}$ u. ſ. w.
$101-1=102-2=103-3=104-4=105-5=100$ u. ſ. w.

Bei der zweiten Aufgabe ſind die Bedingungen ſo beſchränkt, daß nur eine Art der Auflöſung möglich wird, folglich das Problem beſtimmt iſt. Da iſt nemlich die kleinere Zahl $= 47$, die größere $= 53$.

$$53 + 47 = 100$$
$$53 - 47 = 6.$$

Anmerkung. In einiger Rückſicht ließen ſich alle höhern Gleichungen zur unbeſtimmten Analytik rechnen; denn es laſſen, wie ſich in der Folge zeigen wird, die quadratiſchen Gleichungen je zwei, die kubiſchen je drei, die biquadratiſchen je vier verſchiedene Wurzeln zu. Da aber ſelbſt die Unbeſtimmtheit dieſer Gleichungen nach ſehr beſtimmten Regeln geht, und von den mehrern Wurzeln im gemeinen Leben gewöhnlich nur eine brauchbar iſt, ſo mag man die höhern Gleichungen immerhin zur beſtimmten Analytik rechnen.

Anmerkung. 2. Die beſtimmten Probleme haben weit größern Nutzen und größern Umfang, und verdienen in der Behandlung den Vorrang. — Darunter ſind aber die leichteſten, die Einfachen mit einer unbekannten Größe — alſo

Erſter Artikel.

Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

§. 234.

Aufgabe. Eine gegebene einfache Gleichung mit einer unbekannten Größe aufzulöſen.

Auflöſung.

I. Stehen bei der unbekannten Größe bekannte Größen, ſo werden dieſe durch die entgegengeſetzte Rechnungsart hinweggeſchafft; es ſteht aber der Addition die Subtraction;

traction; der Multiplication die Diviſion entgegen, und wechſelweiſe.

Z. B. $3x - 17 = 10.$

$$3x = 10 + 17 = 27$$

$$x = \frac{27}{3} = 9.$$

Oder: $\frac{y+7}{4} = 3$

$$y + 7 = 12$$

$$y = 12 - 7 = 5.$$

II. Kommt die unbekannte Größe ſelbſt als Nenner oder Diviſor vor, ſo werden damit alle übrigen Glieder der Gleichung multiplicirt.

Z. B. $\frac{450}{x} = 9$

$$450 = 9x$$

$$\frac{450}{9} = 50 = x.$$

III. Alle Glieder der unbekannten Größe werden auf die eine, und alle bekannten Größen auf die andere Seite geſetzt.

$$3x - 4 = 7x - 20$$

$$20 - 4 = 7x - 3x.$$

IV. Die Coefficienten der unbekannten Größe werden nun addirt oder ſubtrahirt, je nach dem die Zeichen der Glieder beſchaffen ſind; und mit der Summe oder Differenz der Coefficienten wird in die ganze Gleichung dividirt.

$$7x - 3x = 20 - 4$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4} = 4.$$

V. Sollte die unbekannte Größe negativ erſcheinen, ſo hat man nur alle Zeichen in der Gleichung zu verändern.

Z. B.

Z. B. $9x - 28 = -10x + 10$

$$-38 = -19x$$
$$38 = 19x$$
$$2 = x.$$

Leichter wäre die Aufgabe gelöſet worden, wenn ich die negative unbekannte Größe, als die größere addirt hätte:

$$\begin{array}{r} 9x - 28 = -10x + 10 \\ +10x + 28 = +10x + 28 \\ \hline 19x = 38 \\ x = 2, \end{array}$$

§. 235.

Formen für alle möglichen Fälle von Gleichungen des erſten Grades.

I. $a + x = c.$

$$x = c - a.$$

Beweis. $$\begin{array}{r} a + x = c \\ -a = -a \\ \hline x = c - a. \end{array}$$

II. $x - a + d = h$

$$x = a - d + h.$$

B. $$\begin{array}{r} x - a + d = h \\ +a - d = +a - d \\ \hline x = a - d + h. \end{array}$$

III. $ax = b + c$

$$x = \frac{b+c}{a}$$

B. $$\begin{array}{r} ax = b + c \\ : a = a \\ \hline x = \frac{b+c}{a} \end{array}$$

IV. $\frac{x}{b} = c + d$

$$x = bc + bd.$$

B. $$\frac{x}{b} = c + d$$
$$\frac{xb}{b} = cb + bd.$$

V. $a + x = b - x$

$$2x = b - a$$
$$x = \frac{b-a}{2}$$

B. $$\begin{array}{r} a + x = b - x \\ -a + x = -a + x \\ \hline 2x = b - a \\ x = \frac{b-a}{2} \end{array}$$

VI.

VI. $ax-bx+cx=D$ **Beweis.** $ax-bx+cx=D$

$$x(a-b+c)=D \qquad : a-b+c=a-b+c$$

$$x=\frac{D}{a-b+c} \qquad x=\frac{D}{a-b+c}$$

VII. $\frac{c+d}{x}=a$ B. $\frac{c+d}{x}=a$

$$c+d=ax \qquad \times x = x$$

$$x=\frac{c+d}{a} \qquad \frac{(c+d)x}{x}=ax$$

$$: a = a$$

$$\frac{c+d}{a}=x$$

VIII. $\sqrt{(f-x)}=c.$

$$\Box \qquad f-x=c^2.$$

$$f-c^2=x.$$

* Noch wäre ein Fall übrig: $A^x = B$, wo x als Exponent vorkommt. Zu welcher Würde muß man A erheben, daß B erſcheine? Dieſe Gleichung läßt ſich nur mit Hülfe der Logarithmen löſen, und gehört alſo nicht hieher.

§. 236.

Hat man ein mathematiſches Problem aus der gemeinen bürgerlichen in die algebraiſche Sprache überzutragen, und daraus eine Gleichung zu formiren, ſo kommt alles darauf an, daß man zuerſt alle Umſtände und Bedingniſſe der Angabe wohl erwäge, und nach denſelben die unbekannte Größe verändere und modificire, ſo daß ein doppelter Ausdruck von einer und der nemlichen Größe zum Vorſchein komme. — Man kann ſich die Formation der Gleichungen dadurch erleichtern, daß man die unbekannte Zahl als ſchon bekannt anſieht, und mit einer willkührlich angenommenen Zahl gleichſam die Probe zu machen ſucht; denn dadurch wird man genöthiget, alle Bedingungen des Problemes um ſo fleißiger zu überdenken. — Wenn ſich nun die angenommene Zahl als falſch bewährt, ſo ſubſtituirt man dafür die

allge-

allgemeine Größe x, und nimmt damit die nemliche Behandlung vor, wie vorhin mit dem Numerus falsus.

Man habe das Problem: der Vater einer Familie zählt gegenwärtig 61, ſein jüngſter Sohn 13 Jahre. Wie lange wird es hergehen, bis der Vater gerade dreimal ſo alt wird, als der Sohn?

Wir nehmen an, es gehe noch 6 Jahre her. Da nun nach ſechs Jahren ſowohl der Vater als der Sohn um eben ſo viele Jahre älter wird, ſo muß, wenn man zu den gegenwärtigen Lebensjahren beider 6 addirt, das Alter des Sohnes, dem dritten Theile von dem Alter des Vaters gleichen:

$$\frac{61+6}{3} = 13 + 6$$

$$\frac{67}{3} = 19,$$ was unrichtig iſt.

Nun ſubſtituire man anſtatt 6 die Größe x.

$$\frac{61+x}{3} = 13 + x$$

$$61 + x = 39 + 3x$$

$$61 - 39 = 2x$$

$$\frac{22}{2} = x$$

$11 = x$. — Alſo 11 Jahre wird es hergehen, bis das Alter des Vaters das Dreifache von dem Alter des Sohnes beträgt.

Probe. $$\frac{61+11}{3} = 13 + 11$$

$$\frac{72}{3} = 24$$

$$72 = 24 \cdot 3.$$

Anmerkung. 1. Bei einigen Problemen muß man eine etwas längere Vorbereitung vorausſchicken, ehe eine wahre Gleichung formirt werden kann. Man habe z. B. das Problem: „Ein Spieler vermehrte am erſten Tiſch ſein

Geld um die Hälfte und noch 1 Gulden. Am zweiten Tiſche das Ganze wieder um die Hälfte und 2 Gulden. Am dritten Tiſche wieder um die Hälfte und 3 Gulden; und nun ſah er ſich viermal ſo reich, als bei dem Anfange des Spieles (am erſten Tiſche). Wie viel hatte er zuerſt Geld gehabt?— Und wieviel an jedem Tiſche gewonnen?

Aufldſung. Der Spieler hatte, als er zu ſpielen anfieng, x Gulden, damit gewann er am erſten Tiſche $\frac{x}{2} + 1$; folglich $x + \frac{x}{2} + 1 = \frac{3x+2}{2}$.

Am zweiten Tiſche vermehrte er das Ganze wieder um die Hälfte und 2 Gulden, d. i. um $\frac{3x+2}{4} + 2$; folglich hatte er: $\frac{3x+2}{2} + \frac{3x+2}{4} + 2 = \frac{6x+4+3x+2+8}{4} = \frac{9x+14}{4}$

Mit dieſem Gelde begab er ſich zum dritten Tiſche, und vermehrte es wieder um die Hälfte und 3 Gulden, d. i. um $\frac{9x+14}{8} + 3$.. folglich der ganze Gewinn nebſt der Auslage:

$$\frac{9x+14}{4} + \frac{9x+14}{8} + 3 = \frac{18x+28+9x+14+24}{8}$$
$$= \frac{27x+66}{8}$$

Da nun dieſes nach der Angabe das Vierfache des Geldes ſeyn ſoll, das der Spieler am Anfange hatte, ſo wird die Gleichung formirt $\frac{27x+66}{8} = 4x$.

Operation. $27x + 66 = 32x$.
$66 = 5x$.
$13\frac{1}{5}$ fl. $= x$.

Alſo fieng er mit 13 Gulden 12 Kreuzer zu ſpielen an.

Probe.

Erſtes Spiel. 13 fl. 12 kr.
\+ 6 36
\+ 1
20 fl. 48 kr.

Zweites

Zweites Spiel. 20 fl. 48 kr.
+ 10 24
+ 2
33 fl. 12 kr.

Drittes Spiel. 33 fl. 12 kr.
16 36
3
52 fl. 48 kr.

Nun ſind 52 Gulden 48 Kreuzer wirklich das Vierfache von 13 Gulden 12 Kreuzer.

Anmerkung 2. Manchmal ſcheint ein Problem zwei unbekannte Größen zu enthalten, da in der That nur eine unbekannt iſt, indem ſich die andere leicht aus der erſten beſtimmen läßt, wenn man dieſe einmal gefunden hat. — Man habe z. B. das Problem: „In einer Börſe befinden ſich 100 Stücke, theils Laub-, theils Kronthaler, welche zuſammen 274 Gulden betragen. Wie viel ſind es von jeder Sorte?"

Auflöſung. Es ſeyen x Laubthaler, folglich 100—x Kronthaler. Um eine Gleichung zu formiren, muß ich erſt die Kron- und Laubthaler auf Gulden reduciren, damit auf beiden Seiten der Gleichung der Ausdruck Gulden erſcheine.

x Laubthaler $= x \times \frac{11}{4}$ fl. $= \frac{11x}{4}$

(100 — x) Kronthaler $= (100-x) \times \frac{27}{10}$ fl. $= \frac{2700-27x}{10}$

Die Summe beider = 274 Gulden...

folglich: $\frac{11x}{4} + \frac{2700-27x}{10} = 274$

auf gleichen Nenner gebracht: $\frac{55x + 5400 - 54x}{20} = 274$

$20 \times\ 55x + 5400 - 54x = 6480.$

abgekürzt: $x = 5480 - 5400$

$x = 80$ Laubthaler

folglich $100 - x = 100 - 80 = 20$ Kronthaler.

 Probe.

Probe. 80 Laubthaler 80 Lbth. $= 80 \times \frac{11}{4} = 220$ fl.
20 Kronthaler
100 Stücke. 20 Krth. $= 20 \times \frac{27}{10} = 54$
Summe 274 fl.

§. 237.

Probleme mit einer unbekannten Größe.

I. Man zertheile die Zahl 102 in drei Theile, wovon immer der folgende um 1 noch ſo groß, als der vorhergehende iſt.

Auflöſung. I. Theil $= x \ldots\ldots = x$
II. — $= 2x + 1 \ldots = 2x + 1$
III. — $= 2(2x+1)+1 = 4x + 3$
Summe $= 7x + 4.$

Aequat. $7x + 4 = 102.$
$7x = 98$
$x = \frac{98}{7} = 14.$

Probe. I. Theil $= x = 14$
II. — $= 2x+1 = 29$
III. — $= 4x+3 = 59$
Summe $= 102.$

II. Es wurden 15 Pfund Kaffee und 18 Pfund Zucker um 69 Gulden gekauft. Das Pfund Zucker koſtete aber 10 Kreuzer mehr, als das Pfund Kaffee. — Welches war nun der Preis eines Pfundes jeder Sorte?

Auflöſung. Der Preis des Kaffee ſey x,
folglich des Zuckers $x + \frac{1}{6}$ fl... denn 10 kr. $= \frac{1}{6}$ fl.
15 Pfund Kaffee koſten $15x$
18 Pfund Zucker $(x + \frac{1}{6})\, 18 = 18x + 3.$

Aequat. $15x + 18x + 3 = 69$
$33x = 66$
$x = 2$ fl. ſoviel koſtete 1 Pfund Kaffee.;
folglich 1 Pfund Zucker 2 fl. 10 kr.

Die Probe zur Selbſtübung!

III.

III. Ein Vater hinterläßt ſeinen drei Söhnen ein Erbe von 3000 Gulden, welches ſie ſo unter ſich theilen ſollen, daß der Zweite weniger 100 fl. noch ſo viel, als der Erſte; der Dritte weniger 200 fl. noch ſo viel, als der Zweite erhalte. Wie muß die Theilung nach dem Willen des Vaters vor ſich gehen?

Auflöſung.

Antheil des I. = x fl.
— — II. = 2x — 100
— — III. = 4x — 400.

Aequat. $7x - 500 = 3000$
$7x = 3500$
$x = 500$ fl.

Probe.

Antheil des I. = 500 fl.
— — II. = 900
— — III. = 1600

Summe = 3000 fl.

IV. Der Dom zu Regensburg wurde im Jahre 1275, und die ſteinerne Brücke daſelbſt im Jahr 1135 zu bauen angefangen. — Wenn war, oder wird die Brücke gerade zweimal ſo alt, als der Dom?

Auflöſung. Man beſtimme das gegenwärtige Alter ſowohl des Domes, als der Brücke im heurigen Jahre 1812.

$$\left.\begin{array}{r} 1812 \\ 1275 \\ \hline 537 \text{ Jahr} \end{array}\right\} \text{gegenwärtiges Alter des Domes.} \qquad \left.\begin{array}{r} 1812 \\ 1135 \\ \hline -677 \end{array}\right\} \text{gegenwärtiges Alter der Brücke.}$$

Aequat. $537 - x = \frac{677 - x}{2}$

$$\begin{array}{rcl} 1074 - 2x & = & 677 - x \\ -677 + 2x & = & -677 + 2x \\ \hline 397 & = & x. \end{array}$$

Alſo

Alſo vor 397 Jahren war die Brücke eben zweimal ſo alt als der Dom; denn jene zählte damals 280, dieſer 140 Jahre; aber $\frac{280}{2} = 140$.

V. Es ſoll eine Summe Geldes unter eine Anzahl Armer vertheilt werden. Wollte man nun jeder Perſon 4 Gulden reichen, ſo wären 32 Gulden zu viel; gäbe man aber jeder Perſon 4 Gulden 30 kr., ſo wären 51 Gulden 30 kr. zu wenig. — Wie viel ſind es nun Arme? — Wie viel beträgt das zu vertheilende Geld?

Auflöſung. Die Zahl der Armen = x, folglich beträgt die Summe Geldes einmal $4x + 32$ fl.

das andere Mal $4\frac{1}{2}x - 51\frac{1}{2}$ fl. $= \frac{9x-103}{2}$ fl.

Aequat. $4x + 32 = \frac{9x-103}{2}$

$$\begin{array}{r} 8x + 64 = 9x - 103 \\ -8x + 103 = -8x + 103 \\ \hline 167 = x \end{array}$$

alſo 167 Arme, und das zu vertheilende Geld

entweder $(167 \times 4) + 32$ fl.
oder $(167 \times \frac{9}{2}) - 51\frac{1}{2}$ fl. $\Big\} = 700$ fl.

VI. In drei unglücklichen Jahren verlohr ein Schäfer beinahe ſeine ganze Heerde; denn im erſten Jahre rafte die Seuche die Hälfte der Schafe und 1; im zweiten wieder die Hälfte des Reſtes und 2; im dritten wieder die Hälfte des Reſtes und 3 hinweg. — Wie viele waren es anfänglich geweſen, da er nur noch den fünf und zwanzigſten Theil der ganzen Heerde beſitzt?

Auflöſung. Die Anzahl aller Schafe = x.

Verluſt des erſten Jahres $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{x+2}{2}$. Erſter Reſt $\frac{x-2}{2}$.

— des zweiten $\frac{x-2}{4} + 2 = \frac{x+6}{4}$. Zweiter Reſt $\frac{x-10}{4}$.

— des dritten $\frac{x-10}{8} + 3 = \frac{x+14}{8}$.

Bringt

Bringt man nun dieſe Verluſte auf gleichen Nenner, und addirt ſie, ſo erhält man die Summe

$$\frac{4x+8+2x+12+x+14}{8} = \frac{7x+34}{8}.$$

Dieſes beträgt die ganze Heerde, weniger den 25ſten Theil.

Alſo Aequation: $\frac{7x+34}{8} = x - \frac{x}{25}$

$$\frac{7x+34}{8} = \frac{24x}{25}$$

$$175x+850 = 192x$$

$$850 = 17x$$

$$50 = x.$$

Es waren alſo 50 Schafe.

Probe.

Erſtes Jahr. Verluſt $\frac{50}{2} + 1 = 26$. Reſt 24.

Zweites Jahr. Verluſt $\frac{24}{2} + 2 = 14$. Reſt 10.

Drittes Jahr. Verluſt $\frac{10}{2} + 3 = 8$. Reſt 2.

Es betrug alſo der ganze Verluſt 48 Schafe. — Die noch übrigen zwei betragen den 25ſten Theil vom Ganzen; denn $\frac{50}{25} = 2$.

VII. Ein Gaſtgeber machte aus zweierlei Weinen, zu 2 Gulden, und 1 Gulden 30 Kreuzer die Maß, ein Gemiſche von zwei Eimern, ſo daß die Maß des gemiſchten Weines auf 1 Gulden 49 Kreuzer 1 Pfennig zu ſtehen kam. Wie viel hatte er von jeder Weinſorte in die Miſchung genommen?

Aufloͤſung. Von der beſſern Sorte x Maß, folglich von der ſchlechtern 120 — x Maß.

x Maß, à 2 fl. koſten 2x fl.

(120

$(120-x)$ Maß, à $1\frac{1}{2}$ fl. $= (120-x)\frac{3}{2} = \frac{360-3x}{2}$ fl.

1 fl. 49 kr. 1 Pf. $= 109\frac{1}{4}$ kr. $= \frac{437}{240}$ fl.

Aequation. $2x + \frac{360-3x}{2} = \frac{437}{240} \times 120$

$$2x + \frac{360-3x}{2} = \frac{437}{2}$$
$$4x + 360-3x = 437$$
$$x = 437-360$$
$$x = 77 \text{ Maas.}$$

Alſo 77 Maß des beſſern, und (120—77 d. i.) 43 Maß des ſchlechtern Weines kamen in die Miſchung. — Die Probe zur Uebung.

VIII. Wie heißt die Zahl, deren dritter und ſechster Theil addirt und durch 4 multiplicirt das Doppelte dieſer Zahl giebt?

Auflöſung. Dieſe Zahl heiße x, ſo iſt $\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right)4$

$$= \left(\frac{3x}{6}\right)4 = 2x$$
$$\frac{12x}{6} = 2x$$
$$12x = 12x$$
$$x = x.$$

Derley Gleichungen, worin die unbekannte Zahl beiderſeits im nemlichen Ausdruck erſcheint, heißen identiſche (das nemliche ſagend). Man nehme für x was immer für eine Zahl, ſo wird ſie die Bedingniſſe des Problems erfüllen.

IX. Ein Vater wurde einſt über das Alter ſeines Sohnes gefragt. Er antwortete: Vor 5 Jahren war ich dreimal ſo alt, als mein Sohn; und in 7 Jahren werde ich zweimal ſo alt ſeyn, als er. — Wie mußten ſie ſich dieſe Antwort auslegen?

Auf-

Auflöſung. Vor 5 Jahren zählte der Sohn x, der Vater 3x Jahre. Gegenwärtig jener x + 5, dieſer 3x + 5 Jahre; folglich nach 7 Jahren

$$\frac{3x+5+7}{2} = x+5+7$$

$$\frac{3x+12}{2} = x+12$$

$$3x+12 = 2x+24$$

$$x = 12.$$

Alſo war vor 5 Jahren der Sohn 12, der Vater 36 Jahr alt. Gegenwärtig zählt jener 17, dieſer 41 Jahre. Nach 7 Jahren wird der Vater 48, der Sohn 24 Jahr alt; aber $\frac{48}{2} = 24$.

X. Es wurde ein Kapital ſammt ſeinen ſechsjährigen Intereſſen zu $3\frac{2}{3}$ fl. Prozent, in Allem 5490 fl. heimbezahlt. — Welches war das Kapital? welches die Intereſſen? —

Auflöſung. Es ſey das Kapital = x
Kapital und Intereſſen (5490) = S.
Das Prozent ($3\frac{2}{3}$) = p.
Die Auslagezeit (6) = a.
und 100 = c.

Nun die Intereſſen von x Kapital zu p Prozent in a Jahren geſucht!

Z. fl. ?	x Kap.
Kap. c.	a Jahr
Jahr 1	p. fl. Inter.

$$? = \frac{apx}{c}$$

Folglich $x + \frac{apx}{c} = S.$

$$cx + apx = cS.$$

$$x(c+ap) = cS.$$

$$x = \frac{cS.}{c+ap.}$$

Nun

Nun ſubſtituirt

$$x = \frac{100 \times 5490}{100 + (6 \times \frac{11}{3})} = \frac{549000}{122} =$$
$$= 4500 \text{ fl. Kapital.}$$

Davon ſind die 6jährigen, $3\frac{2}{3}$ procent. Zinſen

$$\frac{6 \times 11 \times 45}{3} = 2 \cdot 11 \cdot 45 = 2 \cdot 495 = 990.$$

Aber $4500 + 990 = 5490$ fl.

XI. Eine beſtimmte Quantität von Brettern liefert die Schneidemühle A in 8 Tagen, die Mühle B in 10 Tagen, die Mühle C in 20 Tagen. — Innerhalb welcher Zeit werden die 3 Mühlen mit einander die nemliche Quantität abliefern können?

Auflöſung. In x Tagen.

Allgemein ſey die Zeit von A = a
von B = b
von C = c.

Nun ſuche man die innerhalb der Zeit x von jeder Mühle zu liefernde Quantität.

A)		B)		C)	
?	x Tage	?	x	?	x
a	1	b	1	c	1
$\frac{x}{a}$.		$\frac{x}{b}$.		$\frac{x}{c}$.	

Alſo $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1$

$$\frac{bcx + acx + abx}{abc} = 1.$$
$$x\,(bc + ac + ab) = abc$$
$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

Nun ſubſtituirt

$$x = \frac{8 \cdot 10 \cdot 20}{200 + 160 + 80} = \frac{1600}{440} = 3\tfrac{7}{11} \text{ Tage.}$$

XII. Einige

XII. Einige Kaufleute theilten den gemeinſchaftlich eroberten Gewinn auf folgende Weiſe: der Erſte nahm 100 fl. und vom Reſte den ſiebenten Theil; der zweite 200 fl. und vom Reſte den ſiebenten Theil; und ſo fort, jeder von den übrigen um 100 fl. mehr, als der vorhergehende, und vom Reſte den ſiebenten Theil. Am Ende fand ſich, daß jeder gleich viel erhalten hatte.

Welches war der vertheilte Gewinn? — Wie viel waren es Kaufleute? — Und wie viel erhielt ein jeder?

Aufloſung. Der gemeinſchaftliche Gewinn = x fl.

Antheil des Erſten. $100 + \frac{x - 100}{7} = \frac{600 + x}{7}$

folglich Reſt $x - \frac{600 - x}{7} = \frac{6x - 600}{7}$.

Antheil des Zweiten. $200 + \frac{\frac{6x - 600}{7} - 200}{7}$

$$= \frac{9800 + 6x - 600 - 1400}{49} = \frac{7800 + 6x}{49}.$$

Da nun der Antheil beider gleich groß iſt, ſo hat man die Aequation:

$$\frac{600 + x}{7} = \frac{7800 + 6x}{49}$$

$$4200 + 7x = 7800 + 6x$$

$$x = 3600.$$

Alſo war der zu vertheilende Gewinn 3600 fl.

Der Erſte erhielt $100 + \frac{3500}{7} = 600$ fl.

Der Zweite — $200 + \frac{2800}{7} = 600$ fl.

Der Dritte — $300 + \frac{2100}{7} = 600$ fl.

Der Vierte — $400 + \frac{1400}{7} = 600$ fl.

Der Fünfte — $500 + \frac{700}{7} = 600$ fl.

Der Sechste — $600 + \frac{0}{7} = 600$ fl.

und es waren 6 Kaufleute; denn $\frac{3600}{600} = 6$ —

XIII.

XIII. Von zwei Nachbarn lieh der Erſte (A) 4000 fl. zu 4 Procent; der andere aber, wiewohl drei Jahre ſpäter, 5000 fl. zu 5 Procent aus. — Wie lange wird es hergehen, bis der Nachbar B eben ſo viel Zins ziehe, als Nachbar A?

Auflöſung. Es währe x Jahre. Nun durch die Proportion beſtimmet, wie viel Zins beide Kapitale innerhalb dieſer Zeit abwerfen.

Z ?	4000 fl.		Z ?	5000 K.
	x + 3 J.			5 J.
100			100	5
1	4			
? = 160x + 480.			? = 250x.	

Aequation. $160x + 480 = 250x$
$$\begin{array}{r} -160 \quad\quad -160x \\ \hline 480 = 90x \\ x = 5\tfrac{1}{3} \text{ Jahr.} \end{array}$$

Anmerkung. Da der Erſte A) ſchon um 3 Jahre früher ſein Kapital ausgeliehen hat, ſo iſt ſeine Auslagzeit $x + 3 = 8\frac{1}{3}$.

Probe.

Z. fl. ?	4000 fl. K.		Z. fl. ?	5000 fl. K.
K. 100	$8\frac{1}{3}$ J.		K. 100	$5\frac{1}{3}$ J.
J. 1	4 fl. Z.		J. 1	5 fl. Z.
3	25.		3	16

$? = \frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}$ fl. $\quad ? = \frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}$ fl.

XIV. Ein Vater hatte mit ſeinen 2 Söhnen folgenden Vertrag geſchloſſen. Für jeden Tag, den ihr mit Studiren zubringet, zahle ich jedem von euch 12 kr.; für jeden Tag des Müſſigganges hingegen zahlt ihr mir, ein jeder 15 kr.

Nach Verlauf eines Jahres wurde Abrechnung gehalten. Da fand ſich denn, daß der Vater dem Jüngern 1 Gulden, und der Aeltere dem Vater 8 Gulden ſchuldig war. — Wie lange war jeder der beiden Söhne fleißig, wie lange müſſig geweſen?

Auf-

Auflöſung. Dieſe Aufgabe enthält zwei Aequationen.

1) Für den erſten Sohn .. x Tage des Fleißes
(365 − x) Tage des Müſſigganges.

12 kr. = $\frac{1}{5}$ fl. 15 kr. = $\frac{1}{4}$ fl.

$$(365 - x)\tfrac{1}{4} + 1 = \frac{x}{5}$$

$$\frac{365 - x}{4} + 1 = \frac{x}{5}$$

$$20 \times \quad 1825 - 5x + 20 = 4x$$

$$1845 = 9x$$

205 = x Tage des Fleißes.

365 − 205 = 160 Tage des Müſſigganges.

Probe. $205 \times \frac{1}{5} = 41$ fl.
$160 \times \frac{1}{4} = 40$ fl.

2) Für den zweiten Sohn.

$$\frac{365 - x}{4} - 8 = \frac{x}{5}$$

$$20 \times \quad 1825 - 5x - 160 = 4x$$

$$1665 = 9x$$

185 = x Tage des Fleißes.

365 − 185 = 180 des Müſſigganges.

Probe. $185 \times \frac{1}{5} = 37$ fl.
$180 \times \frac{1}{4} = 45$ fl.

Zweyter Artikel.

Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

§. 238.

Wenn mehrere Größen unbekannt ſind, ſo müſſen auch mehrere Gleichungen — und in der Regel ſo viele — gegeben ſeyn, als Größen unbekannt ſind. Aus einer Gleichung läßt ſich nemlich nur die Summe, oder die Differenz, oder das

das Produkt, oder der Quotient von zwei unbekannten Größen angeben, ohne daß man die beiden Größen ſelbſt weiß.— Man bedient ſich aber, um mehrere unbekannte Größen auszudrücken, der Buchſtaben u, x, y, z.

z. B. $x - a = y$	$x = q \cdot y$
$x - y = a$	$\frac{x}{y} = q.$
$x - b = c - y.$	$x = \frac{p}{y}$
$x + y = c + b.$	$xy = p.$

Wenn ich aber auch weiß, z. B. daß $x.y = 60$ u. ſ. w., ſo reicht dieſes noch nicht hin, die Werthe von x und y beſtimmt anzugeben, indem hier unendlich viele Werthe von x und y in ganzen und gebrochenen, poſitiven und negativen Zahlen ſtatt haben können. — Eben ſo läßt ſich aus zwei Gleichungen in der Regel nicht der Werth für drei unbekannte Größen beſtimmt finden und ſo analogiſch bei vier, fünf ꝛc. unbekannten Größen. — Es iſt aber die allgemeine Form für ſolche Gleichungen:

$$ax + by + cz = S \ldots \text{ u. ſ. w.}$$

§. 239.

Man hat aber dreierley Wege, derlei Gleichungen aufzulöſen; nämlich die Subſtitution, die Comparation, und die Elimination.

I. Die Subſtitution beſteht darin, daß man anſtatt einer unbekannten Größe x oder y ihren Werth ſetzt, den man wie immer durch eine Nebengleichung zu erhalten ſucht:

z. B. Man habe die Gleichungen:

$$x = 18 + y$$

und $2x + y = 51.$

Ich kann nun hier entweder 1) einen Werth von x, oder 2) einen Werth von y ſubſtituiren, indem ſich Gleiches für Gleiches ſetzen läßt.

1) Sub-

1) Subſtituire ich in der zweiten Gleichung den Werth von x.

(x = 18 + y) ſo ergiebt ſich

$$2(18 + y) + y = 51$$
$$36 + 2y + y = 51$$
$$36 + 3y = 51$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

Subſtituire ich nun ferner dieſen Werth von y in der erſten Gleichung, ſo erhalte ich auch den Werth von x

$$x = 18 + 5 = 23.$$

2) Subſtituire ich aber in der zweiten Gleichung lieber den Werth von y, den ich leicht aus der erſten Gleichung herausfinden kann,

$$x = 18 + y$$
$$y = x - 18$$

ſo erhalte ich: $2x + x - 18 = 51$

$$3x = 69$$
$$x = 23$$

und $y = 23 - 18 = 5.$

II. Die Comparation beſteht darin, daß man aus der Zuſammenſtellung der Werthe einer und der nämlichen Größe den Werth einer zweiten ſucht. Sie gründet ſich auf das Axiom: Wenn zwei Dinge einem dritten gleich ſind, ſo ſind ſie auch unter ſich gleich.

1 Thlr. = 30 Gr.
1 Th. = 90 kr.
30 Gr. = 90 kr.
1 Gr. = 3 kr.

Sollte ich die vorhergegebene Gleichung durch den Weg der Comparation auflöſen, ſo könnte ich alſo verfahren:

1) Ich mache aus der Gleichung $2x + y = 51$ die Nebengleichung

$$2x = 51 - y$$
$$x = \frac{51 - y}{2}.$$

Nun habe ich zweierlei Werthe von x

$$x = 18 + y$$
$$x = \frac{51 - y}{2}$$

Comparirt $18 + y = \frac{51 - y}{2}$

$$36 + 2y = 51 - y$$
$$3y = 15$$
$$y = 5$$

Der Werth von x wird durch die Subſtitution gefunden:

$$x = 18 + 5 = 23$$

oder $x = \frac{51 - 5}{2} = \frac{46}{2} = 23$

oder 2) ich ſuche zwei Werthe von y, indem ich zwei Nebengleichungen bilde und comparire.

$x = 18 + y$ Nebengleichungen $y = x - 18$

$2x + y = 51$ $y = 51 - 2x$

compar. $x - 18 = 51 - 2x$

$$3x = 69$$
$$x = 23$$

Nun wird y durch Subſtitution gefunden

$$y = 23 - 18 = 5$$

oder $y = 51 - 46 = 5$.

III. Die Elimination (oder richtiger Conjunktion) ſucht zwei Gleichungen — durch Addition oder Subtraktion — ſo mit einander in Verbindung zu bringen, daß eine unbekannte Größe gänzlich hinweggeſchafft wird. Manchmal ſind die gegebenen Gleichungen ſchon von der Art, daß ſich die Elimination ſogleich bewirken läßt; manchmal muß man

man die Gleichungen — eine oder beide — zuerſt durch Multiplikation, oder Diviſion dazu vorbereiten. Die Elimination hat ihren guten Nutzen, wenn drei oder vier Größen unbekannt ſind; kann aber auch bei zwei unbekannten Größen angewendet werden, z. B. in den vorhergehenden Gleichungen

$$x = 18 + y$$
$$2x + y = 51$$

entdecke ich leicht, daß ſich durch die Addition (oder auch Subtraction) beider Gleichungen die Elimination der Größe y bewirken laſſe.

$$\begin{array}{rl} & x = 18 + y \\ & 2x + y = 51 \\ \hline \text{add.} & 3x + y = 69 + y \\ & -y = \quad -y \\ \hline & 3x = 69 \\ & x = 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{ſubtrahirt} & 2x + y = 51 \\ & 18 + y = x \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & 2x - 18 = 51 - x \\ & 3x = 69 \\ & x = 23. \end{array}$$

§. 240.

Probleme mit mehrern unbekannten Größen.

I. Man ſuche zwei Größen, derer Summe S, und Differenz d iſt.

Aufloſung. Die Zahlen heißen x, y, und $x > y$.

$$\begin{array}{rl} 1) & x + y = S \\ & x - y = d \\ \hline \text{add.} & 2x = S + d \\ & x = \frac{S + d}{2} \end{array}$$

$$2)\quad x + y = S$$
$$\underline{\begin{array}{r} -\,x - y = d \\ -\quad +\quad - \end{array}}$$

ſubtrahirt $2y = S - d$

$$y = \frac{S - d}{2}$$

II. Welches ſind die Werthe von x und y in dem Probleme:

$$x + cy = \varphi$$
$$bx + y = \mu.$$

Auflöſung durch Comparation.

$$1)\quad x = \varphi - cy$$
$$x = \frac{\mu - y}{b}$$

Comparirt $2)\quad \varphi - cy = \frac{\mu - y}{b}$

$$b\varphi - bcy = \mu - y$$
$$b\varphi - \mu = bcy - y = y\,(bc - 1)$$
$$\frac{b\varphi - \mu}{bc - 1} = y.$$

3) Um nun für x einen Werth zu finden, ſubſtituire Ich in der erſten, oder zweiten Gleichung die gefundene Größe für y.

a) entweder

$$x = \varphi - c\,\frac{(b\varphi - \mu)}{bc - 1}$$
$$= \frac{bc\varphi - \varphi - bc\varphi + c\mu}{bc - 1.}$$
$$= \frac{c\mu \quad \varphi}{bc - 1}$$

oder b)

$$x = \left[\frac{\mu - \left(\frac{b\varphi - \mu}{bc - 1}\right)}{b}\right]$$
$$= \frac{bc\mu - \mu - b\varphi + \mu}{b\,(bc - 1)}$$
$$= \frac{c\mu - \varphi}{bc - 1.}$$

III. Eine Lieferung von 3 Centner Zucker und 4 Centner Kaffee wurde um 950 Gulden; eine zweite von 2 Centner Zucker und 5 Centner Kaffee um 925 Gulden, bei einerley

Waaren-

Waaren-Preiſe, bezahlt. Wie theuer kam das Pfund von beiden Sorten?

Aufloſung. Das Pfund Zucker koſte x fl.
Das Pfund Kaffee koſte y fl.

Nebengleichungen.

1) $300x + 400y = 950$ fl.	$x = \frac{19-8y}{6}$
2) $200x + 500y = 925$ fl.	$x = \frac{37-20y}{8}$.

Comparirt 3) $\frac{19-8y}{6} = \frac{37-20y}{8}$

$$24\times \quad 76-32y = 111-60y$$
$$-76+60y = -76+60y$$
$$28y = 35$$
$$y = \tfrac{35}{28} = \tfrac{5}{4} = 1 \text{ fl. } 15 \text{ kr.}$$

4) Um für x einen Werth zu finden, ſubſtituire man den Werth von y in der erſten Nebengleichung

$$x = \frac{19-8\cdot\frac{5}{4}}{6} = \frac{19-10}{6}$$

$$x = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2} = 1 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}$$

Probe.

Erſte Lieferung.

300 Pfd. Zucker à 1 fl. 30 kr. = 450 fl.
400 Pfd. Kaffee à 1 fl. 15 kr. = 500 fl.
Summe = 950 fl.

Zweite Lieferung.

200 Pfd. Zucker = 300 fl.
500 Pfd. Kaffee = 625 fl.
Summe = 925 fl.

IV. Ein Vater legte ſeinem Sohne, um deſſen Geſchicklichkeit in der Mathematik zu prüfen, folgende Aufgabe vor: Ich habe hier zwei Geldbörſen: nehme ich von der erſten 3 Gulden, und lege ſie in die zweite, ſo enthält dieſe noch einmal ſo viel, als die erſte. Lege ich aber 5 Gulden

 aus

aus der zweiten in die erſte, ſo enthält dieſe die dreifache Summe von jener. — Wie viel Geld iſt in jeder Börſe?

Auflöſung. Die Börſe A) enthält x
Die Börſe B) — y fl.

Aequation. 1) $x-3=\frac{y+3}{2}$. Nebengleich. $x=\frac{y+9}{2}$

2) $y-5=\frac{x+5}{3}$. . . . . . $x=3y-20$.

Comparirt 3) $\frac{y+9}{2}=3y-20$

$y+9=6y-40$

$49=5y$

$9\frac{4}{5}$ fl. $=y$.

4) $x=\frac{\frac{49}{5}+9}{2}=\frac{47}{5}=9\frac{2}{5}$ fl.

Probe. Die erſte Börſe enthielt 9 Gulden 24 Kreuzer. Die zweite 9 Gulden 48 Kreuzer. Nehme ich aus jener 3 fl., und lege ſie in dieſe, ſo enthält jene 6 fl. 24 kr., dieſe 12 fl. 48 kr. Aber $\frac{12\text{ fl. }48}{2}=6$ fl. 24 kr. Nehme ich aber aus der zweiten Börſe 5 fl. und lege ſie in die erſte, ſo enthält jene 4 fl. 48, dieſe 14 fl. 24 kr. — Nun iſt (4 fl. 48) 3 = 14 fl. 24 kr.

V. Zwei ſpielten miteinander. Im erſten Spiele verlohr der Erſte den dritten Theil ſeines Geldes an den Zweiten, welcher daher dreimal ſo reich wurde, als der Erſte. Im andern Spiele aber verſpielte der Zweite den dritten Theil ſeines Geldes an den Erſten, der ſich nun um 20 kr. reicher ſah, als am Anfange des Spiels. Welches war das Spielvermögen von beiden?

Auflöſung. A hatte am Anfange x fl.
B — — — y fl.

1) $\frac{2}{3}x=\frac{y+\frac{1}{3}x}{3}$. Nebengleichung $x=\frac{3y}{5}$.

oder $2x=y+\frac{1}{3}x$

$5x=3y$.

2) $\frac{y + \frac{1}{3}x}{3} + \frac{2}{3}x = x + \frac{1}{3}$ fl.

$\frac{3y + x + 6x}{9} = x + \frac{1}{3}$

$\times 9 \ldots \; 3y + 7x = 9x + 3$

$3y = 2x + 3$ . . . Nebengl. $x = \frac{3y - 3}{2}$

3) Comparirt. $\frac{3y - 3}{2} = \frac{3y}{5}$

$15y - 15 = 6y$

$9y = 15$

$y = \frac{15}{9} = 1\frac{2}{3}$ fl.

folglich $x = \frac{3y}{5} = \frac{3 \times 5}{5 \cdot 3} = 1$ fl.

Es hatte alſo der Erſte 1 fl., der Zweite $1\frac{2}{3}$ fl., als ſie zu ſpielen anfiengen.

VI. In einer Schatulle befinden ſich 2194 fl. 30 kr. in Karolinen und Dukaten (à 5 fl. 30 kr.), welche Netto 2 Pfd. 31 Loth wägen. Wie viele Geldſtücke von jeder Sorte mögen es ſeyn, da 804 Dukaten, eben ſo wie 288 Karolin 5 baieriſche Pfunde ſchwer ſind?

Aufloſung. Es ſeyen x Dukaten.
y Karolin

und um die großen Zahlen zu vermeiden ſey $2194\frac{1}{2} = S$.

2 Pfd. 31 Loth = 95 Loth = P.

804 = a . 288 = b.

Der Geldwerth von x Dukaten und y Karolin giebt die eine — das Gewicht beider Münzen giebt die andere Gleichung.

1) $\frac{11x}{2} + 11y = S.$

$11x + 22y = 2S.$

$x = \frac{2S - 22y}{11}.$

2) Ge-

2) Gewicht von x Dukaten $= \frac{160x}{a}$

Loth ?	x D.
a.	5. 32 Loth.
Antw.	$\frac{160x}{a}$

Gewicht von y Karolin $= \frac{160y}{b}$ aus dem nemlichen Grunde.

$$\text{Folglich } \frac{160.x}{a} + \frac{160.y}{b} = P.$$

$$160.bx + 160\,ay = ab\,P.$$

$$x = \frac{ab\,P. - 160.ay}{160.b.}$$

3) Comparirt $\frac{2S - 22y}{11} = \frac{abP - 160.ay}{160.b.}$

$$320.bS - 352\,by = 11.abP - 176.ay$$

$$+176\,ay = \quad + 176.ay$$

$$176.ay - 352.by = 11.abP - 320.bS.$$

$$y(176.a - 352b) = 11.abP - 320.bS.$$

$$y = \frac{11.abP - 320.bS.}{176a - 352.b}$$

$$y = \frac{(11 \times 804 \times 288 \times 95) - (320 \times 288 \times 2194\tfrac{1}{2})}{176 \times 804 - 352 \times 288} = 99.$$

$$\text{Da nun } x = \frac{2S. - 22y}{11} = \frac{4389 - 22y}{11}$$

$$\text{ſo iſt } x = \frac{4389 - 22 \times 99}{11} = 399 - 198.$$

$$x = 201.$$

Alſo waren es 201 Dukaten
99 Karolin.

Die Probe zur Uebung!

Anmerkung. Bei Gleichungen mit drei unbekannten Größen ſuche man, wo es angeht, dreierlei Werthe einer unbekannten Größe, z. B. x, und vergleiche den erſten Werth mit dem zweiten, und dieſen wieder mit dem dritten.

Man

Man kann dann aus einer bekannten Größe die übrigen unbekannten leicht durch Subſtitution finden.

VII. Jemand hatte eine Hausbibliothek um 187 Gulden gekauft, welche aus Quart-, Octav- und Duodezbänden beſtand. Als man ihn um die Anzahl der Bände fragte, gab er zur Antwort: Rechne ich jeden Quartband zu 1 fl., ſo trifft auf jeden der beiden übrigen $\frac{1}{2}$ fl. Rechne ich den Octavband zu 1 fl., ſo kommt jeder der übrigen auf $\frac{1}{3}$ fl. Rechne ich aber den Duodezband auf 1 fl., ſo trifft auf jeden der übrigen $\frac{1}{4}$ fl. Wie läßt ſich aus dieſer Antwort die Anzahl der Bände im Allgemeinen, und im Beſondern erſchließen?

Auflöſung. Es waren x Quart-
y Octav-
z Duodezbände.

	Nebengleichungen.
1) $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 187$	
oder $2x + y + z = 374$	$x = \frac{374 - y - z}{2}$
2) $y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 187$	
$3y + x + z = 561$	$x = 561 - 3y - z$
3) $z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 187$	$x = 748 - 4z - y.$
$4z + x + y = 748$	

4) Nun comparirt (erſter und zweiter Werth von x).

$$\frac{374 - y - z}{2} = 561 - 3y - z.$$

$$374 - y - z = 1122 - 6y - 2z.$$

$$y = \frac{748 - z.}{5}$$

5) (zweiter und dritter Werth von x).

$$561 - 3y - z = 748 - 4z - y$$

$$y = \frac{3z - 187}{2.}$$

6) (erſter und zweiter Werth von y).

$$\frac{748 - z}{5} = \frac{3z - 187}{2}$$

$$1496 - 2z = 15z - 935$$

$z = \frac{2431}{17} = 143$ Duodezbände.

Sub-

Subſtituirt 7) $y = \frac{748 - 143}{5}$

$y = 121$ Octavbände.

8) $x = \frac{374 - 121 - 143}{2} = 55$ Quartbände.

Probe. a) Wenn 55 Quartbände koſten 55 fl.; dann koſten die 121 + 143 = 264 übrigen 132

Summa 187 fl.

b) Wenn 121 Octavbände .. = 121 fl.
dann die übrigen 198 Bände $= \frac{198}{3} = 66$

Summa 187 fl.

c) Wenn 143 Duodezbände .. = 143 fl.
dann die übrigen 176 Bände $= \frac{176}{4} = 44$

Summa 187 fl.

VIII. Drei Studenten feilten um ein Buch, das 5 fl. koſtete. Da nun keiner den Betrag baar erlegen konnte, ſo ſprach der erſte zum zweiten, gieb mir die Hälfte deines Geldes, ſo kann ich das Buch allein bezahlen. — Eben ſo begehrte der zweite vom dritten den dritten Theil; der dritte aber vom erſten den vierten Theil ſeines Geldes, um das Buch allein bezahlen zu können. — Wie viel Geld hatte jeder gehabt?

Auflöſung. Der erſte hatte x
der zweite y
der dritte z fl.

1) $x + \frac{1}{2}y = 5.$ Nebengleichung $x = \frac{10 - y}{2}$

2) $y + \frac{1}{3}z = 5.$ . . . . $y = \frac{15 - z}{3}$

3) $z + \frac{1}{4}x = 5.$ . . . . $x = 20 - 4z.$

4) Comparirt (die Werthe von x).

$$\frac{10 - y}{2} = 20 - 4z$$
$$10 - y = 40 - 8z$$
$$-y = -8z + 30$$
$$y = 8z - 30.$$

5) Die

5) (Die Werthe von y).

$$8z - 30 = \frac{15 - z}{3}$$

$$24z - 90 = 15 - z$$

$$25z = 105$$

$$z = \frac{105}{25} = \frac{21}{5} = 4 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

Mithin $y = \frac{18}{5} = 3$ fl. 36 kr.

$x = \frac{16}{5} = 3$ fl. 12 kr.

IX. Ich las irgendwo folgenden Küchenzettel:

Montag 7 Pfund Kaffee, 5 Pfund Zucker, 2 Pfund Choccolate um 28 Gulden.

Mittwoch 4 Pfund Kaffee, 6 Pfund Zucker, 3 Pfund Choccolate um 25,7 Gulden.

Samſtag 9 Pfund Kaffee, 12 Pfund Zucker, 6 Pfund Choccolate um 53,4 Gulden.

Läßt ſich hieraus der Preis für das Pfund jeder Sorte beſtimmen, vorausgeſetzt daß der Waarenpreis immer der nemliche blieb?

Auflöſung. 1 Pfund Kaffee koſte x, ein Pfund Zucker y... 1 Pfund Choccolate z fl.

	Nebengleichungen.
1) $7x + 5y + 2z = 28.$	$x = \frac{28 - 5y - 2z}{7}$
2) $4x + 6y + 3z = 25{,}7.$	$x = \frac{25{,}7 - 6y - 3z}{4}$
3) $9x + 12y + 6z = 53{,}4.$	$x = \frac{53{,}4 - 12y - 6z}{9}$

4) Comparirt

$$\frac{28 - 5y - 2z}{7} = \frac{25{,}7 - 6y - 3z}{4}$$

$$y = \frac{67{,}9 - 13z.}{22}$$

5) $$\frac{25{,}7 - 6y - 3z}{4} = \frac{53{,}4 - 12y - 6z}{9}$$

$$y = \frac{17{,}7 - 3z.}{6}$$

6) 17

6) $\frac{17,7 - 3z}{6} = \frac{67,9 - 13z.}{22}$

$z = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ fl.... Werth des Choccolats.

folglich $y = 2\frac{1}{3}$ fl.... Werth des Zuckers.

$x = 2$ fl.... Werth des Kaffees.

* Die ohnehin leichten Proben über beide Aufgaben zur Selbſtübung!

Anmerkung. Manche dieſer Probleme ließen ſich kürzer dadurch löſen, daß man noch eine vierte Zahl annimmt, welche die Summe der unbekannten Größen enthält: $S = x + y + z$. Da aber bei ſolchen Auflöſungen keine Allgemeinheit Statt findet, ſo muß man ſie dem eigenen Nachdenken der Schüler, oder dem Vortrage des Lehrers überlaſſen.

X. Eine Diviſion von Soldaten wurde beordert, eine Schanze zu erſtürmen; darunter befanden ſich Badener, Würtemberger, Sachſen, Baiern, in allem 4380 Mann. Da nun die einzelnen Abtheilungen für ſich allein zu ſchwach waren, wurde verordnet, daß, wenn die Badener ſtürmten, die übrigen die Hälfte ihrer Leute; wenn die Würtemberger ſtürmten, alle übrigen den dritten Theil; wenn die Sachſen ſtürmten, alle übrigen den vierten Theil; endlich wenn die Baiern den Sturm wagen würden, die übrigen den fünften Theil ihrer Leute abgeben ſollten; denn auf dieſe Art würde die Zahl der Stürmenden jedesmal gleich ſeyn. Wie viele Köpfe enthielt nun jede der vier Abtheilungen? Und wie viele ſtürmten?

Auflöſung. Es ſeyen v Badener.
x Würtemberger.
y Sachſen.
z Baiern.
$4380 = S.$

I. $v + \frac{x + y + z}{2} = x + \frac{v + y + z.}{3}$

II. $x + \frac{v + y + z}{3} = y + \frac{v + x + z.}{4}$

III.

III. $y + \frac{v+x+z}{4} = z + \frac{v+x+y.}{5}$

IV. $x + y + z + v = S.$

Hieraus ergeben ſich folgende 4 Werthe von x.

1) $x = \frac{4v + y + z.}{3}$

2) $x = \frac{8y + v - z.}{9}$

3) $x = 15z - 16y - v.$

4) $x = S - v - y - z.$

V. Erſter und zweiter Werth von x comparirt.

$$\frac{4v+y+z}{3} = \frac{8y-v-z}{9}$$

$$y = \frac{13v + 4z}{5.}$$

VI. Zweiter und dritter Werth von x.

$$\frac{8y - v - z}{9} = 15z - 16y - v.$$

$$y = \frac{17z - v.}{19}$$

VII. Dritter und vierter Werth von x.

$$15z - 16y - v = S - v - y - z.$$

$$y = \frac{16z - S.}{15}$$

VIII. Erſter und zweiter Werth von y.

$$\frac{13v + 4z}{5} = \frac{17z - v}{19}$$

$$v = \frac{9z}{252.}$$

IX. Zweiter und dritter Werth von y.

$$\frac{17z - v}{19} = \frac{16z - S}{15}$$

$$v = \frac{19S - 49z}{15.}$$

X. Erſter

X. Erſter und zweiter Werth von v.

$$\frac{9z}{252} = \frac{19S - 49z}{15}$$

$$z = \frac{4788S}{12483} = \frac{4788 \times 4380}{12483} = 1680.$$

XI. Nun ſubſtituirt.

$$v = \frac{9 \times 1680}{252} = 60.$$

XII. $y = \frac{16z - S}{15} = \frac{(16 \times 1680) - 4380}{15} = 1500.$

XIII. $x = S - v - y - z.$

$$= 4380 - 60 - 1500 - 1680$$

$$x = 1140$$

Es waren alſo Badener . . . 60 Mann.
Würtemberger . . . 1140 —
Sachſen . . . . 1500 —
Baiern . . . . 1680 —

Probe.

Stürmende.	I.	II.	III.	IV. Sturm.
Badener	60	20	15	12
Würtemberger	570	1140	285	228
Sachſen	750	500	1500	300
Baiern	840	560	420	1680
Summe	2220	2220	2220	2220

Aber 60 + 1140 + 1500 + 1680 = 4380.

Dritter Artikel.

Quadratiſche Gleichungen.

§. 241.

Quadratiſche Gleichungen heißen diejenigen, worin die unbekannte Größe in der zweiten, aber in keiner höhern Würde vorkommt; wobei zugleich vorausgeſetzt wird, daß

daß ſich die Gleichung nicht noch durch die Diviſion mit der unbekannten Größe auf eine Gleichung des erſten Grades reduciren laſſe. Aus dieſem Grunde iſt z. B. die Aequation $3x^2 = 21x$ nicht eigentlich Quadratiſch, indem ſie durch die Diviſion mit x auf den Ausdruck

$$3x = 21$$

$x = 7$ gebracht werden kann.

Die quadratiſchen Gleichungen heißen ferner rein (purae), wenn darin die unbekannte Größe nur in einer Dignität vorkommt, z. B. $x^2 = ab$.

Auch der Ausdruck $ax^2 + bx^2 - cx^2 = S$ ſtellt eine reine quadratiſche Gleichung vor, weil ſich die Summe der Coefficienten $a + b - c$ als eine einzige Größe z. B. d denken läßt, und x in der nemlichen Würde vorkommt.

$$ax^2 + bx^2 - cx^2 = S$$
$$x^2 (a + b - c) = S$$
$$x^2 = \frac{S}{a+b-c}.$$

Unrein (gemiſcht, adfectae) heißen die Quadratiſchen Gleichungen, wenn die unbekannte Größe auch in der erſten Potenz vorkommt, z. B. $x^2 + ax = bc$.

Man nennt überdieß ſolche Quadratiſche Gleichungen, worin nebſt dem Quadrate und der erſten Potenz der unbekannten Größe auch noch bekannte Größen vorkommen, vollſtändige quadratiſche Gleichungen.

§. 242.

Jede quadratiſche Gleichung, ſowohl reine als unreine, läßt ſich, durch Verſetzung aller Glieder auf eine Seite, auf o bringen.

Z. B. 1) $x^2 = ab \quad x^2 - ab = 0$.

2) $x^2 + ax = bc \quad x^2 + ax - bc = 0$.

3) $\frac{a+b}{x} = \frac{cx}{d-x} = ad - ax + bd - bx = cx^2$.

$$cx^2 + ax + bx = ad + bd.$$
$$cx^2 + x(a+b) = ad + bd.$$
$$cx^2 + x(a+b) - d(a+b) = 0.$$

§. 243.

§. 243.

Eine quadratiſche Gleichung auflöſen, heißt im Allgemeinen den Werth der unbekannten Größe in der erſten Potenz finden, welches folglich geſchieht, wenn man beiderſeits die Quadratwurzel auszieht.

Z. B. $x^2 = ab$ oder $cx^2 = d$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{ab} \quad \therefore \quad x^2 = \frac{d}{c}$$

$$x = \sqrt{ab} \quad \therefore \quad \sqrt{\cdot}\; x = \sqrt{\frac{d}{c}}$$

Hier ſind nun drei Fälle möglich.

1) Wenn ab oder $\frac{d}{c}$ ein reines Quadrat z. B. p^2 ..

ſo iſt $x^2 = p^2 \quad x^2 = 324$

$x = p \quad x = 18.$

2) Oder wenn ab oder $\frac{d}{c}$ eine Irrationalzahl, z. B. q iſt, wobei man ſich des Wurzelzeichens bedient.

Z. B. $x^2 = q \quad x^2 = 8$

$x = \sqrt{q}. \quad x = \sqrt{8}$

$x = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}.$

3) Endlich wenn ab oder $\frac{d}{c} = -m$, das iſt, eine unmögliche oder immaginäre Zahl iſt, in welchem Falle die Auflöſung der Aufgabe unmöglich wird.

Z. B. $x^2 = -25$

$x = \sqrt{-25}.$

Im zweiten Falle aber läßt ſich e Quadratwurzel aus Ziffern durch Annäherung finden.

Z. B. $x^2 = 8$

$x = \sqrt{8} = 2{,}8284272 \ldots$

oder $x = 2\sqrt{2} = 2\,(1{,}4142136) = 2{,}8284272 \ldots$

§. 244.

Jede Quadratwurzel hat einen doppelten Werth, z. B. in der Gleichung $x^2 = 81$

$x = \pm 9$ .. denn $-9 \times -9 = +81$

$+9 \times +9 = +81.$

daher

daher allgemein $x^2 = q$

$$x = \pm \sqrt{q}.$$

Dieſes gilt auch von jenen Gleichungen, worin nur das Quadrat und die erſte Potenz der unbekannten Zahl vorkömmt, wenn man ſie als quadratiſche auflöſt.

Z. B. $3x^2 = 21x$,

$$3x^2 - 21x = 0.$$

$$x^2 - 7x = 0.$$

oder $x = 7$.

Außer dieſem Werthe kann x auch noch $= 0$ geſetzt werden.

Dann iſt $x^2 = 0$

$$7x = 0.$$

$$x^2 - 7x = 0 - 0 = 0.$$

Doch iſt hier zu merken, daß in den meiſten Gleichungen oder Problemen des zweiten Grades, z. B. wenn die Rede von Menſchen, Geld-, Gewichtſorten iſt, weder der negative, noch der Nullwerth anwendbar ſey.

§. 245.

Daß auch vollſtändige quadratiſche Gleichungen eine doppelte Wurzel haben, läßt ſich wohl ſchon aus dem vorhergehenden ſchließen; kann aber noch aus einem höhern Grunde hergeleitet werden, welcher zugleich für alle höhern Gleichungen, nur mit Modification, anwendbar iſt.

Man habe die Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man x^2 und x in ſolchen Zahlen ausdrücke, daß die vorliegende Reihe zu Null werde. Aus §. 89. weiß man vorläufig, daß $x^2 - 10x + 21$ eine complexe Größe ſey, welche aus zwei zweigliedrigen Factoren beſtehe. Das Produkt von den erſten Gliedern der Factoren iſt in x^2, das Produkt von den zweiten in 21 enthalten.

$$x^2 = x \times x.$$

$$21 = \pm 3 \times \pm 7.$$

und wirklich $(x-7) \times (x-3) = x^2 - 10x + 21$.

Dieſes

Dieſes Produkt wird nun $= 0$, wenn entweder der eine, oder wenn der andere von den beiden Factoren $= 0$ iſt. Im erſten Falle muß $x - 7 = 0$

$x = 7$

im zweiten $x - 3 = 0$

$x = 3$ werden.

Man ſubſtituire nun in der Gleichung für x die zwei Werthe, ſo zeigt ſich, daß in beiden Fällen die ganze Formel $= 0$ wird.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0.$

$x = 7$

$49 - 70 + 21 = 70 - 70 = 0.$

b) $x = 3$

$9 - 30 + 21 = 0$

$30 - 30 = 0.$

§. 246.

Man habe nun im Allgemeinen die quadratiſche Gleichung $x^2 - Sx + p = 0.$

Auch hier kann $x^2 - Sx + p$ als ein Produkt von zwei zweigliedrigen Factoren angeſehen werden.

Es ſeyen dieſe Factorn $(x - a)$ und $(x - b)$

$x - a = 0$ folglich $x = a$

$x - b = 0.$ $x = b.$

In beiden Fällen muß die Gleichung $= 0$ werden.

Das Produkt aus $(x - a) \times (x - b)$

$= x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab.$

Da nun dieſes Produkt der Gleichung $x^2 - Sx + p$ gleich ſeyn ſoll, ſo ſieht man offenbar,

daß $(a + b)x = Sx$

1) $a + b = S.$

2) $ab = p.$

d. h. Daß die Summe von beiden Werthen für x in S, ihr Produkt aber in p enthalten ſey.

§. 247.

§. 247.

Wenn ein Werth von x negativ, d. i. $x = a$ iſt, und $x = -b$

folglich $x - a = 0$

$x + b = 0.$

ſo wird die Formel:

$$x^2 + (b-a)x - ab = 0.$$

Wenn nun $b > a$, ſo erhält das zweite Glied das Zeichen +, widrigenfalls das Zeichen —. Das letzte Glied iſt immer negativ.

* Z. B. In der Aequation $x^2 + x - 20 = 0$ ſind die beiden Werthe für x .. + 4, und — 5.

$16 + 4 - 20 = 0.$

$+25 - 5 - 20 = 0.$

Sollen aber beide Werthe von x negativ ſeyn, d. i.

$x = -a$ folglich $x + a = 0$

$x = -b$ . . . $x + b = 0$ ſo erhält man:

$x^2 + (a+b)x + ab$. Alſo alle Glieder mit poſitiven Zeichen.

* Z. B. Man habe $x = -7$ ſo ergiebt ſich $x + 7 = 0$

$x = -8$ . . . . . $x + 8 = 0.$

$(x+7) \times (x+8) = x^2 + 15x + 56 = 0.$

$49 - 105 + 56 = 0.$

$64 - 120 + 56 = 0.$

§. 248.

Wenn man einen Factor der Gleichung weiß, ſo läßt ſich der andere leicht durch Rechnung beſtimmen, indem man ſowohl dieſen Factor, als die ganze Gleichung auf 0 bringt, und dieſe durch jenen dividirt; der Quotus giebt den andern Factor.

Z. B. In der Aequation $x^2 - 13x - 30 = 0$ iſt der eine Werth von $x = -2$. Welches iſt der andere?

Aufloͤſung. $x = -2$

$x + 2 = 0.$

$$x^2 - 13x - 30 \quad | \; x - 15$$
$$x + 2$$
$$x^2 + 2x$$
$$- \quad -$$
$$-15x - 30$$
$$x + 2$$
$$-15x - 30$$
$$+ \quad +$$
$$0.$$

Folglich iſt der zweite Werth von x...

$$x - 15 = 0$$
$$x = 15.$$

Da nun $x + 2 = 0$
$$x - 15 = 0.$$
ſo iſt auch $(x+2)(x-15) = x^2 - 13x - 30 = 0.$

§. 249.

Was die Aufloͤſung der unreinen quadratiſchen Gleichungen betrifft, ſo kann man zweierley Wege einſchlagen. Dieſe ſind die Complirung (Ergaͤnzung), und die Subſtitution.

I. Complirung. Man weiß nemlich, daß die Formel fuͤr die Quadrate der Binomien ſey $a^2 \pm 2ab + b^2$ (vergl. §. 153.), d. h. daß das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel $a \pm b$ enthalten muͤſſe

1) das Quadrat des erſten Theiles,
2) das doppelte Produkt beider Theile, und
3) das Quadrat des zweiten Theiles.

Vergleicht man damit die, fuͤr alle vollſtaͤndigen unreinen quadratiſchen Gleichungen paſſende, allgemeine Formel

$$x^2 \pm Sx = q,$$

ſo entdeckt man, daß in letzterer zwar das Quadrat des erſten Theiles, auch das doppelte Produkt des erſten und zweiten Theiles; nicht aber das Quadrat des zweiten Theiles vorkomme; d. i.

$a^2 =$

$$a^2 = x^2$$
$$\pm 2ab = \pm Sx$$
folglich $\pm 2b = \pm S.$

Hieraus läßt ſich nun leicht beſtimmen, wie viel der fehlende Theil von b^2 betragen müſſe;

nemlich $b = \frac{S}{2}$

quadrirt: $b^2 = \frac{S^2}{4}$.

Addire ich nun beiderſeits $\frac{S^2}{4}$, ſo erhalte ich das vollkommene Quadrat von $x + \frac{1}{2}S$.

$$x^2 \pm Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = q + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{4q + S^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \quad x \pm \tfrac{1}{2}S = \pm \sqrt{\frac{(4q + S^2)}{4}} \ldots$$

Da man ferner aus dem Nenner 4 die Quadratwurzel wirklich ziehen kann: ſo ergiebt ſich

$$x = \frac{\mp S \pm (\sqrt{4q + S^2})}{2}$$

Die Complirung einer unreinen quadratiſchen Gleichung beſteht alſo darin, daß man die Hälfte des Mitfactors von x quadrirt, und dieſes Quadrat, als Complement, beiderſeits addirt.

Z. B. $x^2 - 18x = 63.$

$$\tfrac{1}{2}S = 9.$$

$$x^2 - 18x + 81 = 63 + 81 = 144$$

$$\sqrt{\quad} \quad x = 9 \pm \sqrt{144} = 9 \pm 12$$

$x = 21$ erſter Werth

$x = -3$ zweiter Werth.

Probe. 1) $x = 21.$

$$441 - 378 = 63.$$

2) $x = -3.$

$$9 - 18 \times -3 = 9 + 54 = 63.$$

* Nach der Formel erhält man:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{252 + 324}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{18 \pm 24}{2}$$

$$x = \tfrac{42}{2} = 21. \text{ Oder } x = -\tfrac{6}{2} = -3.$$

II. Die Subſtitution beſteht darin, daß man $x \pm \frac{1}{2}S = y$ ſetze, und ſo die ganze Gleichung von x auf y bringe, wodurch ſie aus einer unreinen und gemiſchten in eine reine verwandelt wird,

d. i. 1) $x^2 - Sx = q.$

$$x = y + \tfrac{1}{2}S.$$

$$\text{alſo } x^2 = y^2 + Sy + \tfrac{1}{4}S^2.$$

$$-Sx = -Sy - \tfrac{1}{2}S^2.$$

$$y^2 + Sy - Sy + \tfrac{1}{4}S^2 - \tfrac{1}{2}S^2 = q.$$

$$y^2 - \tfrac{1}{4}S^2 \ldots = q$$

$$y^2 = q + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{4q + S^2}{4}$$

$$\surd \quad y = \frac{\pm\sqrt{(4q + S^2)}}{2}$$

folglich da $x = y + \frac{1}{2}S$

$$\text{ſo iſt } x = \frac{S \pm \sqrt{(4q + S^2)}}{2}.$$

2) $x^2 + Sx = q.$

$$x = y - \tfrac{1}{2}S.$$

$$x^2 = y^2 - Sy + \tfrac{1}{4}S^2.$$

$$Sx = Sy - \tfrac{1}{2}S^2.$$

$$y^2 - Sy + Sy + \tfrac{1}{4}S^2 - \tfrac{1}{2}S^2 = q \text{ u. ſ. w.}$$

$$y^2 = \frac{4q + S^2}{4}$$

$$\surd \quad y = \pm\frac{\sqrt{(4q + S^2)}}{2}$$

da nun $x = y - \frac{1}{2}S$, ſo ergiebt ſich

$$x = -\tfrac{1}{2}S \frac{\pm\sqrt{(4q + S^2)}}{2}$$

§. 250.

Fügt es ſich, daß der Mitfactor von x eine Fraction iſt, z. B. $ax^2 \pm Sx = q$

$$x^2 \pm \frac{Sx}{a} = q$$

ſo modificirt ſich die Formel alſo:

$$\text{Complement} = \frac{S^2}{4a^2}$$

$$x^2 \pm \frac{Sx}{a} + \frac{S^2}{4a^2} = \frac{4a^2q + S^2}{4a^2}$$

$$\surd \qquad x = \frac{\mp S \pm \sqrt{(4a^2q + S^2)}}{2a.}$$

Anmerkung. Es laſſen ſich alſo eigentlich vier Fälle unterſcheiden: 1) wenn das zweite Glied der quadratiſchen Gleichung poſitiv und eine ganze Zahl iſt; dann gilt die Formel: $x = \frac{-S \pm \sqrt{(4q + S^2)}}{2.}$

2) Wenn das zweite Glied poſitiv, aber eine Fraction iſt: $x = \frac{-S \pm \sqrt{(4a^2q + S^2)}}{2a.}$

3) Wenn das zweite Glied negativ und eine ganze Zahl: $x = \frac{+S \pm \sqrt{(4q + S^2)}}{2.}$

4) Wenn das zweite Glied negativ, und eine Fraction: $x = \frac{+S \pm \sqrt{4a^2q + S^2)}}{2a.}$

§. 251.

Wenn die Zahl, woraus man die Quadratwurzel zu ziehen hat, negativ iſt, ſo zeigt dieß an, daß ſich die Gleichung nicht auflöſen laſſe, d. i. unmöglich, imaginär ſey.

Z. B. Man ſuche zwei Zahlen, derer Summe 2, und Produkt 10 ſey.

Auflöſung. I. $x + y = 2.$

II. $xy = 10.$ folglich $x = \frac{10}{y}.$

III.

III. Subſtituirt $\frac{10}{y} + y = 2.$

$$10 + y^2 = 2y.$$

$$y^2 - 2y = -10 \text{ u. ſ. w.}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{-9}.$$

folglich $x = 1 \mp \sqrt{-9}.$ } dieß ſind die verlangten zwei Zahlen.

Da nun hier die Wurzel aus -9 gezogen werden ſoll, ſo iſt dieſes ein ſicheres Kennzeichen, daß die Aufgabe unmöglich ſey. — Deſſen ohngeachtet wird auch dieſe, ſo wie alle imaginären Gleichungen, zu 0, wenn man den gefundenen Werth für y ſubſtituirt.

$$y^2 - 2y + 10 = 0.$$

denn $y^2 = 1 + 2\sqrt{-9}, -9 = -8 + 2\sqrt{-9}.$

$$-2y = -2 - 2\sqrt{-9}$$

$$-8 + 2\sqrt{-9} - 2 - 2\sqrt{-9} + 10 = -10 + 10 = 0.$$

Auch die Probe läßt ſich mit den imaginären Werthen machen.

1)	2)
$1 + \sqrt{-9} = y$	$1 + \sqrt{-9}$
$1 - \sqrt{-9} = x$	$\times \quad 1 - \sqrt{-9}$
$2 = x + y.$	$1 + 9 = 10 = xy.$

(vergl. §. 55. I.)

Man habe nun wieder die allgemeine Gleichung

$$x^2 \pm Sx + q = 0$$

d. i. $x^2 \pm Sx = -q.$

$$\text{Compl.} \quad x^2 \pm Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2 - q = \frac{S^2 - 4q}{4}.$$

$$\sqrt{} \quad x = \mp \tfrac{1}{2}S \pm \frac{\sqrt{S^2 - 4q}}{2}.$$

Hieraus läßt ſich nun allgemein beſtimmen, wann die Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung unmöglich ſey. Wenn nemlich $S^2 < 4q$, d. h., wenn das Vierfache des letzten Gliedes, das eine bekannte Zahl (q) iſt, mehr beträgt, als das Quadrat von dem Factor des zweiten Gliedes, dann

iſt

iſt die Auflöſung unmöglich. In allen übrigen Fällen iſt ſie möglich, und man kann die Wurzel entweder ganz, oder doch durch Annäherung finden. Beträgt aber das Quadrat des Factors vom zweiten Gliede eben ſo viel, als das vierfache q, welches als negativ angenommen wird, ſo erſcheint $\pm \frac{1}{2} S \pm \sqrt{0}$.

Z. B. $x^2 \pm 6x = -9$	$S = 6$
$x^2 \pm 6x + 9 = 9 - 9 = 0$	$S^2 = 36$
$x \pm 3 = \pm \sqrt{0}$	$q = -9$
$x = \mp 3 \pm \sqrt{0}$.	$4q = 36$

Probe 1) $x = -3$	2) $x = +3$
$9 - 18 = -9$.	$9 - 18 - 9$.

§. 252.

Probleme des zweiten Grades, reine und unreine.

I. Man theile die Zahl 100 in zwei Theile, von der Art, daß ihr Produkt 2304 betrage. Wie heißen dieſe Theile?

Antwort. Der eine x

der Andere $100 - x$.

folglich: $(100 - x) \times x = 100x - x^2$

$$x^2 - 100x = -2304$$

Complirt $x^2 - 100x + (50)^2 = 2500 - 2304 = 196$.

$\sqrt{}$ $x - 50 = \pm \sqrt{196} = \pm 14$

$$x = 50 + 14 = 64$$

oder $50 - 14 = 36$.

Und daher iſt der andere Theil entweder $100 - 64 = 36$ oder $100 - 36 = 64$. —— Alſo ſind die beiden Theile 64 und 36.

II. Man ſuche zwei Zahlen, welche zum Produkte aus ihrer Summe und Differenz 627; zur Summe ihrer Quadrate aber 1685 geben.

Auflöſung. Die eine Zahl $= x$, die andere $= y$.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 627$$

$$x^2 + y^2 = 1685.$$

Man

Man addire beide Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 1685$$
$$x^2 - y^2 = 627$$
$$2x^2 = 2312$$
$$x^2 = 1156$$
$$\surd \quad x = \pm 34.$$

Subtrahirt man ſie aber, ſo ergiebt ſich

$$2y^2 = 1058$$
$$y^2 = 529$$
$$y = \pm 23.$$

Alſo ſind die verlangten Zahlen 34 und 23.

III. Zwei Kapitaliſten liehen, jeder ein Kapital aus. Dem erſten trägt das ſeine alle Tage 1 fl. $23\frac{25}{73}$ kr. Dem zweiten, welcher um 1200 fl. weniger, aber um 1 Procent höher ausgeliehen, trägt das ſeinige in eben der Zeit 1 fl. $40\frac{44}{73}$ kr. . . . Wie heißen die Kapitale und ihre Procente?

Auflöſung. Nach der Proportion findet ſich, daß die jährlichen Intereſſen für den erſten ſeyen = 507. Für den zweiten = 612 fl. . . und 507 = a . . 612 = b . . 100 = c.

Das Kapital des erſten = x Procent y
folglich des zweiten = $x - 12c$ . . — $y + 1$.

Nun gelten die Proportionen

I. $x : c = a : y$ d. i. $x = \frac{ac}{y}$.

II. $(x - 12c) : c = b : y + 1$. d. i. $x = \frac{cb}{y+1} + 12c$.

Comparirt III. $\frac{ac}{y} = \frac{bc}{y+1} + 12c$.

$$ay + a = by + 12y^2 + 12y.$$

geordnet: $y^2 + \frac{(b - a + 12)y}{12} = \frac{a}{12}$

oder, wenn man ſubſtituirt

$$y^2 + \frac{117y}{12} = \frac{507}{12}$$

ver-

verkleinert und ergänzt $y^2 + \frac{39y}{4} + \left(\frac{39}{8}\right)^2 = \frac{4225}{64}$

$\sqrt{} \qquad y = \frac{65}{8} - \frac{39}{8} = 3\frac{1}{4}$ . .

Alſo legte der erſte ſein Geld zu $3\frac{1}{4}$ Procent, der andere zu $4\frac{1}{4}$ Procent auf.

Das Kapital des erſten war

$$x = \frac{ac}{y} = \frac{50700 \times 4}{13} = 15600 \text{ fl.}$$

Das des zweiten $15600 - 1200 = 14400$ fl.

IV. Ein Krämer kaufte einſt einige Zentner Käſe, den Zentner zu 27 fl. Tara auf den Zentner eben ſo viele Pfunde, als er Zentner genommen. Ein anderesmal kaufte er einen Zentner weniger, den Zentner zu 33 fl. Das Tara auf den Zentner betrug das zweitemal um 2 Pfund mehr. Deſſen ohngeachtet mußte er dieſesmal 10 fl. mehr bezahlen, als das erſtemal. — Wie viele Zentner Käſe kaufte der Krämer jedesmal? . . .

Auflöſung. Das Tara ſey bei dem erſten Kaufe $= x$ . . ſo iſt auch die Anzahl der Zentner $= x$.

Bei dem zweiten Kaufe ergeben ſich $(x-1)$ Zentner, und $(x+2)$ Tara. Nun beſtimme man den Geldwerth jedes Kaufes:

1)		2)	
fl. ?	x Ztn.	fl. ?	x − 1 Ztn.
1.	27 fl.	1.	33 fl.
Zt. (100 + x)	100 fl.	102 + x	100

$? = \frac{2700x}{100+x}$ $\qquad$ $? = \frac{3300x - 3300}{102+x}$

Da nun der zweite Werth um 10 fl. mehr beträgt, ſo iſt

$$\frac{2700x}{100+x} + 10 = \frac{3300x - 3300}{102+x}.$$

Führt man dieſe etwas verwickelte Rechnung durch, ſo ergiebt ſich

$$x^2 + \frac{4928x}{59} = 43200$$

$$x + \frac{4928}{110} = \sqrt{\frac{34480384}{13924}} = \frac{5872}{118}$$

$$x = \frac{5872 - 4928}{118} = 8.$$

Es

Es hatte alſo der Krämer das erſtemal 8 Zentner Tara auf den Zentner 8 Pfund gekauft. — Das zweitemal 7 Zentner, 10 Pfund Tara auf den Zentner.

V. Es wurde ein Haus gekauft, und wieder verkauft, aber mit einem Verluſte von ſo vielen Procenten, als Hunderte der erſte Ankauf betragen hatte. Indem es nun um 1875 Gulden verkauft wurde, ſo fragt ſich, wie hoch es gekauft worden ſey?

Auflöſung. Setzt man den Ankauf $= 100x$, ſo giebt x die Anzahl der Hunderter, und x^2 den Verluſt an.

Folglich $100x - x^2 = 1875$

$$x^2 - 100x = -1875.$$

Compl. $x^2 - 100x + (50)^2 = 625$

$\sqrt{}$ $\quad x - 50 = \pm\sqrt{625} = \pm 25.$

folglich $x = 50 + 25 = 75$

oder $= 50 - 25 = 25.$

Das Haus koſtete alſo bei dem erſten Ankauf entweder 7500 — oder 2500 Gulden. In beiden Fällen werden die Bedingniſſe der Aufgabe erfüllt.

$x = 75.$

1) Pr.? | $75\not{0}\not{0}$
$1\not{0}\not{0}$ | 75

? = | 5625 fl. Verluſt.

$7500 - 5625 = 1875.$

$x = 25.$

2) Pr.? | $25\not{0}\not{0}$ fl.
$1\not{0}\not{0}$ | 25

? = | 625 Verluſt.

$2500 - 625 = 1875$ fl.

§. 253.

Zu den unreinen quadratiſchen Gleichungen gehört auch die Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen Binomien, d. i. den Quadraten ſolcher zweitheiliger Größen, von denen eine, oder auch beide die Wurzelzeichen vor ſich haben.

Man habe das Binomium $28 + 10\sqrt{3}$, woraus die Quadratwurzel gezogen werden ſoll.

Operation. Da die Wurzel ebenfalls zweitheilig wird, ſo ſetze man ſie $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Alſo

Alſo $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{[28 + 10\sqrt{3}]}$
quadrirt : $(x+y) + 2\sqrt{xy} = 28 + 10\sqrt{3}$.

Man ſieht hier offenbar, daß der rationale Theil $x+y$, (welcher eingeklammert wurde, um ihn von dem irrationalen zu unterſcheiden) $= 28$ ſey und $2\sqrt{xy} = 10\sqrt{3}$.

Hieraus ergiebt ſich denn die Gleichung;

I. $x + y = 28$
$x = 28 - y$.

II. $2\sqrt{xy} = 10\sqrt{3}$
$\sqrt{xy} = 5\sqrt{3}$
quadrirt: $xy = 25 \cdot 3 = 75$
$x = \frac{75}{y}$.

III. Comparirt $28 - y = \frac{75}{y}$
$28y - y^2 = 75$
$y^2 - 28y = -75$.
Complirt $y^2 - 28y + (14)^2 = 121$.
$\sqrt{\ }$ $y = 14 \pm 11 = 25$ oder 3
folglich $x = 3$ oder 25.

Die verlangte Wurzel iſt alſo $\sqrt{25} + \sqrt{3} = 5 + \sqrt{3}$.

* Durch die nemliche Operation ergiebt ſich, daß z. B. $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ſey.

** Der zweite Theil des Binomiums kann auch negativ ſeyn,

z. B. $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \begin{cases} -3 + \sqrt{6} \\ \text{oder} \\ +3 - \sqrt{6}. \end{cases}$

Beide Wurzeln geben das obige Binomium zum Quadrate.

$$\begin{array}{r} -3 + \sqrt{6} \\ -3 + \sqrt{6} \\ \hline 9 - 3\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6} + 6 \\ \hline 15 - 6\sqrt{6}. \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{r} 3 - \sqrt{6} \\ 3 - \sqrt{6} \\ \hline 9 - 3\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6} + 6 \\ \hline 15 - 6\sqrt{6}. \end{array}$$

§. 254.

§. 254.

Allgemein ſey das gegebene Binomium, woraus die Wurzel zu ziehen iſt, $a \pm \sqrt{b}$, und

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

ſo wird $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

$$(x+y) \pm 2\sqrt{xy} = a \pm \sqrt{b}.$$

I. $x + y = a$

$$x = a - y.$$

II. $2\sqrt{xy} = \pm \sqrt{b}$

$$\sqrt{xy} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{b}$$

$$xy = \tfrac{1}{4}b$$

$$x = \frac{b}{4y}.$$

III. Comparirt $a - y = \frac{b}{4y}$

$$y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2-b}{4}$$

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2-b}}{2}.$$

$$x = \frac{a \mp \sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Hier ſind nun zwei Fälle möglich.

Erſter Fall. Wenn $a^2 - b = T^2$, d. i. ein reines Quadrat iſt,

ſo wird $y = \frac{a-\sqrt{T^2}}{2} = \frac{a-T}{2}$

$$x = \frac{a+\sqrt{T^2}}{2} = \frac{a+T}{2}.$$

Und dann ſind die verlangten Wurzeln von

$$a \pm \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a+T}{2}} = \sqrt{x} \\ \sqrt{\frac{a-T}{2}} = \pm\sqrt{y}. \end{cases}$$

d. h.

d. h.: „Um aus dem Binomium $a+\sqrt{b}$ die Quadratwurzel zu finden, ſubtrahire man vom Quadrate des rationalen Theiles (von a^2) das Quadrat des irrationalen (b); und ziehe aus der Differenz (T^2) die Wurzel, und dann iſt

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-T}{2}}.$$

Z. B. In dem Binomium

$15-6\sqrt{6}$ iſt $a=15$ und $a^2=225$

$\sqrt{b}=6\sqrt{6}$

und $b=216$.

Folglich $a^2-b = 225-216 = 9 = T^2$.

Alſo $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{15+3}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$-\sqrt{y} = -\sqrt{\frac{15-3}{2}} = -\sqrt{\frac{12}{2}} = -\sqrt{6}$.

Anmerkung. 1. Dieſe Regel iſt ſogar anwendbar 1) wenn der irrationale Theil imaginär iſt.

Z. B. $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$. Hier iſt $a=7$ $\sqrt{b}=6\sqrt{-2}$

$a^2=49$, $b=-72$.

$T^2=a^2-b=49+72=121$ und $T=11$.

Daher iſt die verlangte Wurzel:

$$\sqrt{\frac{7+11}{2}} + \sqrt{\frac{7-11}{2}} = \sqrt{9}+\sqrt{-\tfrac{4}{2}} = 3+\sqrt{-2}.$$

2) wenn der rationale Theil fehlt, d. h. = 0 iſt.

Z. B. $\sqrt{6\sqrt{-9}}$. Hier iſt $a=0$. $\sqrt{b}=6\sqrt{-9}$

und $b=-324$.

folglich $-b = 324$ und $a^2-b=324=T^2$

und $T=\sqrt{324}=18$.

Mithin iſt die verlangte Wurzel:

$$\sqrt{\tfrac{18}{2}}+\sqrt{-\tfrac{18}{2}} = \sqrt{9}+\sqrt{-9} = 3+\sqrt{-9}.$$

Anmerkung 2. Wenn $a^2-b=T^2$, ſo läßt ſich anſtatt $\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ auch eine andere Wurzel ſubſtituiren,

nemlich

nemlich $Z^2 = a \pm \sqrt{b}$

$$Z = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Da nun $Z = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ geſetzt wird, ſo folgt, daß auch

$$Z = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-T}{2}} \text{ ſeyn müſſe.}$$

Man habe die Gleichung: $x^4 - 2ax^2 = q$. — welches in der That eine quadratiſche iſt, nur daß man am Ende aus der Wurzel noch einmal die Wurzel ziehen muß.

Man ſetze $x^2 = y$

ſubſtituirt $y^2 - 2ay = q$

Compl. $y^2 - 2ay + a^2 = a^2 + q$

$y = a \pm \sqrt{a^2 + q}$

alſo $x^2 = a \pm \sqrt{a^2 + q}$.

Hier iſt nun der irrationale Theil $\sqrt{b} = \sqrt{a^2 + q}$

folglich $b = a^2 + q$.

Die Differenz von den Quadraten des rationalen und irrationalen Theiles, d. h., $a^2 - b = -q$. Iſt nun $-q$ ein Quadrat, d. i. $= T^2$ und $q = -T^2$, ſo kann die Wurzel kürzer ausgedrückt werden, wie oben:

$$x = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-T}{2}}.$$

* Man habe die Aequation: $x^4 - 52x^2 = -576$. und $x^2 = y$, ſo iſt: $y^2 - 52y + (26)^2 = 676 - 576 = 100$.

Hier iſt $a = 26$ $a^2 = 676$ $b = 100$	alſo $a^2 - b = 576 = T^2$ und $T = 24$.

Da aber $y = x^2$

$$\text{ſo iſt } x = \sqrt{\frac{26+24}{2}} \pm \sqrt{\frac{26-24}{2}} = 5 \pm 1.$$

Die verlangte Wurzel iſt alſo entweder 6 oder 4.

Zwei.

Zweiter Fall. Wenn (a^2-b) kein reines Quadrat iſt, ſo läßt ſich die Quadratwurzel aus ſolchen Binomien nur mittelſt des Wurzelzeichens ausdrücken.

Z. B. $\sqrt{3+\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ u. ſ. w.

$$x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

$$y = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

Alſo $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$.

* Die Probe zur Uebung!

§. 255.

Zum Beſchluſſe dieſes Artikels noch einige Gleichungen, worin die unbekannte Größe in der dritten und erſten, oder in der vierten und zweiten Potenz vorkommt, und welche ſich als quadratiſche behandeln laſſen.

I. Aus der Differenz zweier Zahlen d, und aus der Differenz ihrer Kubuſſe D, die Zahlen x und y zu beſtimmen.

Auflöſung I. $x^3 - y^3 = D$

II. $x - y = d.$

Man dividire I. durch II.

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2 = \frac{D}{d.}$$

Ferner $(x-y)^2 = d^2$

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{D}{d}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = d^2$$

$$- \quad + \quad - \quad -$$

$$3xy = \frac{D-d^3}{d}$$

$$y = \frac{D-d^3}{3d.x} \text{ und } -y = \frac{d^3-D}{3d.x.}$$

Subſtituirt $x + \frac{d^3-D}{3d.x} = d$

$$x^2 - dx = \frac{D-d^3}{3d}$$

Com-

Complirt: $x^2 - dx + (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{4D-d^3}{12d}$

$$x = \frac{d+\sqrt{\left(\frac{4D-d^3}{3d}\right)}}{2}$$

alſo $y = \frac{-d+\sqrt{\left(\frac{4D-d^3}{3d}\right)}}{2}$

* Es ſey $D = 1946$ und $d = 2$.

So wird $x = \frac{2+\sqrt{\left(\frac{7776}{6}\right)}}{2} = \frac{2+36}{2} = 19.$

$$y = \frac{-2+36}{2} = 17.$$

II. Aufgabe. Man ſuche zwey Zahlen, welche zum Produkte 240, und zur Summe ihrer Quadrate 481 geben.

Auflöſung. Auf die kürzeſte Art wird dieſe Aufgabe alſo gelöſet: es ſey $481 = S$ und $240 = p$.

Alſo $x^2 + y^2 = S$.
$xy = p$.

Man verdopple die zweyte Gleichung, und ſetze ſie einmal poſitiv, und einmal negativ zur erſten Gleichung.

1) $x^2 + y^2 = S$
$2xy = 2p$.
$x^2 + 2xy + y^2 = S + 2p$.
$x + y = \sqrt{S+2p} = \sqrt{961} = 31$.

2) $x^2 + y^2 = S$
$-2xy = -2p$
$x^2 - 2xy + y^2 = S - 2p$
$x - y = \sqrt{S-2p} = \sqrt{1} = 1$.

3) $x + y = 31$
$x - y = 1$
$x = \frac{32}{2} = 16.$

4) $x + y = 31$
$-x + y = -1$
$y = \frac{30}{2} = 15.$

* Auf eine ähnliche Art wird die Aufgabe gelöſet:
$x^3 + y^3 = \Sigma$
$xy = \Pi$. Nur daß ſich die Aufgabe von der ſechsten Würde, nach Ausziehung der Quadratwurzel, in eine Gleichung des dritten Grades verwandelt.

III. Man

III. Man ſuche zwey Zahlen, welche zum Produkt 143, und zur Differenz ihrer Quadrate 48 geben.

Auflöſung.

Die Zahlen heißen x, y. folglich $x^2 - y^2 = d$

$$143 = p. \qquad xy = p.$$
$$48 = d.$$

Da hier y^2 negativ iſt, ſo läßt ſich das Doppelte von xy nicht mit Vortheil addiren, indem die Summe kein Quadrat giebt.

Alſo ſubſtituirt $y = \frac{p}{x}$

$$y^2 = \frac{p^2}{x^2}.$$

$$x^2 - \frac{p^2}{x^2} = d.$$
$$x^4 - dx^2 = p^2.$$

ergänzt $x^4 - dx^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4p^2 + d^2}{4}$

$$x^2 = \frac{d + \sqrt{4p^2 + d^2}}{2} = \frac{48 + \sqrt{84100}}{2}$$
$$x^2 = 169$$
$$x = 13.$$

Mithin $y = \frac{p}{x} = \frac{143}{13} = 11.$

Alſo ſind die verlangten Zahlen 13 und 11.

IV. Man ſuche zwey Größen, derer Summe ihrem Produkte, und überdieß der Differenz ihrer Quadrate gleiche, d. i. man löſe die Aufgabe:

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

Auflöſung. 1) $x + y = x^2 - y^2$

$(x+y:)$ $\quad 1 = x - y.$

2) $x = y + 1$ ferner 3) $x = y + 1$

$$\frac{y = y}{x + y = 2y + 1} \qquad \frac{y = y}{xy = y^2 + y.}$$

 Da

* Da nun die Summe $(x+y)$ dem Produkte (xy) gleich ſeyn ſoll, ſo iſt auch

$$4)\quad y^2 + y = 2y + 1$$
$$y^2 - y = 1.$$
$$\text{Compl.}\quad y^2 - y + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}.$$
$$\surd\quad y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$5)\quad x = y + 1$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Probe.

$$1)\quad x + y = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}.$$

$$2)\quad xy = \frac{(3 + 4\sqrt{5}) + 5}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}.$$

$$3)\quad x^2 - y^2 = \frac{(14 + 6\sqrt{5})}{4} - \frac{(6 + 2\sqrt{5})}{4}$$
$$= \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}.$$

V. Endlich ſuche man zwey Zahlen von der Art, daß ihre Summe, ihr Produkt, die Summe ihrer Quadrate einander gleich ſind; d. i.

$$x + y = xy = x^2 + y^2.$$

Aufløſung. Man ſetze $x = a + b$
$y = a - b$
$x + y = 2a.$ die Summe

$xy = a^2 - b^2$ das Produkt.

$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2$ die Summe der Quadrate der Zahlen.

Nun vergleiche man die Summe der Zahlen mit ihrem Produkte.

$$2a = a^2 - b^2$$
$$b^2 = a^2 - 2a.$$

Dieſen Werth von b^2 in der Summe der Quadrate ſubſtituirt,

x^2

$$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2a^2 - 4a = 4a^2 - 4a$$

und mit der Summe 2a verglichen

$$2a = 4a^2 - 4a$$
$$6a = 4a^2$$
$$\tfrac{3}{2} = a$$

folglich $b^2 = a^2 - 2a = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = - \frac{3}{4}$

$$b = \tfrac{1}{2} \sqrt{-3}.$$

Es wird alſo $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$

$$y = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \sqrt{-3} = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}.$$

Probe.

1) $x + y = \frac{6}{2} = 3.$

2) $xy = \frac{12+(3\sqrt{-3})-(3\sqrt{-3})}{4} = \frac{12}{4} = 3.$

3) $x^2+y^2 = \frac{6+(6\sqrt{-3})}{4} + \frac{6-(6\sqrt{-3})}{4} = \frac{12}{4} = 3.$

Vierter Artikel.

Kubiſche Gleichungen.

§. 256.

Erklärungen.

1) Kubiſche Gleichung iſt diejenige, worin die höchſte Würde der unbekannten Größe der Kubus oder die dritte Würde iſt. Z. B. $x^3 = C$.

2) Eine kubiſche Gleichung heißt rein, wenn die unbekannte Größe nur allein im Kubus, und weder im Quadrate noch in der erſten Würde vorkommt

Z. B. $3x^3 = 81$.

Auch dieſe und ähnliche Formeln

Z. B. $ax^3 + bx^3 - cx^3 = S$ gehören zu den rein kubiſchen Gleichungen; denn durch Zerfällung ergiebt ſich

$$(a+b-c)\, x^3 = S$$
$$x^3 = \frac{S}{a+b-c}.$$

3) **Unrein** heißt ſie, wenn außer dem Kubus noch das Quadrat und die erſte Potenz der unbekannten Zahl vorkommt; und zwar heißt die Gleichung **vollſtändig**, wenn ſie alle dieſe drei Stücke enthält; widrigenfalls **unvollſtändig**.

Das Formular der vollſtändigen kubiſchen Gleichungen iſt $ax^3 \pm bx^2 \pm cx = \mp d$.

§. 257.

Um eine reine kubiſche Gleichung z. B. $3x^3 = 81$ aufzulöſen, hat man nur vonnöthen, den Factor oder Diviſor von der unbekannten Größe wegzuſchaffen, und beiderſeits die Kubikwurzel auszuziehen.

$$\text{Z. B. } 3x^3 = 81$$
$$\sqrt[3]{\;} \quad x^3 = 27$$
$$x = 3.$$

$$\text{Ferner. } \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = 72.$$
$$\frac{x^3}{24} = 72.$$
$$\sqrt[3]{\;} \quad x^3 = 1728$$
$$x = 12.$$

§. 258.

Es läßt aber jede kubiſche Gleichung einen dreifachen Werth für x zu, wiewohl man ſich in den gemeinen Rechnungen mit einem begnüget, indem die andern zwei nicht ſelten negativ oder gar unmöglich werden.

Um dieſen wichtigen Satz für die reinen kubiſchen Gleichungen zu erweiſen, habe man die allgemeine Gleichung

$$x^3 = c^3$$
$$\text{oder } x^3 - c^3 = 0.$$

Hier iſt offenbar für x ein Werth c

$$\text{oder } x = c$$
$$x - c = 0.$$

Um

Um nun einen zweiten Werth für x zu finden, dividire man $(x^3 - c^3)$ durch $(x - c)$.

$$
\begin{array}{l}
x - c)\ x^3 - c^3 \ \mid x^2 + cx + c^2. \\
\quad\ \underline{x^3 - cx^2} \\
\qquad\quad cx^2 - c^3 \\
\qquad\quad \underline{cx^2 - c^2x} \\
\qquad\qquad\quad c^2x - c^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{c^2x - c^3} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Da nun das Produkt $(x^3 - c^3)$ aus den Factorn $(x - c)$ und $(x^2 + cx + c^2)$ beſteht, ſo ergiebt ſich, daß erſteres zu 0 werden müſſe, wenn entweder der erſte, oder wenn der zweite Factor, oder beide = 0 ſind.

Es ſey alſo $x^2 + cx + c^2 = 0$.

$$x^2 + cx \quad = -c^2.$$

Compl. $x^2 + cx + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = -\frac{3c^2}{4}$

$$\sqrt{} \qquad x = \frac{-c \pm \sqrt{-3c^2}}{2} = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2}$$

$$\text{zerfällt:} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \times c.$$

Hieraus ergeben ſich denn die zwei neuen Werthe für x

$$x = \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} \times c$$

$$x = \frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2} \times c.$$

Um die Sache noch allgemeiner zu machen, weil c^3 auch eine Irrationalzahl werden kann, ſey

$c^3 = k$ folglich $c = \sqrt[3]{k}$ . .

Es ſind alſo die drey Werthe jeder reinen kubiſchen Gleichung

1) $x = \sqrt{k}$.

2) $x = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{k}$.

3) x

$$3)\ x = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{k}.$$

* Um dieſe allgemeine Formel in ſpecielle Fälle aufzulöſen, habe man a) $x^3 = 1.$

b) $y^3 = 8.$

c) $z^3 = 27.$

Im erſten Falle iſt $\sqrt[3]{k} = 1.$

Im zweyten Falle iſt $\sqrt[3]{k} = 2.$

Im dritten Falle iſt $\sqrt[3]{k} = 3.$

Es ſind alſo die drey Wurzeln

für a) $x = 1.$

$$x = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \times 1.$$

$$x = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \times 1.$$

für b) $y = 2.$

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \times 2 = -1+\sqrt{-3}.$$

$$y = -1-\sqrt{-3}.$$

für c) $z = \frac{-3+3\sqrt{-3}}{2}$

$$z = \frac{-3-3\sqrt{-3}}{2}$$

$$z = 3.$$

Die Probe hierüber kann auf doppelte Art gemacht werden. Entweder kubire man jede dieſer Formeln; und dann geben dieſe drey Werthe für x jedesmal 1, die für y . . . 8, die für z . . . 27. Z. B.

$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$\times\ -1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
———	———
$-2-2\sqrt{-3}$ Quadr.	$-2+2\sqrt{-3}$ Quadr.
$\times\ -1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
———	———
$2+2\sqrt{-3}$	$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}+6$	$+2\sqrt{-3}+6$
———	———
8 Kubus.	8 Kubus.

Oder

Oder man ſubſtituire jeden dieſer imaginären Werthe in der Formel

$$x^2 + cx + c^2 = 0.$$

worauf die Gleichung in jedem Falle $= 0$ wird.

Operation. 1) $x = -1 + \sqrt{-3}$.

$$\begin{aligned} \text{ſo iſt } x^2 &= -2 - 2\sqrt{-3} \\ cx &= -2 + 2\sqrt{-3} \\ c^2 &= 4 \\ \hline x^2 + cx + c^2 &= +4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

2) $x = -1 - \sqrt{-3}$

$$\begin{aligned} \text{folglich } x^2 &= -2 + 2\sqrt{-3} \\ cx &= -2 - 2\sqrt{-3} \\ c^2 &= +4 \\ \hline x^2 + cx + c^2 &= +4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

§. 259.

Satz. Auch unreine (vollſtändige oder unvollſtändige) kubiſche Gleichungen haben dreierley Wurzeln.

Beweis. Offenbar kann $x^2 - (a + b)\, x + ab = (x - a) . (x - b) = 0$ jede quadratiſche Gleichung vorſtellen. Aus dieſer quadratiſchen Gleichung entſteht nun die kubiſche, wenn noch ein dritter Factor $x = c$ oder $x - c = 0$ hinzutritt, wo a, b, c alle mögliche Zahlen vorſtellen kann.

Es iſt aber $[x - (a + b)\, x + ab] \times (x - c) = x^3 - (a + b + c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x - abc = 0$ (welches für die allgemeine Form aller kubiſchen Gleichungen gelten kann). In dieſer Gleichung kann x jeden Werth haben, welcher die Gleichung zu 0 macht. Nun macht ſowohl der Werth von a, als b und c die Gleichung zu 0 (denn wenn einer der Factorn $= 0$ iſt, iſt auch das Produkt $= 0$).

Alſo ſind a, b, c die drey Wurzeln dieſer kubiſchen Gleichung, welche die Form aller übrigen iſt; folglich hat jede kubiſche Gleichung drey Wurzeln, oder iſt ein Produkt aus drey Factorn.

Zuſatz.

Zuſatz. I. Iſt in dieſer Formel $b = c = \pm a$, ſo erhält man: $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = o$.

Iſt aber, wie §. praec., $a + b + c = o$ | $ab + ac + bc = o$ und $a^2 = bc$, ſo erhält man:

$$x^3 - a^3 = o.$$

Zuſatz II. Setzt man
$$a + b + c = S$$
$$ab + ac + bc = \Pi$$
$$abc = p$$
ſo verwandelt ſich die kubiſche Gleichung in dieſe:
$$x^3 - Sx^2 + \Pi x - p = o.$$

Zuſatz III. In jeder vollſtändigen kubiſchen Gleichung iſt

1) der Coefficient des zweiten Gliedes S gleich der Summe der Wurzeln,
2) der Coefficient des dritten Gliedes Π gleich der Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln,
3) das letzte Glied p gleich dem Produkte der drey Wurzeln.

Man habe die kubiſche Gleichung:
$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = o.$$

Dieſe, ſo wie jede kubiſche, Gleichung kann nun keine Wurzel haben, welche nicht ein Factor des letzten Gliedes (hier -15) iſt.

Die Factoren von 15 ſind: 1, 3, 5, 15. Die drey erſten machen die Gleichung zu o.

α) $x = 1 = a$	$1 - 9 + 23 - 15 = o$
β) $x = 3 = b$	$27 - 81 + 69 - 15 = o$
γ) $x = 5 = c$	$125 - 225 + 115 - 15 = o.$

Offenbar iſt nun: $S = a + b + c = 1 + 3 + 5 = 9$
$$\Pi = ab + ac + bc = 3 + 5 + 15 = 23$$
$$p = abc = 15.$$

Hat man einmal einen Factor für x gefunden, ſo ergeben ſich die beiden übrigen, wenn man den bekannten $= o$ ſetzt, und damit in die ganze Gleichung dividirt.

$x - 1$

$$x-1\,(x^3-9x^2+23x-15)=x^2-8x+15=0.$$

$$\begin{array}{l} x^3-x^2 \\ -\quad + \\ \hline \quad -8x^2+23x \\ \quad -8x^2+8x \\ \quad +\quad - \\ \hline \qquad\quad 15x-15 \\ \qquad\quad 15x-15 \\ \qquad\quad -\quad + \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Alſo: $x^2-8x = -15$

Compl. $x^2-8x+(4)^2 = 16-15=1$

folglich $x=4+\sqrt{1}=5$

oder $x=4-\sqrt{1}=3.$

Anmerkung. Dieſes letzte Verfahren muß jederzeit angewendet werden, ſo oft ſich die drey Wurzeln aus der bloßen Subſtitution nicht ergeben, oder wenn ſie irrational, oder gar unmöglich ſind,

z. B. in der Gleichung: $x^3-x^2-4=0.$

Die Factoren von 4 ſind 1. 2. 4.

Nun ſubſtituirt:

$x=1$	$1-1-4=-4$
$x=2$	$8-4-4=0$
$x=4$	$64-16-4=+44.$

Da hier die rationale Wurzel $=2$, ſo müſſen die beiden andern irrational werden:

$$x-2\,(x^3-x^2-4)=x^2+x+2.$$

$$x^2+x=-2.$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}.$$

§. 260.

Nicht allezeit ſind die rationalen Wurzeln für x poſitiv, ſondern ſehr oft eine, oder die andere, oder gar alle drey nega-

negativ. Um dieſes zu erkennen, hat man nur auf die Zeichen aller Glieder einer kubiſchen Gleichung zu ſehen.

Es erſcheinen aber folgende Formeln:

I. Wenn drey Wurzeln poſitiv $x=a$ oder $x-a=0$
$x=b$ . . $x-b=0$
$x=c$ . . $x-c=0$.

$$x^3-Sx^2+rx-p.$$

II. Wenn zwey Wurzeln poſitiv, und eine negativ,
d. i. $x=\ a$
$x=\ b$
$x=-c$.

$$x^3+dx^2-\delta x+p$$
oder $x^3-dx^2\pm\delta x+p$.

III. Wenn zwei negativ, und eine poſitiv,
d. i. $x=\ a$
$x=-b$
$x=-c$.

$$x^3+fx^2\mp gx-p$$
oder x^3-fx^2-gx-p.

IV. Wenn alle drey Wurzeln negativ ſind,
d. i. $x=-a$
$x=-b$
$x=-c$.

$$x^3+hx^2+mx+p.$$

Hieraus geht die Regel hervor:

„So viele Abwechſelungen der Zeichen in einer Gleichung vorkommen, eben ſo viele poſitive Wurzeln hat die Gleichung. So viele Wiederholungen des nemlichen Zeichens aber, eben ſo viele negative Wurzeln hat dieſelbe.“ —

* Man habe die Gleichung: $x^3+5x^2+2x-8=0$.

Die Factorn von 8 ſind: 1, 2, 4, 8.

Da in dieſer Gleichung zwey Wiederholungen, und nur eine Abwechſelung der Zeichen vorkommt, ſo ſind zwey Wurzeln negativ, und eine poſitiv. — Man ſubſtituire:

$x=$

$x = 1$	$1 + 5 + 2 - 8 = 8 - 8 = 0.$
$x = -2$	$-8 + 20 - 4 - 8 = 20 - 20 = 0.$
$x = -4$	$-64 + 80 - 8 - 8 = 80 - 80 = 0.$

§. 261.

Die erſte Methode alſo, unreine kubiſche Gleichungen aufzulöſen, wird durch folgende Regeln beſtimmt:

I. Man bringe die Gleichung auf 0.

II. Zerfälle das letzte Glied p und ſeine Factorn.

III. Subſtituire in der Gleichung für die unbekannte Größe einen dieſer Factorn nach dem andern, ſowohl poſitiv, als negativ.

IV. Wird dann durch einen oder durch mehrere die Gleichung $= 0$, ſo ſind dieſe Wurzeln der Gleichung.

V. Im entgegengeſetzten Falle hat die Gleichung gar keine Wurzeln in ganzen Zahlen.

VI. Die irrationalen oder imaginären Wurzeln findet man, wenn man die Gleichung durch den einen rationalen Factor, z. B. $x - a = 0$ dividirt, und den entſtehenden Quotus als eine quadratiſche Gleichung behandelt. — Daß man auf dieſe Art auch rationale und reelle Wurzeln finde, wurde ſchon §. 259 geſagt.

Beiſpiel. Welches ſind die drey Wurzeln der Gleichung: $x^3 - 14x^2 + 45x = 50.$

Operation. $x^3 - 14x^2 + 45x - 50 = 0.$

Factoren von 50 ſind: 1, 2, 5, 10.

Davon ſind 1, 2, offenbar zu klein:

$$125 - 350 + 225 - 50 = 350 - 400$$
$$1000 - 1400 + 450 - 50 = 1450 - 1450 = 0.$$

Alſo $x = 10$

und $x - 10 = 0.$

$$\frac{x^3 - 14x^2 + 45x - 50}{x - 10} = x^2 - 4x + 5 = 0.$$

$$x^2 - 4x = -5$$

Compl. $x^2 - 4x + 4 = -1$

$\sqrt{}$ $x - 2 = \pm\sqrt{-1}$

$$x = 2 + \sqrt{-1}$$
$$x = 2 - \sqrt{-1}.$$

Es

Es ſind alſo die drey Wurzeln:

$$x = 10$$
$$x = 2 + \sqrt{-1}$$
$$x = 2 - \sqrt{-1}.$$

§. 262.

Rechnungsvortheile.

I. Wenn bey x^3 ein Coefficient z. B. a ſteht, der, wenn man ihn durch die Diviſion hinwegſchafft, nicht bey jedem Gliede eine ganze Zahl zum Quotus giebt, ſo muß man die Wurzel vergrößern, und ſetzen:

$$ax = y$$
$$x = \frac{y}{a}.$$

Enthalten aber mehrere Glieder Fractionen eines verſchiedenen Nenners, ſo ſuche man dafür den kleinſten gemeinſchaftlichen Nenner, und ſetze ihn = a.

Z. B. $ax^3 - bx^2 - \pi x - p = 0$

$$x = \frac{y}{a}.$$

folglich $x^3 - \frac{bx^2}{a} - \frac{\pi x}{a} - \frac{p}{a} = 0$

$$= \frac{y^3}{a^3} - \frac{by^2}{a^3} - \frac{\pi y}{a^2} - \frac{p}{a} = 0$$

$a^3 \times \quad y^3 - by^2 - a\pi y - a^2 p = 0.$

* $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0.$

$x = \frac{y}{2}$ ſo entſteht

$$y^3 - 9y^2 + 20y - 12 = 0.$$

Die Factoren von 12 ſind = 1, 2, 3, 4, 12.

$y = 1$	$1 - 9 + 20 - 12 = 0$
$y = 2$	$8 - 36 + 40 - 12 = 0$
$y = 6$	$216 - 324 + 120 - 12 = 336 - 336 = 0.$

Es ſind alſo die drey Wurzeln für x

$$x = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2}{2} = 1$$
$$x = \frac{6}{2} = 3.$$

** $24u^3 - 43u^2 + \frac{51u}{2} - 5 = 0.$

$$u^3 - \frac{43u^2}{24} + \frac{51u}{48} - \frac{5}{24} = 0.$$

Hier iſt das kleinſte gemeinſchaftliche Dividend 48.

$$48 = 2.2.2.2.3. \text{ und } \frac{51u}{48} = \frac{17u}{16.}$$

d. i. $u = \frac{y}{48}.$

folglich $\frac{y^3}{48^3} - \frac{43 \cdot y^2}{48^2 \cdot 24} + \frac{17y}{16.48} - \frac{5}{24} = 0.$

$48^3 \times \quad y^3 - 86y^2 + 2448y - 23040 = 0.$

Die Factoren von 23040 ſind =
1.2.3.4.5.6.8.9.10.12.18.20.24.30.36.40.48 u. ſ. w.

Der kleinſte hievon iſt 24, welcher die Gleichung zu Null macht.

Alſo ſubſtituirt: $y = 24.$

$13824 - 49536 + 58752 - 23040 = 72576 - 72576 = 0.$

Nun mit $y - 24$ die Gleichung dividirt:

$$\frac{y^3 - 86y^2 + 2448y - 23040}{y - 24} = y^2 - 62y + 960.$$

$$y^2 - 62y = -960$$

Compl. $y^2 - 62y + (31)^2 = 961 - 960 = 1.$

$$y = 31 \pm \sqrt{1}$$
$$y = 32$$
$$y = 30.$$

Folglich ſind die Wurzeln für u

$$u = \tfrac{24}{48} = \tfrac{1}{2}$$
$$u = \tfrac{32}{48} = \tfrac{2}{3}$$
$$u = \tfrac{30}{48} = \tfrac{5}{8}.$$

II. Wenn das letzte Glied einer kubiſchen Gleichung (p) ziemlich groß, und zugleich ein Produkt von der Art iſt, daß der eine Factor deſſelben ein Kubus ... $f = h^3$ oder $p = qh^3$, ſo kann man die Wurzel vermindern, wenn man ſetzt $x = hy$. Dabey wird aber vorausgeſetzt, daß auch h ein

ein Factor des Coefficienten vom zweiten, und h^2 ein Factor des Coefficienten vom dritten Gliede iſt.

Alſo wird aus der Gleichung

$$x^3 - h\mathfrak{f}x^2 + h^2\pi x - qh^3 = 0$$

wenn $x = hy$

dieſe: $h^3y^3 - h^3\mathfrak{f}y^2 + h^3\pi y - qh^3 = 0$

h^3: $y^3 - \mathfrak{f}y^2 + \pi y - q = 0.$

* Z. B. $x^3 - 24x^2 - 252x + 2160 = 0.$

Da hier 2160 aus zu vielen Factoren beſteht, als daß man mit allen die Probe machen ſollte, und überdieß $2160 = 8 \cdot 27 \cdot 10$, d. h. die Factoren deſſelben die Kubuſſe von 2 und 3 ſind: ſo ſetze man $x = 6z$.

Subſtituirt: $216z^3 - 216.4z^2 - 216.7z + 2160 = 0$

216: $z^3 - 4z^2 - 7z + 10 = 0.$

Dieſe Gleichung hat nach §. 260 zwey poſitive und eine negative Wurzel.

Die Factoren von 10 ſind 1. 2. 5. 10.

$z = 1$	$1 - 4 - 7 + 10 = 0$
$z = 2$	$8 - 16 - 14 + 10 = -12$
$z = -2$	$-8 - 16 + 14 + 10 = 0$
$z = 5$	$125 - 100 - 35 + 10 = 0.$

Da nun $x = 6z$.. ſo ſind die drey Wurzeln für x . . . $x = +6$

$x = -12$

$x = +30.$

III. Enthält endlich das letzte Glied die Zahl 1, und führt die unbekannte Größe Coefficienten bey ſich, ſo ſetze man

$$x = \frac{1}{y}.$$

Z. B. $10x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$

$$x = \frac{1}{y}.$$

$$\frac{10}{y^3} - \frac{4}{y^2} - \frac{5}{y} - 1 = 0$$

$y^3 \times$. $10 - 4y - 5y^2 - y^3 = 0$

oder $y^3 + 5y^2 + 4y - 10 = 0.$

Da

Da zufolge der erſten Gleichung ein Werth für y die Zahl 1 ſeyn muß, ſo dividire man mit $y - 1 = 0$.

$$\frac{y^3 + 5y^2 + 4y - 10}{y - 1} = y^2 + 6y + 10.$$

und $y^2 + 6y = -10$

$$y = -3 + \sqrt{-1}$$

$$y = -3 - \sqrt{-1}.$$

Da nun $x = \frac{1}{y}$

ſo ſind die Wurzeln für x

$$x = \tfrac{1}{1} = 1.$$

$$x = \frac{1}{-3+\sqrt{-1}} = \frac{-3-\sqrt{-1}}{10}$$

$$x = \frac{1}{-3-\sqrt{-1}} = \frac{-3+\sqrt{-1}}{10}.$$

Bei den zwei letzten Fractionen kann man nemlich den Nenner rational machen, wenn man die erſte mit $(-3 - \sqrt{-1})$, und die zweite mit $(-3 + \sqrt{-1})$ ſowohl im Zähler, als Nenner multiplicirt.

§. 263.

Nicht allezeit ſind alle vier Theile einer vollſtändigen kubiſchen Gleichung gegeben, ſondern es kann der zweite, oder der dritte Theil fehlen; die Auflöſung geht nichts deſto weniger nach den bereits gegebenen Regeln.

Z. B. In der Gleichung: $3u^3 - 2u - 20 = 0$ fehlt das zweite Glied u^2, (das man mit dem Coefficienten 0 hinzudenken kann) $3u^3 \pm 0.u^2 - 2u - 20 = 0$.

Man ſetze $u = \frac{x}{3}$

$$\frac{x^3}{9} - \frac{2x}{3} - 20 = 0$$

$x^3 - 6x - 180 = 0$, welches durch 6 theilbar iſt

$$\frac{x^3 - 6x - 180}{x - 6} = x^2 + 6x + 30.$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 = 9 - 30 = -21$$

$$x = -3 + \sqrt{-21}$$

$$x = -3 - \sqrt{-21}.$$

Da

Da nun $u = \frac{x}{3}$

ſo wird $u = \frac{6}{3} = 2$

$$u = \frac{-3+\sqrt{-21}}{3}$$

$$u = \frac{-3-\sqrt{-21}}{3}.$$

* Für den Fall, daß das dritte Glied fehlt, habe man die Gleichung

$$5y^3 - 12y^2 - 27 = 0.$$

$$y = \frac{z}{5}.$$

$$\frac{z^3}{25} - \frac{12z^2}{25} - 27 = 0.$$

$$z^3 - 12z^2 - 675 = 0.$$

$$z = 3x$$

$$27x^3 - 108x^2 - 675 = 0$$

$$27: \; x^3 - 4x^2 - 25 = 0.$$

Ein Theil dieſer Gleichung iſt $x - 5 = 0$

$$\frac{x^3-4x^2-25}{x-5} = x^2 + x + 5 = 0$$

$$x^2 + x = -5$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{19}{4}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-19}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-19}}{2}$$

folglich $z = 15$

$$z = \frac{-3+3\sqrt{-19}}{2}$$

$$z = \frac{-3-3\sqrt{-19}}{2}.$$

Und $y = \frac{15}{5} = 3$

$$y = \frac{-3+3\sqrt{-19}}{10}$$

$$y = \frac{-3-3\sqrt{-19}}{10}.$$

§. 264.

Aus jeder kubiſchen Gleichung läßt ſich das zweite Glied ($\pm Sx^2$) hinausſchaffen, wenn man zu x noch den dritten Theil des Coefficienten im zweiten Gliede (mit dem gegebenen Zeichen) addirt, und die Summe $= y$ ſetzt. Z. B. Man ſoll aus der Gleichung

$x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$ das Quadratglied entfernen.

Operation. $x + \frac{3}{3} = y$

$$x + 1 = y$$

$$x = y - 1.$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ +3x^2 &= \quad + 3y^2 - 6y + 3 \\ -7x &= \quad - 7y + 7 \\ -6 &= \quad - 6. \end{aligned}$$

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = y^3 - 10y + 3.$$

In dieſer letzten Gleichung iſt 3 eine Wurzel von y.

$$\frac{y^3 - 10y + 3}{y - 3} = y^2 + 3y - 1$$

$$\text{und } y = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$\text{folglich } x = \frac{-5 \pm \sqrt{15}}{2.}$$

§. 265.

Im Gegentheil läßt ſich das Quadratglied leicht in jede kubiſche Gleichung, worin daſſelbe abgeht, hineinbringen, wenn man $x = y \pm a$ ſetzt, wo man für a eine beliebige Größe ſubſtituiren kann, und zwar mit + oder −, je nach dem man die erſte Gleichung vergrößern oder verkleinern will.

Z. B. Man verwandle die Gleichung $x^3 - 60x - 32$ in eine andere, worin das Quadratglied erſcheint.

Operation. Es ſey $x = y - 2$.

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ -60x &= -60y + 120 \\ -32 &= \quad - 32 \end{aligned}$$

$$x^3 - 60x - 32 = y^3 - 6y^2 - 48y + 80.$$

$$y^3 - 6y^2 - 48y + 80 = 0$$
$$y = 10$$
$$1000 - 600 - 480 + 80 = 0.$$
$$\frac{y^3 - 6y^2 - 48y + 80}{y - 10} = y^2 + 4y - 8.$$
und $y = -2 \pm \sqrt{12} = -2 \pm 2\sqrt{3}.$

folglich $x = y - 2 = 10 - 2 = 8$
$$x = -4 \pm 2\sqrt{3}.$$

§. 266.

Die zweite Methode, kubiſche Gleichungen, worin aber das Quadrat der unbekannten Zahl entweder ſchon gegeben, oder nach §. praec. hineingeſchafft werden muß, aufzulöſen, beſteht in folgendem:

I. Man ordne die Gleichung alſo, daß auf der einen Seite alle Würden der unbekannten Größe (x), auf der andern aber die bekannte Größe (p) zu ſtehen komme.

II. Nun ziehe man aus der Reihe der unbekannten Größe die Kubikwurzel aus, welches darin beſteht, daß man $\sqrt[3]{x^3} = x$ ſetzt, und dazu vom Mitfactor oder Coefficient des Quadratgliedes den dritten Theil, mit ſeinem Zeichen, hinſchreibt. Dieſes iſt nun der zweite Theil der Wurzel, und muß, wenn durchaus ganze Zahlen vorkommen, ebenfalls eine ganze Zahl ſeyn. Geht aber die Diviſion nicht rein auf, ſo iſt es gleichviel, ob man die nächſt höhere, oder die nächſt kleinere Zahl als Quotus gelten laſſe.

III. Nun erhebe man dieſe zweigliederige Wurzel wirklich zum Kubus, nach der Formel
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
addire oder ſubtrahire vor allem beiderſeits den Kubus des zweiten Theiles. — Aus der Summe, oder dem Reſte ($\pm p \pm b^3$) ergiebt ſich dann das Supplement zum Werthe von $x \pm r = \pm R$...

IV. Dieſe Größe $\pm R$ läßt ſich freilich nicht allezeit auf das erſtemal errathen. Man kann ſich aber die Rech-

nung

nung dadurch außerordentlich erleichtern, wenn man eine Tafel der Kubuſſe aller Zahlen von 1—1000, die am Ende beigefügt iſt, zu Hülfe nimmt, und den Kubus aufſchlägt, welcher der Größe p am nächſten kommt. Ferner weiß man, daß der Werth von x ($= \pm r \pm R$) ein Factor von p ſeyn müſſe, weswegen es vortheilhaft iſt, die Größe p in ihre Factoren, wo möglich, aufzulöſen, und beſonders den der wahrſcheinlichen Wurzel am nächſten kommenden zu bemerken.

V. Hat man nun die wahre oder wahrſcheinliche Wurzel aus $(p \pm b^3)$ erforſcht, ſo bemerke man, was die erſte Gleichung zu viel oder zu wenig habe, um ein reiner Kubus zu ſeyn. Dieſen Ueberſchuß oder Mangel hebe man beiderſeits, drücke aber $x^2 \ldots\ldots x \ldots\ldots$ in dem Werthe $\pm r \pm R$ aus; und vergrößere oder verkleinere die Wurzel ſo lange, bis die Größe $(\pm p \pm b^3)$ ein reiner Kubus wird; und dann hat man die Wurzel gefunden, wenn ja die Gleichung eine rationale Wurzel hat.

VI. Um die andern zwei Wurzeln zu finden, dividirt man die Gleichung durch den erſten Factor, z. B. $x-a=0$, und bringt ſie auf eine quadratiſche, wie ſchon bekannt iſt...

§. 267.

Beyſpiele nebſt Erklärung.

I. $x^3 + 27x^2 + 270x = 1576.$

Operation a) Die Factoren von 1576 ſind 2. 4. 8. 197.

b) Die nächſte Wurzel aus $x^3 + 27x + \ldots$ iſt $x + 9$. folglich $x + 9 = R$.

ſo daß $R - 9$ einer von den obigen Factorn für die Zahl 1576 wird.

c) $(x + 9)^3 = x^3 + 27x^2 + 243x + 729.$

d) Das Complement der erſten Gleichung zu einem reinen Kubus iſt alſo $-27x + 729$; doch muß der Werth von 27x von 2305 abgezogen werden.

$$x^3 + 27x^2 + 270x + 729 = 2305.$$

 (Der

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Der nächſte Kubus iſt 2197. Rad. 13.}\\ x + 9 = 13\\ x = 13 - 9 = 4\end{array}\right\}$$

$$-27x \ldots\ldots = -108$$

$$x^3 + 27x^2 + 243x + 729 = 2197.$$

$$\sqrt[3]{} \quad x + 9 = 13$$

$$x = 4.$$

Nun die übrigen zwey Wurzeln beſtimmt:

$$\frac{x^3 + 27x^2 + 270x - 1576}{x - 4} = x^2 + 31x + 394$$

$$x^2 + 31x = -394$$

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{-615}}{2.}$$

Anmerkung. Um zu entdecken, was auf der erſten Seite der Gleichung noch hinzukommen oder wegfallen müſſe, darf man nur den Kubus von x + dem dritten Theile von dem Coefficienten des zweiten Gliedes, hier $(x + 9)^3 = x^3 + 27x^2 + 243x + 729$ von der erſten Seite der gegebenen Gleichung abziehen:

$$\begin{array}{rrrrl} x^3 & + 27x^2 & + 270x & & = \ldots\ldots \\ x^3 & + 27x^2 & + 243x & + 729 & \\ - & - & - & - & \\ \hline & & + 27x & - 729. & \end{array}$$

Der Ueberſchuß 27x iſt folglich abzuziehen, das fehlende Glied — 729 hinzuzuzählen.

II. $y^3 - 86y^2 + 2448y = 23.040.$

Operation.

a) Die Factorn von p ſind: 5.6.8.9.12.24.30.32.36.40.48.

b) Die nächſte Wurzel y — 28

$$y - 28 = R$$

$$y = R + 28 = \text{Factor von p.}$$

c) $(y = 28)^3 = y^3 - 84y^2 + 2352y - 21.952.$

d) Complement der erſten Gleichung:

$$+ 2y^2 - 96y - 21.952$$

$$y^3 - 86y^2 + 2448y - 21952 = 1088.$$

(der

(der nächſte Kubus iſt 1000. Folglich wird y entweder $= 36$, d. i. $y = 8 + 28 \ldots$ oder $y = 24$, d. i. $y = 28 - 4$.)

Bedenkt man aber, daß man noch $96y$.. d. i. wenigſtens 96×24 abzuziehen habe, welches ſchon über 2000 beträgt, ſo iſt es wahrſcheinlicher, daß y nur $= 24$, und $R = \mp 4$, oder $+ 2$. (Nicht aber ± 3; denn weder $28 + 3$, noch $28 - 3$ iſt ein Factor von p.)

Alſo complirt.

$$\begin{array}{rr} y^3 - 86y^2 + 2448y - 21.952 = & 1088 \\ + 2y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots = & 1152 \\ - 96y \ldots\ldots = & -2304 \\ \hline y^3 - 84y^2 + 2352y - 21.952 = & -64. \end{array}$$

$$\sqrt[3]{} \qquad y - 28 = -4$$

$$y = 24.$$

Die übrigen zwey Werthe für y ſind

$$y = 31 \pm \sqrt{1}$$

$$y = 32 \text{ oder } y = 30.$$

III. $x^3 - 53x^2 + 983x = 6403.$

Operation. a) Die Factorn von 6403 ſind unbekannt, ſo viel aber iſt gewiß, daß ſie nicht 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 20. 21. ſind.

b) Die nächſte Kubikwurzel iſt $x - 18$.

c) $(x - 18)^3 = x^3 - 54x^2 + 972x - 5832$.

d) Complement. $-x^2 - 11x - 5832$.

$$x^3 - 53x^2 + 983x - 5832 = + 571.$$

Da nun hievon nicht nur x^2, d. i., wenigſtens 324, wenn auch $R = 0$, und überdieß $11x$, d. i. wenigſtens 198 (alſo Summe: 522) abgezogen werden muß, ſo kann die Wurzel aus dem Reſte 49 nichts anders, als 1, 2, 3 ſeyn.

alſo entweder $x - 18 = 1 \ldots\ldots x = 19$

oder $\begin{cases} x - 18 = 2 & x = 20 \\ x - 18 = 3 & x = 21. \end{cases}$

Ferner da die Zahl 6403 weder 2, noch 3 zu Factorn hat, ſo kann auch die Wurzel keinen dieſer Factorn haben; es muß alſo $R = 1$ ſeyn, oder es hat die Gleichung keine poſitive rationale Wurzel . . alſo $x = 19$.

$x^3 -$

$$x^3 - 53x^2 + 983x - 5832 = 571.$$

Complirt: $\quad - x^2 - 11x = -570.$

$$x^3 - 54x^2 + 972x - 5832 = 1.$$

$$\sqrt[3]{} \quad x - 18 = 1$$

$$x = 19.$$

Die irrationalen Wurzeln ſind: $x = 17 \pm 4\sqrt{-3}$.

IV. $x^3 - 30x^2 = -3872.$

Auflöſung. a) Die Factoren von p ſind: 2, 4, 8, 11, 22, 44 u. ſ. w.

b) Die nächſte Wurzel iſt $x - 10$.

c) $(x - 10)^3 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1000.$

d) Complement: $300x - 1000.$

$$x^3 - 30x^2 - 1000 = -4872.$$

Der nächſte Kubus wäre zwar 4096 (Rad. 16.)

$x = -16 + 10 = -6$. Da aber 6 kein Theiler von 3872 iſt, und die Zahl -4872, wenn man $300x$ dazu addirt, und R nur 9 gelten läßt, ſchon poſitiv wird, ſo wähle man aus folgenden Werthen für x den wahrſcheinlichſten.

$x = 11.$ Alſo $x - 10 = 1$

$x = 22 \qquad x - 10 = 12$

$x = 44 \qquad x - 10 = 34.$

Der mittlere Werth iſt offenbar der wahrſcheinlichſte, indem auf keinen Fall, wenn man $300x$ von 4872 abzieht, der Kubus von 1 bleiben kann. Alſo $x = 22$.

Complirt $x^3 - 30x^2 - 1000 = -4872$

$$+ 300x = + 6600$$

$$x^3 - 30x^2 + 300x - 1000 = 1728.$$

$$\sqrt[3]{} \quad x - 10 = 12$$

$$x = 22.$$

Ferner: $\dfrac{x^3 - 30x^2 + 3872}{x - 22} = x^2 - 8x - 176.$

$$x = 4 \pm \sqrt{192} = 4 \pm 8\sqrt{3}.$$

Anmerkung. Dieſe zweite Methode, unreine kubiſche Gleichungen aufzulöſen, verdient, wie ſie hier vorgetragen worden, den Tadel der Sachverſtändigen nicht, und iſt auch keines

keineswegs, wenn man alle vorgeſchriebene Punkte in der Operation beobachtet, ſo unſicher, als es beim erſten Anblicke ſcheinen möchte. Freilich muß man auch hier einen und den andern Werth blos verſuchen. Aber ſelbſt dieſe Verſuche ſind nicht ganz willkührlich, und werden durch Gründe beſtimmt.

§. 268.

Die dritte Methode endlich, kubiſche Gleichungen auch in dem Falle aufzulöſen, wenn ſie keine rationale Wurzeln, weder in ganzen, noch gebrochenen Zahlen haben, iſt folgende, deren Erfindung dem Scipio Ferreus zugeſchrieben wird, welche aber unter dem Namen Cardan's Regel bekannt iſt, indem ſie Cardan, mit ſeinem Freunde Tartaglia, weiter ausbildete und im Druck herausgab.

Man habe im allgemeinen die kubiſche Gleichung

$x^3 - \pi x - p = 0.$ oder $x^3 = \pi x + p.$

Die Wurzel hievon ſey $x = a + b$.

Erhebt man nun dieſe Wurzel zum Kubus, ſo erhält man $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + (3ab)(a+b).$

Da nun $x = a + b$

ſo wird, wenn man ſubſtituirt: $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx.$

Um dieſe Formel auch auf ſolche Fälle anzuwenden, wo a^3 und b^3 nicht reine Kubuſſe ſind, ſo ſey

$a^3 = k \qquad b^3 = c.$

folglich $a = \sqrt[3]{k} \qquad b = \sqrt[3]{c}$ und $3ab = 3\sqrt[3]{c.k}.$

Mithin $x^3 = 3x\sqrt[3]{c.k} + c + k.$

Wovon eine Wurzel ſeyn muß $a + b = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k}.$

Vergleicht man nun dieſe Gleichung mit der erſten

$x^3 = \pi x + p$, ſo erkennt man,

daß $\pi = 3\sqrt[3]{c.k}$ und $p = c + k.$

Folglich eine Wurzel dieſer Gleichung ſey

$x = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k}.$

Nun

Nun beſtimme man die Werthe für $\sqrt[3]{c}$ und $\sqrt[3]{k}$.

I. $3\sqrt[3]{c.k} = \pi.$

$3: \quad \sqrt[3]{c.k} = \frac{1}{3}\pi.$

Cubirt: $c.k = \frac{1}{27}\pi^3.$

$4c.k = \frac{4}{27}\pi^3.$

II. $c + k = p.$

quadrirt: $c^2 + 2ck + k^2 = p^2$

$-4ck = -\frac{4}{27}\pi^3$

$c^2 - 2ck + k^2 = p^2 - \frac{4}{27}\pi^3.$

$\sqrt{\quad} c - k = \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}.$

III. $c + k = p.$

$c - k = \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}.$

$$2c = p + \sqrt{p^2 - \tfrac{4}{27}\pi^3}$$

$$c = \frac{p + \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}$$

und $k = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2.}$

Folglich iſt die verlangte Wurzel: $\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k} =$

$$x = \sqrt[3]{\frac{p + \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{p - \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2.}}$$

Man habe z. B. die Gleichung: $x^3 = 12x + 16.$

Hier iſt $16 = p \ldots\ldots 12 = \pi.$

folglich $p^2 = 256. \quad \pi^3 = 1728.$

$\frac{4}{27}\pi^3 = 256.$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{256 - 256}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{256 - 256}}{2.}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{0}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 \quad \sqrt{0}}{2}} = 2\sqrt[3]{8} = 4.$$

§. 269.

Manchmal ſteckt die Wurzel in Binomien, aus denen man dieſelbe durch gewiſſe Kunſtgriffe herausfinden muß.

Man habe die Gleichung:

$$x^3 = 19x - 30.$$

Hier iſt $p = -30 \ldots p^2 = 900$

$\pi = 19 \quad \pi^3 = 6859$

$\frac{4}{27}\pi^3 = 1016\frac{4}{27}.$

$p^2 - \frac{4}{27}\pi^3 = -\frac{3136}{27}.$

x =

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\sqrt{\frac{-3136}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\sqrt{-\frac{3136}{27}}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\sqrt{\frac{+3136.\times-3}{81}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\sqrt{\frac{+3136\times-3}{81}}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\frac{56\sqrt{-3}}{9}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\frac{56\sqrt{-3}}{9}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-15+\frac{28\sqrt{-3}}{9}} + \sqrt[3]{-30-\frac{28\sqrt{-3}}{9}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-405+84\sqrt{-3}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{-405-84\sqrt{-3}}{27}}$$

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-405+84\sqrt{-3}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-405-84\sqrt{-3}}.$$

Nun iſt in dieſem Ausdrucke wirklich eine rationale Wurzel unſrer Gleichung enthalten; denn beide Binomien ſind reine Kubuſſe, indem

$$\frac{(-15+\sqrt{-3})^3}{2} = -405+84\sqrt{-3}$$

und $\frac{(-15-\sqrt{-3})^3}{2} = -405-84\sqrt{-3}$ iſt.

Alſo $x = \frac{1}{3} \times \frac{(-15+\sqrt{-3})}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{(-15-\sqrt{-3})}{2}$

$$x = \frac{-15-15}{6} = \frac{-30}{6} = -5.$$

Alſo iſt eine Wurzel der gegebenen Gleichung -5.

Anmerkung. Da die Zerfällung des Ausdrucks: $\sqrt{\frac{+3136\times-3}{81}}$ in: $\frac{56}{9}\sqrt{-3}$ ſehr willkührlich geſchah, ſo läßt ſich vermuthen, daß die Gleichung auch noch andere Wurzeln zulaſſe.

Denn $\sqrt{3136\times-3}$ iſt auch $= 7\sqrt{-192}$
oder $= 8\sqrt{-147}$.

Hieraus

Hieraus ergeben ſich denn folgende Werthe für x.

1) $x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{3240 + 84\sqrt{-192}} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{3240 - 84\sqrt{-192}}$.

Da aber $\sqrt[3]{(3240 + 84\sqrt{-192})} = 6 - \sqrt{-192}$

und $\sqrt[3]{(3240 - 84\sqrt{-192})} = 6 + \sqrt{-192}$

ſo wird $x = \frac{6 + \sqrt{-192} + 6 - \sqrt{-192}}{6} = 2$.

2) $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405 + 12\sqrt{-147}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405 - 12\sqrt{-147}}$

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{9 + \sqrt{-147}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{9 - \sqrt{-147}}{2}\right)$$

$$= \frac{18}{6} = 3.$$

* **Prüfung der Formel nach der erſten Auflöſung.**

Nach §. 268 iſt die Wurzel $x = a + b$.

ſo daß: $p = a^3 + b^3$

$\pi = 3ab$.

Nun iſt in der letzten Gleichung:

$$a = \frac{1}{3} \times \left[\frac{-15 + \sqrt{-3}}{2}\right] = \frac{-15 + \sqrt{-3}}{6}$$

$$b = \frac{1}{3} \times \left[\frac{-15 - \sqrt{-3}}{2}\right] = \frac{-15 - \sqrt{-3}}{6}$$

$$a^3 = \frac{-3240 + 672\sqrt{-3}}{216}$$

$$b^3 = \frac{-3240 - 672\sqrt{-3}}{216}$$

folglich: $a^3 + b^3 = \frac{-6480}{216} = -30 = p$

$$3ab = 3 \times \left[\frac{-15 + \sqrt{-3}}{6}\right] \times \left[\frac{-15 - \sqrt{-3}}{6}\right]$$

$$= \frac{228 \times 3}{36} = 19 = \pi.$$

§. 270.

Um eine allgemeine Formel für die Behandlung ſolcher Binomien zu erhalten, ſetze man z. B. die Kubikwurzel aus

$$20 + 14\sqrt{2} = x + \sqrt{y}.$$

alſo: $\sqrt[3]{20} + 14\sqrt{2} = x + \sqrt{y}$.

Cubirt

Cubirt: $20+14\sqrt{2} = x^3+3xy+3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$.

$$= x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}.$$

Nun iſt offenbar der rationale Theil 20 in $x^3+3xy\ldots$ der irrationale $14\sqrt{2}$ in $(3x^2+y)\sqrt{y}$ enthalten, und

$\sqrt{y} = \sqrt{2}$ und $y = 2$.

Alſo: $x^3+3.2x = 20$

$$x^3+6x-20 = 0$$

$$x = 2.$$

$$8+12-20 = 0.$$

Dieſen Werth für x findet man auch aus der zweiten Vergleichung:

$$(3x^2+y)\sqrt{y} = 14\sqrt{2}.$$

$$3x^2+2 = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 14.$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2.$$

Die verlangte Wurzel aus dem Binomium: $(20+14\sqrt{2})$ iſt alſo $2+\sqrt{2}$.

* Zur Uebung ſuche man die Wurzeln

a) aus $136+54\sqrt{6}$

b) aus $170+78\sqrt{3}\ldots$

Anmerkung. Manchmal wird die Wurzel aus ſolchen Binomien eine Fraction, wiewohl dieſe Fraction in dem Kubus des Binomium nicht ſichtbar war. — In einem ſolchen Falle ſetzt man die allgemeine Formel

$= \frac{x+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}}{a^3}$, wo man für a^3 den Werth eines Kubus von 2, 3, 4 ... ſubſtituiren muß, bis die Form $x^3+3xy-S=0$ wird. Z. B.

Man ſoll die Kubikwurzel aus: $-405+84\sqrt{-3}$ ziehen.

Setze ich hier $x^3+3xy = -405$

$y = -3$. Factorn von $405 = 3.5.9.$ u. ſ. w.

$x^3-9x = -405$

ſo wird die Formel gewiß niemals zu 0, ich mag für x was immer für eine ganze Zahl ſubſtituiren.

Daher

Daher ſetze ich $\frac{x^3 - 9x}{a^3} = -405$ . . und $a = 2$
$a^3 = 8$.

$$x^3 - 9x = -3240$$ Factorn von 3240 = 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 15. u. ſ. w.

$$x = -15$$

$$-3375 + 135 = -3240.$$

Und ſo auch $\frac{(3x^2 + y)\sqrt{y}}{a^3} = 84\sqrt{-3}$

$$3x^2 - 3 = 84 \times 8$$

$$3x^2 - 3 = 672$$

$$3 : \quad x^2 - 1 = 224$$

$$x^2 = 225$$

$$x = \pm 15.$$

Alſo iſt die verlangte Wurzel : $\frac{-15 + \sqrt{-3}}{2}$.

§. 271.

Um die Kardans-Regel auch auf jene kubiſchen Gleichungen anzuwenden, worin das Quadrat der unbekannten Zahl vorkommt, und welche in der Form:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$ enthalten ſind:

ſetze man: $x - \frac{1}{3}a = y$

$$x = y + \frac{1}{3}a.$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + ay^2 + \tfrac{1}{3}a^2y + \tfrac{1}{27}a^3 \\ -ax^2 &= \quad -ay^2 - \tfrac{2}{3}a^2y - \tfrac{1}{9}a^3 \\ bx &= \quad by + \tfrac{1}{3}ab \\ -c &= \quad -c. \end{aligned}$$

$$y^3 - (\tfrac{1}{3}a^2 - b)y + \tfrac{1}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab - c = 0.$$

Vergleicht man nun dieſen Ausdruck mit der Formel:

$$x^3 - \pi x - p = 0$$

ſo iſt $\pi = (\frac{1}{3}a^2 - b)$

$$p = -\tfrac{2}{27}a^3 + \tfrac{1}{3}ab + c.$$

Man habe z. B. die kubiſche Gleichung:

$$x^3 + 6x^2 - 19x - 84 = 0.$$

Man ſetze $x + 2 = y$

$x = y - 2$ . . . ſo erhält man:

$x^3 =$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ 6x^2 &= \phantom{y^3 - {}} 6y^2 - 24y + 24 \\ -19x &= \phantom{y^3 - 6y^2 + {}} - 19y + 38 \\ -84 &= - 84 \end{aligned}$$

$$y^3 - 31y - 30 = 0.$$

oder $y^3 = 31y + 30.$

Hier iſt $\pi = 31.$ $p = 30$

$4\pi^3 = 119.164$ $p^2 = 900.$

$$p^2 - \tfrac{4}{27}\pi^3 = \frac{94.864}{27}.$$

Da nun $\sqrt{\frac{-94.864}{27}} = \sqrt{\frac{94864 \times -3}{81}} = \frac{308}{9}\sqrt{-3} =$

a) $\frac{154}{9}\sqrt{-12}.$ b) $\frac{28}{9}\sqrt{-363}.$ c) $\frac{44}{9}\sqrt{-147} \ldots$

ſo ergeben ſich für y folgende drey Werthe:

a) $y = \sqrt[3]{15 + \tfrac{77}{9}\sqrt{-12}} + \sqrt[3]{15 - \tfrac{77}{9}\sqrt{-12}}$

$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 + 231\sqrt{-12}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 - 231\sqrt{-12}}$

$y = \tfrac{1}{3}(9 + \sqrt{-12}) + \tfrac{1}{3}(9 - \sqrt{-12})$

$y = \tfrac{18}{3} = 6.$

b) $y = \sqrt[3]{15 + \tfrac{14}{9}\sqrt{-363}} + \sqrt[3]{15 - \tfrac{14}{9}\sqrt{-363}}$

$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 + 42\sqrt{-363}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 - 42\sqrt{-363}}$

$y = \tfrac{1}{3}\left(\frac{-3 + \sqrt{-363}}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-3 - \sqrt{-363}}{2}\right)}$

$y = \frac{-6}{6} = -1.$

c) $y = \sqrt[3]{15 + \tfrac{22}{9}\sqrt{-147}} + \sqrt[3]{15 - \tfrac{22}{9}\sqrt{-147}}$

$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 + 66\sqrt{-147}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{405 - 66\sqrt{-147}}$

$y = \tfrac{1}{3}\left(\frac{-15 + \sqrt{-147}}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{-15 - \sqrt{-147}}{2}\right)$

$y = -\tfrac{30}{6} = -5.$

Da nun $y = 6 = -1 = -5$

und $x = y - 2.$

So

So ſind die drey Wurzeln für x

$x = 4.$

$x = -3.$

$x = -7.$

§. 272.

Anſtatt die drey Wurzeln mühſam aus ſolchen Binomien herauszufinden, begnügt man ſich, eine erhalten zu haben (da ohnehin ſehr ſelten drey darin enthalten ſind), und ſucht die übrigen auf dem bekannten Wege.

Man habe z. B. $x^3 = 7x - 6.$

Hier iſt $p = 7. \quad p^2 = 49. \quad \pi = -6.$

$$\frac{4}{27}\pi^3 = + 32.$$

Folglich $x = \sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{81}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{81}}{2}}$

$$x = \sqrt[3]{\frac{7+9}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1} = 2 - 1 = 1.$$

Da nun eine Wurzel der Gleichung $= 1 \ldots$ ſo iſt

$$\frac{x^3 - 7x + 6}{x - 1} = x^2 + x - 6.$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} \ldots = \tfrac{25}{4}.$$

Daher $x = \frac{-1 \pm 5}{2} = + 2$ oder $= - 3.$

* Als Beyſpiel ſolcher Gleichungen, welche nur eine rationale Wurzel zulaſſen, diene folgende Aequation.

$$x^3 = 12x - 9.$$

Hier iſt $p = -9 \qquad \pi = 12$

$$p^2 = 81 \qquad \frac{-4\pi^3}{27} = - 256.$$

folglich $p^2 - \frac{4\pi^3}{27} = - 175 = 25 \times -7.$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{25 \times -7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{25 \times -7}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-9+5\sqrt{-7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9-5\sqrt{-7}}{2}}$$

$x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{-36 + 20\sqrt{-7}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-36 - 20\sqrt{-7}}$

$x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{-7}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{-7})$

$x = \frac{6}{2} = 3$ und $x - 3 = 0$.

Nun erforſche man, ob die Gleichung noch andere rationale Wurzeln habe ...

$$\frac{x^3 - 12x + 9}{x - 3} = x^2 + 3x - 3.$$

$$x^2 + 3x + (\tfrac{3}{2})^2 = \frac{9 + 12}{4} = \tfrac{21}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Alſo hat die Gleichung keine rationale Wurzel außer 3.

Anmerkung. So ſcharfſinnig die Kardans-Regel an ſich ſeyn mag, eben ſo beſchwerlich, ja oft beinahe unmöglich iſt es, wenn $\frac{-4\pi^3}{27}$ negativ und viel größer als p^2 wird, die imaginäre Wurzelgröße ſo zu zerfällen, daß der eine Factor derſelben poſitiv und rational, und die ganze Formel zu einem kubiſchen Binomium werde. Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^3 = 99{,}9x + 1, \text{ oder}$$

wenn $x = \frac{y}{10}$ geſetzt wird

$$y^3 = 999000y + 1000$$

wovon eine Wurzel $y = 100$ und alſo $x = 10$ iſt.

Dieſe Wurzel wird nun durch die Kardansregel nur mit äußerſter Mühe gefunden, da ſie ſich doch nach der erſten Methode ſehr leicht ergiebt. — In dieſen und ähnlichen Fällen iſt alſo die Kardansregel nicht wohl anwendbar. Dabey muß aber erinnert werden, daß weder dieſe Regel, noch die Lehre von den kubiſchen Gleichungen überhaupt jene Vollkommenheit bisher erreicht haben, deren ſie vielleicht fähig ſind.

§. 273.

§. 273.

Probleme des dritten Grades (reine und unreine).

I. Man ſuche eine Zahl, welche zum Produkte aus ihrer Hälfte, ihrem dritten und vierten Theil 4608 giebt.

Auflöſung. Die Zahl ſey x.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = 4608.$$

$$\frac{x^3}{24} = 4608$$

$$x^3 = 110.592$$

$$\sqrt[3]{} \quad x = 48.$$

II. Bey einem Baue erhält täglich jeder Mauerer ſo viele Kreutzer, als der Mauerer; jeder Handlanger ſo viele Kreutzer, als der Handlanger ſind (es haben aber je zwey Mauerer einen Handlanger). Nun arbeiten alle dieſe Perſonen ſchon zweimal ſo viele Tage, als ihre Geſammtzahl beträgt, und der Bau koſtete bisher 1098 fl. 30 kr. Wie viel ſind der Arbeiter von jeder Sorte?

Auflöſung. Es ſind x Handlanger, folglich 2x Mauerer.

$$\begin{array}{l|l} \text{kr. ?} & 2x\ \text{M.} \\ \text{M. } 1 & 6x\ \text{T.} \\ \text{T. } 1 & 2x\ \text{kr.} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{? = 24x^3.} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \text{kr ?} & x\ \text{H.} \\ \text{H. } 1 & 6x\ \text{T.} \\ \text{T. } 1 & x\ \text{kr.} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{? = 6x^3.} \end{array}$$

1098 fl. 30 kr. = 65910 kr. Tage = 6x.

Alſo $30x^3 = 65.910$

$$x^3 = 2197$$

$$\sqrt[3]{} \quad x = 13.$$

Alſo waren es 13 Handlanger, 26 Mauerer; ſie arbeiteten $39 \times 2 = 78$ Tage.

III. Der kubiſche Inhalt eines Zimmers, welches um 6 Fuß breiter als hoch, und um 7 Fuß länger als breit iſt, beträgt 7560 Kubikfuß. Man beſtimme hieraus die drey Dimenſionen.

Auf-

Aufløſung. Die Höhe ſey x ... ſo iſt die Breite x + 6. die Länge x + 13 Fuß.

$$x \times x+6 \times x+13 = x^3 + 19x^2 + 78x.$$

Alſo: $x^3 + 19x^2 + 78x = 7560.$

Operation. a) Die nächſte Wurzel aus dieſem Kubus iſt: $x+6$.

folglich $x + 6 = R$.

ſo daß $x = R - 6$ ein Factor von 7560 wird.

Es ſind aber dieſe Factorn: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 20 u. ſ. w.

b) $(x+6)^3 = x^3 + 18x^2 + 108x + 216.$

c) Complement: $-x^2 + 30x + 216.$

$$x^3 + 19x^2 + 78x + 216 = 7776.$$

{ Die nächſte Wurzel von 7776 iſt 19 oder 20.
Da nun 19 − 6 = 13 = R kein Factor von 7560
wohl aber 20 − 6 = 14 iſt ... ſo ſey x = 14. }

$$-x^2 + 30x \ldots\ldots = +224$$

$$x^3 + 18x^2 + 108x + 216 = 8000$$

$$x + 6 \ldots\ldots = 20$$

$x = 14$ die Höhe des Zimmers.

Folglich die Breite = 20 .. die Länge = 27 Fuß.

Probe. $14 \times 20 \times 27 = 280 \times 27 = 7560.$

Nun verſuche man, ob die Gleichung vielleicht noch andere rationale Wurzeln habe:

$$\frac{x^3 + 19x^2 + 78x - 7560}{x - 14} = x^2 + 33x + 540.$$

$$x^2 + 33x + \left(\frac{33}{2}\right)^2 = -\frac{1071}{4}$$

$$x = \frac{-33 \pm \sqrt{-1071}}{2}.$$

Alſo hat die Gleichung nur eine rationale Wurzel, nemlich 14.

IV. Einige Kaufleute hatten zu einer gemeinſchaftlichen Unternehmung 21900 fl. zuſammengelegt, und dieſe Summe, ein jeder um eben ſo viele Hundert vermehrt, als ihrer Perſonen waren. Mit dieſem Gelde machten ſie einen

Gewinn von eben ſo viel Procent, als ihrer Köpfe waren. Und wiewohl ſie von dem gemeinſchaftlichen Gewinne, jeder 26mal ſo viele Gulden, als Perſonen waren, abgezogen hatten, ſo waren doch noch 594 fl. übrig.

Aus wieviel Perſonen war die Geſellſchaft beſtanden?

Auflöſung. Es waren x Perſonen. Zur erſten Summe legte eine 100x; alle zuſammen $100x^2$. Dieſes verintereſſirt zu x Procent, giebt

$$\begin{array}{r|l} ? & 21900 + 100x^2 \\ 100 & x \end{array}$$

$$? = 219x + x^3.$$

Davon zogen ſie alle ab: $(26x) \times x = 26x^2$; alſo:

$$x^3 - 26x^2 + 219x = 594$$
$$x^3 - 26x^2 + 219x - 594 = 0.$$

Die Factoren von 594 ſind: 2, 3, 6, 9, 11, 22, 33 u. ſ. w.

Die erſten zwey ſind offenbar zu klein; man verſuche die nächſten:

$$(x = 6)\ 216 - 936 + 1314 - 594 = 0.$$
$$(x = 9)\ 729 - 2106 + 1971 - 594 = 0.$$
$$(x = 11)\ 1331 - 3146 + 2409 - 594 = 0.$$

Es waren alſo 6, 9 oder 11 Kaufleute.

Probe. I. II. III.

Zahl der Kaufleute.	6	9	11
Vorläufige Summe	21900	21900	21900
Dazu legte ein Jeder 100x . . .			
folglich alle $100x^2$	3600	8100	12100
Folglich das ganze Kapital . . .	25500	30000	34000
Damit gewinnen ſie ſo viele Procente,			
als der Perſonen ſind	1530	2700	3740
Hievon nimmt ein jeder 26x			
alle . . . . $26x^2$ . .	936	2106	3146
Reſt	594	594	594

Fünf-

Fünfter Artikel.

Biquadratiſche Gleichungen.

§. 274.

Biquadratiſch, oder Gleichung des vierten Grades heißt diejenige Gleichung, worin die unbekannte Größe in der vierten Potenz vorkommt. — Auch dieſe Gleichungen ſind entweder rein, oder unrein, welche Begriffe für ſich ſchon klar ſind.

Die Form der reinen biquadratiſchen Gleichungen iſt

$$x^4 = Q$$

$$x = \sqrt[4]{Q}.$$

oder $x = \sqrt{\sqrt{Q}}.$

d. h. Man ziehe aus Q die Quadratwurzel, und dieſe ſey z. B. = R. Aus dieſer ziehe man noch einmal die Wurzel, und ſo hat man einen Werth der biquadratiſchen Gleichung für x.

Z. B. $x^4 = 33362176.$

$$x^2 = \sqrt{33362176} = 5776.$$

$$x = \sqrt{5776} = 76.$$

§. 275.

Jede biquadratiſche Gleichung, ſowohl reine als unreine, hat viererley Werthe, welches für die reinen alſo gezeigt wird. — Man habe die Gleichung $x^4 = p^4$.

Man ziehe hieraus die Quadratwurzel, ſo ergiebt ſich

$$x^2 = \pm \sqrt{p^4} = \pm p^2.$$

alſo $x^2 = + p^2$

und $x^2 = - p^2.$

Zieht man hieraus noch einmal die Wurzel, ſo ergeben ſich die vier Werthe für x:

$x = \pm \sqrt{p^2}$	$x = \pm \sqrt{-p^2}$
1) $x = + p$	3) $x = + \sqrt{-p^2}$
2) $x = - p$	4) $x = - \sqrt{-p^2}.$

 §. 276.

§. 276.

Biquadratiſche Gleichungen, welche die Form haben:

$$x^4 \pm Sx^2 \pm p = 0$$

oder $x^4 \pm Sx^2 = \mp p$

laſſen ſich ganz als quadratiſche behandeln; man ſetze nemlich

$x^2 = y$. So erhält man

$$y^2 \pm Sy = \mp p$$

$$y^2 \pm Sy + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{\mp 4p + S^2}{4}$$

$$y = \frac{\mp S \pm \sqrt{\mp 4p + S^2}}{2}$$

folglich: $x = \pm \sqrt{\dfrac{\mp S \pm \sqrt{\mp 4p + S^2}}{2}}$ (vergl. §. 254.)

§. 277.

Die Form einer vollſtändigen biquadratiſchen Gleichung iſt:

$$x^4 \pm sx^3 \pm Sx^2 \pm \Sigma x \pm P = 0.$$

Hievon ſeyen die vier Wurzeln

$x = \delta$ alſo $x - \delta = 0$

$x = \lambda$ $\quad x - \lambda = 0$

$x = \mu$ $\quad x - \mu = 0$

$x = \pi$ $\quad x - \pi = 0.$

Das Produkt aus dieſen vier Wurzeln iſt:

$$x^4 - (\delta + \lambda + \mu + \pi)x^3 + (\delta\lambda + \delta\mu + \delta\pi + \lambda\mu + \lambda\pi + \mu\pi)x^2$$
$$- (\delta\lambda\mu + \delta\lambda\pi + \delta\mu\pi + \lambda\mu\pi)x + \delta\lambda\mu\pi = 0.$$

Vergleicht man dieſe Aequation mit der vorigen: ſo ergiebt ſich,

daß $s = \delta + \lambda + \mu + \pi$

$S = \delta\lambda + \delta\mu + \delta\pi + \lambda\mu + \lambda\pi + \mu\pi$

$\Sigma = \delta\lambda\mu + \delta\lambda\pi + \delta\mu\pi + \lambda\mu\pi$

$P = \delta\lambda\mu\pi.$

d. h., daß

1) Der Coefficient des zweiten Gliedes die Summe der einfachen Wurzeln,

2) der Coefficient des dritten Gliedes die Summe der Produkte aus je zwey Wurzeln,

3) der Coefficient des vierten Gliedes die Summe der Produkte aus je drey Wurzeln,

4) das letzte Glied endlich das Produkt der vier Wurzeln enthalte.

Zugleich erkennt man hieraus, daß eine biquadratiſche Gleichung keine andere rationale Wurzel habe, als welche ein Factor der Größe P iſt.

§. 278.

Die erſte Art biquadratiſche Gleichungen aufzulöſen iſt demnach folgende:

I. Man bringe die Gleichung auf o.

II. Suche einen ſchicklichen Factor der Größe P, welcher die Gleichung = o macht.

III. Mit dieſem Factor dividire man die ganze Gleichung, bringe ſie auf eine kubiſche, und behandle ſie nach den ſchon gegebenen Regeln.

IV. So viele Abwechſelungen der Zeichen vorkommen; eben ſo viele poſitive Wurzeln hat die Gleichung; im Gegentheil aber ſo viele negative, als Wiederholungen des nemlichen Zeichen vorkommen.

Man habe die Gleichung:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18.$$

In dieſer Gleichung kommen drey Abwechſelungen der Zeichen, und eine Wiederholung vor. Die Gleichung hat alſo drey poſitive und eine negative Wurzel.

Die Factoren von 18 ſind: $\pm$ 1, 2, 3, 6, 9, 18.

$x = 1$	$1 - 3 - 7 + 27 - 18 = 28 - 28 = 0$
$x = -1$	$-1 + 3 - 7 - 27 - 18 = 4 - 52 = -48$
$x = 2$	$16 - 24 - 28 + 54 - 18 = 70 - 70 = 0$
$x = 3$	$81 - 81 - 63 + 81 - 18 = 162 - 162 = 0$
$x = -3$	$+81 + 81 - 63 - 81 - 18 = 162 - 162 = 0.$

Die

Die vier Wurzeln der Gleichung ſind alſo:

$$x = + 1$$
$$x = + 2$$
$$x = + 3$$
$$x = - 3.$$

§. 279.

Da dieſe Verſuche, um ſchickliche Factorn für x zu finden, ziemlich mühſam ſind, und dabey nur in ſolchen Fällen paſſen, wo die Gleichung eine rationale Wurzel hat: ſo hat man andere Wege entdeckt, biquadratiſche Gleichungen aufzulöſen. Es ſind dieſes theils ſpecielle Regeln für einzelne Fälle, theils allgemeine Auflöſungen von was immer für biquadratiſchen Gleichungen.

I. Specieller Fall.

Wenn in einer biquadratiſchen Gleichung die Coefficienten vorwärts eben ſo fortgehen, als rückwärts, und das zweite und vorletzte Glied gleiche Zeichen haben, z. B. in der Gleichung $x^4 \pm Ax^3 \pm Bx^2 \pm Ax + 1.$

oder noch allgemeiner

$$x^4 \pm Amx^3 \pm Bm^2x^2 \pm Am^3x + m^4$$

So läßt ſich jede ſolche Gleichung als eine complexe Größe betrachten, deren Factorn

$(x^2 + Cmx + m^2) \times (x^2 + Dmx + m^2)$, alſo quadratiſche Gleichungen ſind, derer jede eine doppelte Wurzel enthält. Nun kommt es darauf an, die Buchſtaben C und D ſo zu beſtimmen, daß das Produkt aus dieſen Factorn; nemlich:

$$x^4 + (C+D)mx^3 + (CD+2)m^2x^2 + (C+D)m^3x + m^4 = 0$$

der obigen Gleichung vollkommen gleich werde; dieß geſchieht offenbar, wenn $C + D = A$

$CD + 2 = B$ oder $CD = B - 2$ iſt.

Nun beſtimme man die Werthe für C und D.

$$(C+D)^2 = A^2$$
$$\underline{-4CD = -4B+8}$$
$$C^2-2CD+D^2 = A^2-4B+8.$$
$$C-D = \sqrt{A^2-4B+8}.$$

aber $C+D = A$

folglich $C = \dfrac{A+\sqrt{A^2-4B+8}}{2}$

$D = \dfrac{A-\sqrt{A^2-4B+8}}{2}.$

Beyſpiele.

I. $x^4-5x^3-12x^2-5x+1.$

Aufloͤſung. Hier iſt $\left.\begin{matrix}A=-5.\\B=-12.\end{matrix}\right\}m=1.$

$$C=\frac{-5+\sqrt{25+48+8}}{2}=\frac{-5+9}{2}=2.$$

$$D=\frac{-5-\sqrt{81}}{2}=\frac{-14}{2}=-7.$$

Die zwey Factorn der Gleichung ſind alſo

(x^2+2x+1) und (x^2-7x-1).

Hieraus ergeben ſich folgende vier Wurzeln:

1) $x^2+2x=-1$	2) $x^2-7x=-1$
$x^2+2x+1=1-1=0$	$x^2-7x+(\frac{7}{2})^2=\frac{45}{4}$
$x=-1$	$x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$
und $x=-1$.	$x=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

* Um die Probe zu machen, multiplicire man die gefundenen zwey Factorn durcheinander; das Produkt giebt die vorige biquadratiſche Gleichung.

II. $x^4+9x^3+36x^2+81x+81=0.$

Aufloͤſung.

Dieſe Gleichung laͤßt ſich, wenn man $m^4=81$
$m=3$ ſetzt,
alſo ausdruͤcken:

$$x^4+3.3x^3+4.9x^2+3.27x+81=0.$$

Hier

Hier iſt $A = 3.$ $B = 4.$ $m = 3.$

Alſo $C = \frac{3 + \sqrt{9 - 16 + 8}}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2.$

$D = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1.$

Die beiden Factoren ſind alſo

1) $x^2 + Cmx + m^2 = x^2 + 6x + 9$
2) $x^2 + Dmx + m^2 = x^2 + 3x + 9.$

Die Wurzeln für x werden

$x = -3.$	$x = \frac{-3 + 3\sqrt{-1}}{2.}$
$x = -3.$	$x = \frac{-3 - 3\sqrt{-1}}{2.}$

III. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 32x + 16 = 0.$

Auflöſung. $m^4 = 16$ alſo $m = 2$

$x^4 - 4 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 4x^2 - 4 \cdot 8x + 16 = 0.$

$A = -4.$ $B = -3.$ $m = 2.$

Daher $C = 1.$ $D = -5.$

Die zwey Factorn der biquadratiſchen Gleichung ſind alſo:

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$x^2 - 10x + 4 = 0.$

Die Wurzeln daraus:

$x = -1 + \sqrt{-3}$	$x = 5 + \sqrt{21}$
$x = -1 - \sqrt{-3}$	$x = 5 - \sqrt{21.}$

§. 280.

II. Specieller Fall.

Wenn die Coeſſicienten einer biquadratiſchen Gleichung vorwärts eben ſo fortlaufen, als rückwärts; aber das zweite und vorletzte Glied verſchiedene Zeichen haben, z. B. in der Gleichung: $x^4 \pm Amx^3 \pm Bm^2x^2 \mp Am^3x + m^4 = 0.$

So läßt ſich dieſelbe als ein Produkt folgender Factorn: $(x^2 + Cmx - m^2) \times (x^2 + Dmx - m^2) = 0$ darſtellen.

Denn

Denn das Produkt aus dieſen Factorn:

$$x^4+(C+D)mx^3+(CD-2)m^2x^2-(C+D)m^3x+m^4=0$$

iſt mit der obigen Gleichung ganz einerley, wenn

$$C+D=A.$$
$$CD=B+2.$$

Aus welchen Gleichungen ſich, analog mit dem Verfahren im vorhergehenden §. ergiebt:

$$C=\frac{A+\sqrt{A^2-4B-8}}{2}.$$

$$D=\frac{A-\sqrt{A^2-4B-8}}{2}.$$

Beyſpiele.

I. $x^4+7x^3+10x^2-7x+1.$

Auflöſung. Hier iſt $A=7.$ $B=10.$ $m=1.$

$$C=\frac{7+\sqrt{49-40-8}}{2}=\frac{7+1}{2}=4.$$

$$D=\frac{7-\sqrt{49-40-8}}{2}=\frac{7-1}{2}=3.$$

Die zwey Factorn dieſer Gleichung ſind alſo:

(x^2+4x-1) und (x^2+3x-1)

Daraus ergeben ſich die vier Wurzeln

1) $x=-2+\sqrt{5}.$	3) $x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$
2) $x=-2-\sqrt{5}.$	4) $x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$

II. $x^4-15x^3+375x+625=0.$

Auflöſung. Hier iſt $m^4=625$ und $m=5.$

alſo $x^4-3.5x^3+3.125x+625=0.$

Alſo $A=-3.$ $B=0.$

folglich $C=\frac{-3+1}{2}=-1.$ $D=\frac{-3-1}{2}=-2.$

Die zwey Factorn der biquadratiſchen Gleichung ſind alſo:

$(x^2-5x-25)\times(x^2-10x-25).$ Daraus

Daraus ergeben ſich die vier Wurzeln:

1) $x = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{2}$	3) $x = 5 + 5\sqrt{2}$
2) $x = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{2}$	4) $x = 5 - 5\sqrt{2}$.

§. 281.

Die zweyte allgemeine Methode, biquadratiſche Gleichungen aufzulöſen, iſt die ſogenannte Regel des Bombelli *), und beſteht in folgendem.

Man ſetze die allgemeine Formel biquadratiſcher Gleichungen: $x^4 + sx^3 + Sx^2 + \Sigma x + P = 0$, worin die Buchſtaben s, S, Σ, P alle möglichen, poſitiven und negativen Zahlen bedeuten können; ſey einerley mit der:

$(x^2 + \frac{1}{2}sx + A)^2 - (Bx + C)^2$, wobey es nur darauf ankommt, die Buchſtaben A, B, C ſo zu beſtimmen, daß die obige Gleichung herauskomme.

Nun erhebe man die beiden Formeln zu den angezeigten Würden, ſo erhält man:

$$\begin{aligned} x^4 + sx^3 + \tfrac{1}{4}s^2x^2 &+ sAx + A^2 \\ + 2Ax^2 &- 2BCx - C^2 \\ - B^2x^2&. \end{aligned}$$

Die erſten zwey Glieder ſind die nemlichen, wie in der obigen Gleichung; man ſetze nun, nach unſerer Annahme

$S = \frac{1}{4}s^2 + 2A - B^2$ das iſt $B^2 = \frac{1}{4}s^2 + 2A - S$.
$\Sigma = s.A - 2BC$. — — $2BC = s.A - \Sigma$.
$P = A^2 - C^2$ .... — — $C^2 = A^2 - P$.

Aus

*) Rafaélo Bombelli ſchrieb im Jahre 1589 eine Algebra in italieniſcher Sprache, worin er nicht nur die Cardansregel zur Auflöſung der kubiſchen Gleichungen näher erklärte, ſondern auch zeigte, wie man die biquadratiſchen Gleichungen, mittelſt der kubiſchen, auf zwey quadratiſche reduciren könne; doch giebt Bombelli als Erfinder der letztern Methode den Luigi di Ferrara an.

Aus dieſen drey Gleichungen beſtimme man die Werthe der Buchſtaben A, B, C, welches am kürzeſten alſo geſchehen kann.

$$1)\quad B^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + 2A - S$$
$$4\times\quad 4B^2 = s^2 + 8A - 4S$$
$$\times\quad C^2 = A^2 - P$$
$$4B^2C^2 = 8A^3 + (s^2-4S)A^2 - 8PA - P(s^2-4S).$$

$$2)\quad 2BC = sA - \Sigma$$
$$\text{quadr.}\quad 4B^2C^2 = s^2A^2 - 2s.A.\Sigma + \Sigma^2.$$

Stellt man nun dieſe zwey Werthe von $4B^2C^2$ zuſammen, ſo erhält man:

$$8A^3 - 4SA^2 + (2s\Sigma - 8P)A - s^2P + 4SP - \Sigma^2 = 0.$$

Nun ſubſtituire man in dieſer Gleichung für s, S, Σ, P die gegebenen Zahlen, und ſuche die drey Werthe für A nach den bekannten Regeln. Hat man auch nur einen Werth von A gefunden (indem die andern zwey irrational ſeyn können), ſo laſſen ſich auch die Buchſtaben B und C beſtimmen.

Denn $B = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 + 2A - S}.$

$$C = \frac{s.A - \Sigma}{2B.}$$

Hat man dieſe Werthe für A, B, C gefunden, ſo giebt die obige Aequation $(x^2 + \tfrac{1}{2}sx + A)^2 - (Bx + C)^2 = 0$

oder $(x^2 + \tfrac{1}{2}sx + A)^2 = (Bx + C)^2$

$$\sqrt{\quad}\quad x^2 + \tfrac{1}{2}sx + A = \pm (Bx + C)$$

folgende Wurzeln:

$$1)\ 2)\ldots\ x^2 + (\tfrac{1}{2}s - B)\,x = - A + C$$
$$3)\ 4)\ldots\ x^2 + (\tfrac{1}{2}s + B)\,x = - A - C.$$

Beyſpiele.

I. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 40 = 0.$

Auflöſung. Hier iſt $s=4.\ S=2.\ \Sigma=4.\ P=40.$

folglich: $8A^3 - 8A^2 - 288A - 336 = 0.$

$8:\quad A^3 - A^2 - 36A - 42 = 0.$

Die Factorn von 42 ſind 1, 2, 3, 6, 7, 14.

Dieſe

Dieſe kubiſche Gleichung hat, wie man aus den Zeichen ſieht, nur eine poſitive und zwey negative Wurzeln. Eine Wurzel iſt $+7$. Denn $343 - 49 - 252 - 42 = 0$ (die beiden übrigen ſind $-3 \pm \sqrt{3}$, alſo irrational).

alſo $A = 7$.

folglich $B = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 + 2A - S} = \sqrt{4 + 14 - 2} = \sqrt{16} = 4$.

$$C = \frac{sA - \Sigma}{2B} = \frac{28 - 4}{8} = 3.$$

Hieraus erhalten wir:

1) $x^2 - 2x = -4$.

2) $x^2 + 6x = -10$.

Die vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung ſind alſo:

$$x = 1 + \sqrt{-3}.$$
$$x = 1 - \sqrt{-3}.$$
$$x = -3 + \sqrt{-1}.$$
$$x = -3 - \sqrt{-1}.$$

II. $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$.

Aufloſung. Hier iſt $s = -3$. $S = -7$.
$\Sigma = +27$. $P = -18$.

Alſo $8A^3 + 28A^2 - 18A - 63 = 0$.

$$A = \frac{y}{2}.$$

$$y^3 + 7y^2 - 9y - 63 = 0.$$

Die Factorn von 63 ſind: $\pm 1, 3, 7, 9$.

$y = +3$	$27 + 63 - 27 - 63 = 0$
$y = -3$	$-27 + 63 + 27 - 63 = 0$
$y = -7$	$-343 + 343 + 63 - 63 = 0$.

Alſo $A = +\frac{3}{2}$	$B = \frac{7}{2}$	$C = -\frac{9}{2}$.
oder $= -\frac{3}{2}$	$B = \frac{5}{2}$	$C = -\frac{9}{2}$.
oder $= -\frac{7}{2}$	$B = \frac{3}{2}$	$C = -\frac{11}{2}$.

Aus jedem dieſer Werthe von A, B, C ergeben ſich die vier Wurzeln unſerer Gleichung.

1) A

1) $A = +\frac{3}{2}\ldots$ $x^2 - 5x = 6.$ $x = \frac{5 \pm 1}{2}$	$x^2 + 2x = 3$ $x = -1 \pm 2.$
2) $A = -\frac{3}{2}$ $x^2 - 4x = -3$ $x = 2 \pm 1.$	$x^2 + x = \frac{24}{4}$ $x = \frac{-1 \pm 5}{2.}$
3) $A = -\frac{7}{2}$ $x^2 - 3x = -2$ $x = \frac{3 \pm 1}{2.}$	$x^2 + 0x = 9$ $x = \pm 3.$

Die vier Wurzeln ſind alſo: $x = 1.$ $x = 2.$ $x = +3.$ $x = -3.$

III. $x^4 + x^3 - 61x^2 + 111x + 108 = 0.$

Aufloͤſung. Hier iſt $s = 1.$ $S = -61.$ $\Sigma = 111.$ $P = 108.$

Folglich $8A^3 + 244A^2 - 642A - 38781 = 0.$

Man ſetze $A = \frac{u}{2.}$

$$u^3 + 61.u^2 - 321.u - 38.781 = 0.$$

Da 38781 keine andere Factorn hat, als 9, 31 ... ſo verſuche man die Probe mit 31.

$$-29.791 + 58.621 + 9951 - 38.781 = 0,$$

alſo $u = 31.$

$A = -\frac{31}{2}.$

$$B = \sqrt{\tfrac{1}{4}.1 - 31 + 61} = \sqrt{\tfrac{121}{4}} = \tfrac{11}{2}.$$

$$C = \frac{(1.\times -\frac{31}{2}) - 111}{11.} = -\frac{23}{2}.$$

Alſo 1) $x^2 - 5x = 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2.}$$

2) $x^2 + 6x = 27$

$$x = -3 \pm \sqrt{36} = -3 \pm 6.$$

Die

Die vier Factorn der Gleichung ſind demnach

$$x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}$$

$$x = + 3$$

$$x = - 9.$$

§. 282.

Die dritte allgemeine Methode, biquadratiſche Gleichungen aufzulöſen, iſt für ſolche Formeln berechnet, worin das zweite Glied der Gleichung oder der Kubus der unbekannten Zahl fehlt; es laſſen ſich aber, wie unten ſich zeigen wird, auf dieſen Fall auch diejenigen biquadratiſchen Gleichungen reduciren, worin dieſes zweite Glied ſteht.

Man ſetze, die Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung ſeyen: $x = \sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$.

Ich ſage die Wurzeln; denn da jede dieſer Wurzeln ſowohl negativ, als poſitiv ſeyn kann, ſo ergeben ſich für x nicht bloß vier, ſondern acht Werthe.

Die Buchſtaben β, δ, λ ſehe man an, als die drey Wurzeln einer kubiſchen Gleichung, welche die Form hat:

$$z^3 - Mz^2 + Nz - p = 0.$$

So daß $M = \beta + \delta + \lambda$

$$N = \beta\delta + \beta\lambda + \delta\lambda$$

$$p = \beta.\ \delta.\ \lambda.$$

Nach dieſen Vorausſetzungen quadrire man nun die Gleichung.

quadr. $(x = \sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}.)$

$$= x^2 = \beta + \delta + \lambda + 2\sqrt{\beta\delta} + 2\sqrt{\beta\lambda} + 2\sqrt{\delta\lambda}$$

aber $\beta + \delta + \lambda = M.$

ſubſtituirt und verſetzt:

$$x^2 - M = 2\sqrt{\beta\delta} + 2\sqrt{\beta\lambda} + 2\sqrt{\delta\lambda}.$$

Dieſe Gleichung noch einmal quadrirt giebt:

$$x^4 - 2Mx^2 + M^2 = 4\beta\delta + 4\beta\lambda + 4\delta\lambda + 8\sqrt{\beta^2\delta\lambda} + 8\sqrt{\beta\delta^2\lambda} + 8\sqrt{\beta\delta\lambda^2}.$$

aber

aber $\beta\delta + \beta\lambda + \delta\lambda = N$

$4\beta\delta + 4\beta\lambda + 4\delta\lambda = 4N.$

alſo ſubſtituirt und verſetzt:

$$x^4 - 2Mx^2 + M^2 - 4N = 8\sqrt{\beta\delta\lambda} \times (\sqrt{\beta} + \sqrt{\delta}\sqrt{\lambda}).$$

aber $\beta\delta\lambda = p.$

$\sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda} = x$ ... ſubſtituirt und geordnet:

$$x^4 - 2Mx^2 - 8x\sqrt{p} + M^2 - 4N = o.$$

Wovon die Wurzel iſt $= \sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$; ſo daß β, δ, λ zugleich die drey Wurzeln obiger kubiſchen Gleichung ſeyen.

§. 283.

Man habe die biquadratiſche Gleichung:

$x^4 - Sx^2 - \Sigma x - Q = o$, deren Wurzel man ſuchen ſoll.

Vergleicht man dieſe Aequation mit der vorhergehenden, ſo ſieht man, daß

I. $2M = S$ II. $8\sqrt{p} = \Sigma$

$M = \frac{S}{2}$ $64p = \Sigma^2$

$p = \frac{\Sigma^2}{64}.$

III. $M^2 - 4N = - Q$

$M = \frac{S}{2}$

$M^2 = \frac{S^2}{4}.$

alſo $\frac{S^2}{4} - 4N + Q = o.$

$4N = \frac{S^2}{4} + Q.$

$N = \frac{1}{16}S^2 + \frac{1}{4}Q.$

Hieraus bilde man nun die kubiſche Gleichung

$$z^3 - Mz^2 + Nz - p = o.$$

Die drey Wurzeln dieſer Gleichung ſind nun, nach der Vorausſetzung

$\left.\begin{array}{l} z = +\beta \\ z = +\delta \\ z = +\lambda. \end{array}\right\}$ Die verlangte biquadratiſche Wurzel iſt dann $x = \sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}.$

Hier

Hier hat man nun vorzüglich auf das Glied

$$8\sqrt{p} = \Sigma$$

$$\sqrt{p} = \frac{\Sigma}{8}$$ zu ſehen.

Iſt $\frac{\Sigma}{8}$ poſitiv, ſo muß $\sqrt{p} = \sqrt{\beta}\,\sqrt{\delta}\,\sqrt{\lambda}$ auch poſitiv ſeyn; hieraus ergeben ſich die vier Abänderungen

I. $x = +\sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$.
II. $x = \sqrt{\beta} - \sqrt{\delta} - \sqrt{\lambda}$.
III. $x = -\sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} - \sqrt{\lambda}$.
IV. $x = -\sqrt{\beta} - \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$.

Iſt aber $\frac{\Sigma}{8}$ negativ, ſo ſind die Werthe für x:

I. $x = \sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} - \sqrt{\lambda}$.
II. $x = \sqrt{\beta} - \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$.
III. $x = -\sqrt{\beta} + \sqrt{\delta} + \sqrt{\lambda}$.
IV. $x = -\sqrt{\beta} - \sqrt{\delta} - \sqrt{\lambda}$.

§. 284.

Beyſpiele.

I. $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$.

Auflöſung. Hier iſt $S = 15$.
$\Sigma = -10$.
$Q = -24$.

folglich $M = \frac{15}{2}$
$\sqrt{p} = -\frac{10}{8}$ $N = \frac{129}{16}$.
$p = \frac{100}{64}$.

Hieraus ergiebt ſich die kubiſche Gleichung:

$$z^3 - \frac{15z^2}{2} + \frac{129z}{16} - \frac{100}{64} = 0.$$

$$z = \frac{u}{4}.$$

$$\frac{u^3}{64} - \frac{15u^2}{32} + \frac{129u}{64} - \frac{100}{64} = 0.$$

$u^3 - 30u^2 + 129u - 100 = 0$. wovon eine Wurzel $= 1$.
$1 - 30 + 129 - 100 = 0$.

Die

Die übrigen Wurzeln findet man alſo:

$$\frac{u^3 - 30u^2 + 129u - 100}{u - 1} = u^2 - 29u + 100 = 0.$$

$$\text{alſo } u = \frac{29 \pm 21}{2} = 25 \text{ oder } 4.$$

Alſo $z = \frac{25}{4} = \beta.$

$z = \frac{4}{4} = 1 = \delta.$

$z = \frac{1}{4} = \lambda.$

Da $\frac{\Sigma}{8}$ negativ war, ſo ſind die vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung:

$$x = \frac{5+2-1}{2} = 3.$$

$$x = \frac{5-2+1}{2} = 2.$$

$$x = \frac{-5+2+1}{2} = -1.$$

$$x = \frac{-5-2-1}{2} = -4.$$

II. $x^4 - 6x^2 + 16x - 15 = 0.$

Aufloͤſung. Hier iſt $S = 6.$ $\Sigma = -16.$ $Q = 15.$

Folglich $M = \frac{6}{2} = 3.$

$\sqrt{p} = -\frac{16}{8} \therefore p = 4.$

$N = 6.$

Hieraus entſteht die Gleichung:

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0.$$

wovon 1 ein Factor iſt.

$$1 - 3 + 6 - 4 = 0.$$

$$\frac{z^3 - 3z^2 + 6z - 4}{z - 1} = z^2 - 2z + 4 = 0.$$

folglich $z = 1 = \beta.$

$z = 1 + \sqrt{-3} = \delta$

$z = 1 - \sqrt{-3} = \lambda.$

Hier ſind vor allem die Wurzeln aus den Binomien zu ſuchen. (vergl. §. 253.)

Es iſt aber $\sqrt{1+\sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{-2+\sqrt{6}}}{2} = \delta.$

und $\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{-2-\sqrt{6}}}{2} = \lambda.$

Alſo die verlangten Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung:

$$x = \frac{2+\sqrt{-2+\sqrt{6}}-\sqrt{-2+\sqrt{6}}}{2} = 1+\sqrt{6}.$$

$$x = \frac{2-\sqrt{-2-\sqrt{6}}+\sqrt{-2-\sqrt{6}}}{2} = 1-\sqrt{6}.$$

$$x = \frac{-2+\sqrt{-2+\sqrt{6}}+\sqrt{-2-\sqrt{6}}}{2} = -1+\sqrt{-2}.$$

$$x = \frac{-2-\sqrt{-2-\sqrt{6}}-\sqrt{-2+\sqrt{6}}}{2} = -1-\sqrt{-2}.$$

III. $x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24 = 0.$

Aufløſung. Um das zweite Glied zu eliminiren, ſetze man: $x + \frac{8}{4} = x + 2 = y.$. alſo $x = y - 2.$

$$\begin{aligned} x^4 &= y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 \\ 8x^3 &= \ldots + 8y^3 - 48y^2 + 96y - 64 \\ +17x^2 &= \ldots\ldots + 17y^2 - 68y + 68 \\ -2x &= \ldots\ldots\ldots - 2y + 4 \\ -24 &= \ldots\ldots\ldots\ldots - 24 \end{aligned}$$

$$y^4 - 7y^2 - 6y = 0.$$

Hier iſt $S = 7.$ $\Sigma = 6.$ $Q = 0.$

folglich $M = \frac{7}{2}.$ $p = \frac{9}{16}.$ $N = \frac{49}{16}.$

$$z^3 - \frac{7}{2}z^2 + \frac{49}{16}z - \frac{9}{16} = 0.$$

$$z = \frac{u}{4}.$$

$u^3 - 14u^2 + 49u - 36 = 0.$, wovon die Wurzeln ſind: $u = 1$ folglich $z = \frac{1}{4} = \beta.$

$u = 4$ $z = \frac{4}{4} = \delta.$

$u = 9$ $z = \frac{9}{4} = \lambda.$

Es ſind alſo die vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung:

$$y = \frac{1+2+3}{2} = 3.$$
$$y = \frac{1-2-3}{2} = -2.$$
$$y = \frac{-1+2-3}{2} = -1.$$
$$y = \frac{-1-2+3}{2} = 0.$$
aber $x = y - 2.$

alſo: $x = 1.$
$x = -4.$
$x = -3.$
$x = -2.$

Um die Probe zu machen; multiplicire man z. B. die erſte und zweite, die dritte und vierte Wurzel durcheinander.

$$(x-1) \times (x+4) = x^2 + 3x - 4 = 0.$$
$$(x+3) \times (x+2) = x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Das Produkt aus dieſen beiden quadratiſchen Formeln giebt aber wieder: $x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24 = 0.$

§. 285.

So weit iſt man nun in der Auflöſung der höhern Gleichungen gekommen, nemlich bis auf die vom vierten Grade; und alle bisherigen Verſuche, für die Gleichungen eines höhern Grades ebenfalls allgemeine Auflöſungen zu beſtimmen, ſind fruchtlos geweſen. — Um Gleichungen vom fünften, ſechsten Grade u. ſ. w. aufzulöſen, wird vorausgeſetzt, daß ſie eine oder mehrere rationale Wurzeln haben, z. B. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 28x^2 - 47x + 30 = 0.$

Man ſucht dann, welcher Factor des letzten Gliedes die Gleichung auf 0 bringe. Hat man einen ſolchen Factor gefunden, ſo reducirt man die Gleichung auf den nächſt niedrigern Grad u. ſ. w.

$$x = 2.$$
$$32 - 32 - 48 + 112 - 94 + 30 = 0.$$

alſo: $\frac{x^5-2x^4-6x^3+28x^2-47x+30}{x-2} = x^4 - 6x^2 + 16x - 15.$

aus welcher Gleichung ſich die vier Wurzeln nach den gegebenen Regeln finden laſſen.

Um die ſechs Wurzeln einer cuboquadratiſchen Gleichung, d. i. vom ſechsten Grade zu finden, muß die

Gleichung wenigſtens zwey bekannte und rationale Wurzeln haben. Mit dem Produkte dieſer zwey Wurzeln dividirt man alsdann die erſte Gleichung, und bringt ſie auf eine biquadratiſche. Z. B. Man habe die Gleichung:

$$x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 34x^3 - 75x^2 + 77x - 30 = 0.$$

Zwey rationale Wurzeln dieſer Gleichung ſind:

$$x = 2$$
$$x = 1.$$

oder: $x - 2 = 0. \quad x - 1 = 0.$

Das Produkt aus dieſen beiden Wurzen iſt:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

aber $\dfrac{x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 34x^3 - 75x^2 + 77x - 30}{x^2 - 3x + 2}$

$$= x^4 - 6x^2 + 16x - 15.$$

woraus ſich die Wurzeln ebenfalls finden laſſen.

Analog müßte man bey Gleichungen des ſiebenten, achten, neunten Grades ꝛc. drey, vier, fünf Wurzeln wiſſen, um mit dem Produkte aus dieſen Wurzeln die ganze Gleichung dividiren, und ſo auf den vierten Grad herabwürdigen zu können.

Zum Beſchluſſe der Lehre von den beſtimmten Gleichungen, als Anhang

I. Ueberſicht allgemeiner Grundſätze für beſtimmte Gleichungen von was immer für einem Grade. (n Grade)

II. Von den Wurzelſchranken.

III. Von Auflöſung der Gleichungen durch Approximation.

I. Allgemeine Grundſätze für die höhern Gleichungen vom n Grade.

§. 286.

1) Die allgemeine Form für die höhern Gleichungen vom nten Grade, (wo $n > 1$ eine ganze Zahl ſeyn muß, und den Exponenten der höchſten Würde von x vorſtellt) iſt:

$$x^n \pm Ax^{n-1} \pm Bx^{n-2} \pm Cx^{n-3} \pm \ldots \pm \ldots \pm Px^0 = 0.$$

2) Jede

2) Jede vollſtändige Gleichung vom n^{ten} Grade beſteht, wenn ſie auf Null gebracht wird aus $n + 1$ Gliedern.

Alſo die quadratiſche aus 3
die kubiſche aus . . 4 } Gliedern.
die biquadratiſche aus 5

3) Jede Gleichung vom n^{ten} Grade läßt ſich als ein Produkt von n Factorn darſtellen, welches zugleich die Wurzeln dieſer Gleichung ſind.

Alſo hat die quadratiſche 2
die kubiſche . . . 3 } ſolche Factorn oder Wurzeln.
die biquadratiſche 4

4) Eine Gleichung kann keine andere Wurzel haben, als welche ein Factor des letzten Gliedes $Px^{0} = P$ iſt.

5) Der poſitiven Wurzeln einer Gleichung ſind ſo viele, als darin Abwechslungen der Zeichen; — der negativen aber ſo viele, als Wiederholungen des nemlichen Zeichens vorkommen.

6) Jede Gleichung vom n^{ten} Grade läßt ſich auf den $(n-1)^{ten}$ d. i. nächſt niedrigern Grad bringen, wenn man ſie mit einer Wurzel . . . . $(x \mp a = 0)$,

auf den $(n-2)^{ten}$ Grad, wenn man ſie mit dem Produkte aus zwey Wurzeln . . . $(x \mp a) \times (x \pm b)$,

auf den $(n-3)^{ten}$ Grad, wenn man ſie mit dem Produkte dreyer Wurzeln $(x \pm a) \cdot (x \pm b) \cdot (x \pm c)$ dividirt.

7) Aus jeder höhern Gleichung läßt ſich das zweite Glied $\pm Ax^{n-1}$ eliminiren, wenn man der unbekannten Größe x den n^{ten} Theil des Mitfactors vom zweiten Gliede mit ſeinem Zeichen zugiebt, und die Summe einer andern unbekannten Größe (z. B. y) gleich ſetzt.

$$x \pm \frac{A}{n} = y$$

$$x = y \mp \frac{A}{n}.$$

Bey quadratiſchen Gleichungen beträgt $\frac{A}{n}$ die Hälfte,

bey

bey kubiſchen Gleichungen beträgt $\frac{A}{n}$ das Drittel,
— biquadratiſchen das Viertel,
— cuboquadratiſchen das Sechstel vom Mitfactor des zweiten Gliedes x^{n-1}.

8) Im Gegentheile läßt ſich das fehlende zweite Glied ergänzen, wenn man die unbekannte Größe + oder — eines beliebigen Zuſatzes (z. B. π), einer andern unbekannten Größe, z. B. y gleich ſetzt, und darnach die Gleichung umwandelt.

$$x \pm \pi = y$$
$$x = y \mp \pi.$$

9) Enthalten die Glieder einer höhern Gleichung Fractionen,

z. B. $x^n \pm \frac{px^{n-1}}{(ab)^m} \pm \frac{qx^{n-2}}{(ab)^{m+1}} \pm \frac{rx^{n-3}}{(ab)^{m+2}} \pm \frac{Px^0}{(ab)^n} = 0.$

ſo ſetze man, um die Fractionen wegzuſchaffen

$$x = \frac{y}{ab}$$

folglich $x^n = \left(\frac{y}{ab}\right)^n$. Es muß aber $m < n$ ſeyn.

10) Hat endlich die höhere Gleichung die Form:

$$a^0x^n \pm a^m.px^{n-1} \pm a^{m+1}.qx^{n-2} \pm a^{m+2}.rx^{n-3} \pm \ldots \pm a^n Px^0 = 0$$

ſo ſetze man: $x = ay$

worauf der Factor a^n in allen Gliedern wegfällt.

II. Von den Wurzelſchranken.

§. 287.

Schranken oder Gränzen einer Wurzel (oder der Wurzeln) ſind jene Zahlen, zwiſchen welche eine Wurzel (oder alle Wurzeln) einer Gleichung hineinfällt. — Dieſe Beſtimmung der Wurzelſchranken iſt zwar, wenn man höhere Gleichungen nach den bisherigen Regeln behandeln will, nicht abſolut nothwendig; erleichtert aber nicht ſelten die Rechnung ungemein, wenn man z. B. im Zweifel ſteht, ob man den Factor, der eine Gleichung zu o machen ſoll, nicht

zu

zu hoch oder zu niedrig angeſetzt habe. Das ganze Verfahren, die Wurzelſchranken zu beſtimmen, beſteht darin, daß man die Seiten einer Gleichung durch einſeitiges Addiren, oder Subtrahiren, oder Dividiren und Multipliciren ſo verändert und verſetzt, daß ſich zwey Größen ergeben, deren eine größer, die andere kleiner als x iſt, und die wir durch L — größte, und l — kleinſte Schranke bezeichnen wollen. — Wir wollen den Anfang mit den quadratiſchen Gleichungen machen, bey denen freylich die Wurzelſchranken am entbehrlichſten, aber auch am leichteſten ſind.

§. 288.

A) Wurzelſchranken bey quadratiſchen Gleichungen.

Die quadratiſchen Gleichungen laſſen ſich alle auf die vier Formeln zurückbringen.

1) $x^2 - Sx - p = o.$ | 2) $x^2 + Sx + p = o.$
3) $x^2 - \Sigma x - p = o.$ | 4) $x^2 - \Sigma x + p = o.$

1) Für die erſte Form ſind die Schranken einer poſitiven Wurzel: $x < p + S.$ $x > S.$

Beweis für L)

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - Sx = p. \\ x - S < p. \\ \quad x < p + S. \end{array}\right\}$$

d. i. wenn die linke Seite durch x dividirt wird, muß ſie kleiner werden, als die rechte.

Für l)

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - p = Sx \\ \quad + p. \\ \hline x^2 > Sx \\ x > S. \end{array}\right\}$$

d. i. wenn man zur linken Seite noch p addirt, ſo wird ſie größer, als die rechte.

z. B. $x^2 - 5x - 6 = o$.. wovon die poſitive Wurzel 6 iſt.
$x > 5$ und $x < 5 + 6 = < 11.$

2) Für die zweite Form ſind die Schranken der beiden negativen Wurzeln:

$$x < -\frac{p}{S} \text{ und } x > \frac{-p - S^2}{S.}$$

Beweis

Beweis für L) $x^2 + Sx = -p.$

$$\frac{\begin{array}{r} x^2 + Sx = -p \\ -x^2 \end{array}}{Sx < -p.}$$

$$x < -\frac{p}{S}.$$

für l) $\left.\begin{array}{l} x^2 + p = -Sx. \\ x < -S. \\ x^2 < S^2. \end{array}\right\}$ folglich $S^2 + Sx > -p.$

$$Sx > -p - S^2$$

$$x > \frac{-p - S^2}{S}.$$

z. B. $x^2 + 8x + 7 = 0$, wovon die Wurzeln -1 und -7 ſind.

alſo $x < -\frac{7}{8}$. $x > -\frac{71}{8} = > -\frac{87}{8}$.

3) Für die dritte Form ſind die Schranken der poſitiven Wurzel: $x < \sqrt{p}$ und $x > \Sigma$.

Beweis für L) $x^2 + \Sigma x = p.$

$x^2 < p$ und $x < \sqrt{p}.$

für l) $x^2 - p = -\Sigma x$

$$\frac{+p}{x^2 > -\Sigma x.}$$

$x > -\Sigma.$ folglich $x^2 > \Sigma^2$ und $x > \Sigma.$

z. B. $x^2 + 3x - 28 = 0.$ wovon eine Wurzel $+4$ iſt.

$$x < \sqrt{28} = < 5{,}291\ldots$$

$$x > 3.$$

4) Für die vierte Form ſind die Schranken der beiden poſitiven Wurzeln: $x < \Sigma.$ $x > \frac{p}{\Sigma}.$

Beweis für L) $x^2 - \Sigma x + p = 0$

$$x^2 < \Sigma x$$

$$x < \Sigma.$$

für l) $\Sigma x = x^2 + p$

$$\Sigma x > p$$

$$x > \frac{p}{\Sigma}.$$

Man habe die Gleichung: $x^2 - 5x + 4$, wovon die Wurzeln $+4$ und $+1$ ſind.

$$x < 5.$$

$$x > \frac{4}{5}.$$

§. 289.

Um die Wurzelſchranken für die kubiſchen Gleichungen allgemein zu beſtimmen, ſchaffe man aus denſelben das zweite oder Quadrat-Glied hinaus; dann ergeben ſich folgende drey Formeln: 1) $x^3 + Sx - P = 0$.
2) $x^3 - \Sigma x + P = 0$.
3) $x^3 - sx - P = 0$.

1) Für die erſte Form ſind die Wurzelſchranken:

L) $x^3 + Sx = P$	l) $x^3 + Sx = P$.
$x^3 < P$	aber $x < \sqrt[3]{P}$
$x < \sqrt[3]{P}$.	$x^2 < \sqrt[3]{P^2}$
	$\times x.\ x^3 < x\sqrt[3]{P^2}$
	ſubſtituirt:
	$x\sqrt[3]{P^2} + Sx > P$
	$x(S + \sqrt[3]{P^2}) > P$
	$x > \frac{P}{S + \sqrt[3]{P^2}}$.

Man habe die Gleichung: $x^3 + 5x - 42 = 0$, ſo iſt $x < \sqrt[3]{42} = < 3{,}476$ und $x > \frac{42}{5 + 12{,}08} = > 2{,}4\ldots$ und wirklich iſt eine Wurzel 3.

2) Für die zweite Form ſind die Wurzelſchranken:

L) $x^3 + P = \Sigma x$	l) $\Sigma x = x^3 + P$.
$x^3 < \Sigma x$	$\Sigma x > P$.
$x^2 < \Sigma$	$x > \frac{P}{\Sigma}$.
$x < \sqrt{\Sigma}$.	

Man habe die Gleichung: $x^3 - 7x + 6 = 0$.
alſo $x < \sqrt{7} = < 2{,}645$.
$x > \frac{6}{7}\ldots$ und ſo iſt dieſe Wurzel $+ 1$.

3) Für die dritte Form ſind die Wurzelſchranken:

L) $x^3 - sx = P$	l) $x^3 - P = sx$
$\frac{x^3 - sx}{x} < P$	$+ P$
$x^2 < P + s$	$x^3 > sx$
$x < \sqrt{P + s}$.	$x^2 > s$
	$x > \sqrt{s}$.

Man

Man habe die Gleichung : $y^3 - 31y - 30 = 0$.

Die Schranken ſind : $y < \sqrt{61} = < 7,8102$.

$y > \sqrt{31} = > 5,567$.

Wirklich iſt eine Wurzel 6.

§. 290.

Auch bei höhern Gleichungen, welche eine rationale Wurzel haben, laſſen ſich die Wurzelſchranken ſo ziemlich beſtimmen; aber allgemeine Regeln giebt es dafür nicht. Ein einzelner Fall ſey z. B. folgende Gleichung, deren Wurzelſchranken man beſtimmen ſoll :

$$x^4 - 8x^3 + x^2 + 294 = 0.$$

Auflöſung. 1) $x^4 + x^2 + 294 = 8x$

$x^4 < 8x^3$ und $x < 8$.

2) $8x^3 > 294$

$x > \sqrt[3]{\frac{294}{8}} = > 3,3..$

Da nun $x^4 > (3,3)^4 = > 118,5921$

und $x^2 > (3,3)^2 = > 10,89$

ſo muß, wenn man dieſe kleinern Werthe für

x^4, x^2 in 1° ſubſtituirt

auch $8x^3 > 423,4821$

$x > 3,75....$ ſeyn.

Da aber von den Factorn der Zahl 294 (2, 3, 7...) nur 7 zwiſchen 3 und 8 fällt, ſo muß 7 eine Wurzel der Gleichung ſeyn.

III. Von Auflöſung der Gleichungen durch Approximation.

§. 291.

Wenn eine Gleichung keine rationale Wurzel hat, ſo begnügt man ſich, den Werth der Wurzel durch Approximation zu finden. Man hat hiezu verſchiedene Wege und Methoden ausfindig gemacht, von denen hier vorzüglich zwey angeführt werden ſollen.

A. Die erſte Methode, die irrationale Wurzel einer höhern Gleichung zu beſtimmen, iſt folgende. Man ſuche eine Reihe von Zahlen von der Art, daß jede folgende

Zahl

Zahl durch die vorhergehende dividirt, den Approximations-werth der Wurzel um ſo genauer giebt, je weiter die Reihe fortgeſetzt wird.

Eine ſolche Reihe ſey z. B.

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varsigma \ldots\ldots \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho \ldots$$

Ganz natürlich müſſen die erſten Quotuſſe $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}$ von der wahren Wurzel ziemlich abweichen. — Geſetzt aber, man habe die Reihe bereits bis auf $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho \ldots$ fortgeſetzt, ſo daß beiläufig

$$\frac{\mu}{\lambda} = x. \quad \frac{\nu}{\mu} = x. \quad \frac{\pi}{\nu} = x. \quad \frac{\rho}{\pi} = x.$$

So wird $\left.\begin{array}{l} \frac{\mu}{\lambda} = x \\ \times \quad \frac{\nu}{\mu} = x \end{array}\right\} x^2 = \frac{\nu}{\lambda}.$

ferner $\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{\nu} = x \\ \times \quad \frac{\nu}{\lambda} = x^2 \end{array}\right\} x^3 = \frac{\pi}{\lambda}.$

und ſo weiter: $x^4 = \frac{\rho}{\lambda} \mid x^5 = \frac{\sigma}{\lambda} \mid x^6 = \frac{\tau}{\lambda}$

Subſtituirt man nun in einer Gleichung für x^4, x^3, x^2, x dieſe Werthe, ſo ergiebt ſich eine Norm, nach welcher man die folgenden Zahlen aus den vorhergehenden, (die man das erſtemal nach Willkühr wählen kann) beſtimmen müſſe.

Z. B. Man habe die quadratiſche Gleichung:

$$x^2 = x + 3.$$

Man ſetze $x^2 = \frac{\nu}{\lambda}. \quad x = \frac{\mu}{\lambda}.$

ſubſtituirt: $\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} + 3$

$$\nu = \mu + 3\lambda$$

$\nu = 3\lambda + \mu \ldots$ d. i. jede kommende Zahl (nach der zweiten) beſteht aus dem Einfachen der letzten, und dem Dreifachen der vorletzten. Daraus ergiebt ſich denn folgende Zahlenreihe:

1, 2,

1, 2, 5, 11, 26, 59, 147, 324, 765....

$x = \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{11}{5}, \frac{26}{11}, \frac{59}{26}, \frac{147}{59}, \frac{324}{147}, \frac{765}{324}.$

Die erſten Quotuſſe weichen von der Wahrheit freilich um ein beträchtliches ab: ſetzt man aber $x = \frac{765}{324} = 2, 3$, ſo erhält man: $x^2 = x + 3$

$5{,}29 = 2{,}3 + 3$

$5{,}29 = 5{,}30...$ wo der Unterſchied nur mehr 0,01 beträgt. Wollte man die Reihe noch weiter fortſetzen, ſo würde man die Wurzel noch genauer erhalten.

Eben ſo verfährt man auch bey den kubiſchen Gleichungen. Z. B. $x^3 = x^2 + x + 2.$

$$x^3 = \frac{\pi}{\lambda} .. x^2 = \frac{\nu}{\lambda}. x = \frac{\mu}{\lambda}.$$

ſubſtituirt: $\frac{\pi}{\lambda} = \frac{\nu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} + 2$

$$\pi = \nu + \mu + 2\lambda = 2\lambda + \nu + \mu.$$

d. i. jede kommende Zahl iſt die Summe aus der letzten, vorletzten und dem Doppelten der drittletzten. Hieraus ergiebt ſich folgende Zahlenreihe:

0, 1, 1, 2, 5, 9, 18, 37, 73, 146, 293.

Setzt man nun $x = \frac{293}{146} = 2{,}006...$

So erhält man: $x^3 = x^2 + x + 2$

$8{,}072 = 4{,}024 + 2{,}006 + 2$

$8{,}072 = 8{,}030...$ wo der Unterſchied noch ungefähr 0,04 beträgt.

§. 292.

So ſinnreich dieſe Methode auch iſt, ſo beſchwerlich wird doch die Rechnung, wenn die Glieder x^2, x, x^0 ſehr große Coefficienten vor ſich haben. Auch iſt ſie nicht in allen Fällen, insbeſondere in ſolchen Gleichungen nicht anwendbar, worin das zweite Glied ax^{n-1} fehlt. Doch weiß man die Methode, dieſes Glied in die Gleichung hineinzubringen.

Hat die Gleichung eine rationale Wurzel, und nimmt man den Anfang der Zahlenreihe ſo, daß dieſe Wurzel als Quotus

Quotus erſcheint, ſo wird auch jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, die nemliche Wurzel geben.

Z. B. $x^2 = 8x - 12$. In dieſer Gleichung iſt eine Wurzel 6.

$$x^2 = \frac{\nu}{\lambda}. \quad x = \frac{\mu}{\lambda}.$$

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{8\mu}{\lambda} - 12.$$

$\nu = 8\mu - 12\lambda$, wo jedes kommende Glied die Differenz von dem achtfachen des letzten, und dem zwölffachen des vorletzten iſt. Setzt man nun die erſten Glieder der Reihe, 1, 6; ſo ergiebt ſich: 1, 6, 36, 216, 1296, 7776.

Ferner iſt zu merken, daß man durch dieſe Methode immer nur der größern Wurzel näher kommt; der kleinern Wurzel aber, wenn die Gleichung mehrere hat, nur dann, wenn man den Anfang der Zahlenreihe genau darnach einrichtet. — Nehme ich z. B. in der vorhergehenden Gleichung den Anfang der Zahlenreihe: 0, 1; ſo erhält man: 0, 1, 8, 52, 320, 1936 u. ſ. w., wo die Quotuſſe immer der Wurzel 6 näher kommen. — Nehme ich aber den Anfang der Reihe alſo, daß darin die kleinere Wurzel als Quotus erſcheint:

1, 2, ... ſo ergiebt ſich 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...
und jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, giebt genau die kleinere Wurzel.

§. 293.

Die zweite Methode, die Wurzel einer Gleichung durch Annäherung zu finden, beſteht in folgendem. Man habe z. B. die Gleichung $x^2 = p.$; und man wiſſe, daß die Wurzel größer als R, und kleiner als R + 1 ſey.

$$x > R. \quad x < R + 1.$$

Man ſetze alſo: $x = R + \mu$, wo μ eine Fraction vorſtellen muß, folglich μ^2 als unbedeutend hinweggelaſſen werden kann.

$x^2 = R^2 + 2R\mu + \mu^2 = p.$ und wenn man $+ \mu^2$ hinwegläßt $x^2 = R^2 + 2R\mu = p.$

Mithin

Mithin $2R\mu = p - R^2$ und $\mu = \frac{p-R^2}{2R.}$

Dieſen Werth in der Gleichung $x = R + \mu$ ſubſtituirt, giebt $x = R + \frac{p-R^2}{2R} = \frac{R^2+p}{2R.}$

Dieſer Werth für x giebt nun die Wurzel ſchon um vieles genauer, als $R + \mu$. Setzt man nun anſtatt R den genauern Werth $\frac{R^2+p}{2R}$, und wiederholt die Operation von neuem, ſo kommt man der Wahrheit noch weit näher.

Z. B. Man habe die Gleichung: $x^2 = 7$. oder $x = \sqrt{7}$.

Aufloͤſung. Hier iſt $x < 3$. $x > 2$.

Man ſetze alſo $x = 2 + \mu$. folglich wird $\mu = \frac{7-4}{4} = \frac{3}{4}$.

Alſo $x = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Wirklich kommt $(\frac{11}{4})^2 = \frac{121}{16}$ dem Quadrate 7 ſchon um vieles näher als 2. — Da nun $\frac{121}{16}$ noch ein wenig zu groß iſt, ſo ſetze man

$$x = \frac{11}{4} - \mu = \sqrt{7}.$$

Folglich $\frac{121}{16} - \frac{22}{4}\mu = 7$

$$\mu = \frac{121-112}{88} = \frac{9}{88} \ldots$$

folglich die Wurzel aus $7 = \frac{233}{88}$, welche der wahren Wurzel ziemlich nahe kommt.

Denn $(\frac{233}{88})^2 = \frac{54289}{7744} = 7{,}01$.

Anmerkung. Anſtatt die kleinere Wurzelſchranke zu nehmen und $x = R + \mu$ zu ſetzen, kann man auch die groͤßere Schranke $R + 1 - \mu = x$ ſetzen; welches die Rechnung beſonders in dem Falle erleichtert, wo p dem Quadrate oder Kubus von $(R + \mu)$ weit näher kommt, als der nemlichen Würde von R. — Man ſehe die Anwendung hievon in folgendem Beyſpiele: $x^3 = 52$ oder $x = \sqrt[3]{52}$.

Hier iſt $x < 4$ und $x > 3$. Da nun 52 dem Kubus von 4 (d. i. 64) näher kommt, als dem Kubus von 3 (d. i. 27), ſo wollen wir ſetzen:

$$x = 4 - \mu = \sqrt[3]{52}.$$

Erhebt

Erhebt man nun dieſe Gleichung zum Kubus, und läßt die zweite und dritte Würde von μ hinweg, ſo erhält man: $64 - 48\mu = 52$

$$\frac{64 - 52}{48} = \mu,$$

$$\tfrac{1}{4} = \mu.$$

folglich $x = \frac{15}{4}$; welche Wurzel der Wahrheit ſchon ziemlich nahe kommt; denn $(\frac{15}{4})^3 = 52,7$ u. ſ. w.

§. 294.

Die nemliche Methode kann auch bey zuſammengeſetzten kubiſchen Gleichungen angewendet werden, wobey man aber erſt die Wurzelſchranken nach §. 289. zu beſtimmen hat.

Man habe z. B. die Gleichung: $x^3 - 30x - 60 = 0$.

Hier ſind die Schranken der Wurzel:

$$x < \sqrt{90} = < 9,48 \text{ und } x > \sqrt{30} = > 5,47.$$

Man ſetze alſo die Wurzel $x = 5 + \mu$.

Läßt man nun wieder die Würden von μ als unbedeutend hinweg, ſo ergiebt ſich:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 125 + 75\mu \\ -30x & = & -150 - 30\mu \\ -60 & = & -60 \\ \hline & & 45\mu - 85 = 0. \end{array}$$

$$\mu = \tfrac{85}{45} = 1\tfrac{8}{9} \text{ alſo } x = 6\tfrac{8}{9}.$$

Dieſen Werth in obiger Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$(\tfrac{62}{9})^3 - \tfrac{1860}{3} - 60 = 57.$$ Da nun die Gleichung $= 0$ ſeyn ſoll, ſo erkennt man, daß $6\frac{8}{9}$ noch zu groß ſey.

Man ſetze alſo $x = \frac{62}{9} - \mu$

woraus ſich für μ ergiebt $0,608\ldots$

Da nun $x = \frac{62}{9} - \mu = 6,888 - 0,608$, ſo wird x die Wurzel ſehr genau $6,28\ldots$

$$\begin{array}{rcl} \text{Denn } x^3 & = & 247,673 \\ -30x & = & -188,40 \\ \hline \text{Reſt} & = & 59,273, \end{array}$$ welches beinahe $= 60$ iſt.

Zwey=

Zweytes Hauptſtück.

Unbeſtimmte Analytik, oder von der Auflöſung unbeſtimmter Probleme.

§. 295.

Vorbegriffe.

I. **Unbeſtimmt** heißt ein Problem, wenn für die unbekannten Größen in demſelben mehrere Werthe möglich ſind, welches dann eintrifft, wenn die Aufgabe mehr unbekannte Größen enthält, als ſich aus den gegebenen Bedingungen des Problems Gleichungen bilden laſſen.

II. **Die Anzahl der möglichen Auflöſungen** iſt zwar bey verſchiedenen unbeſtimmten Problemen verſchieden, und manchmal unendlich groß; doch werden dieſe möglichen Werthe gewöhnlich dahin beſchränkt, daß man die unbekannten Größen in lauter ganzen und zwar poſitiven, oder wenigſtens rationalen Zahlen zu beſtimmen verlangt.

III. Man unterſcheidet auch hier **einfache** und **zuſammengeſetzte Probleme**. Von den letztern wollen wir nur ein und das andere Beyſpiel auswählen, weil ihr Umfang zu groß, ihre Anwendung aber eben nicht ſehr häufig iſt.

IV. Der erſte Artikel handelt von jenen Aufgaben, worin aus **einer** Gleichung mehrere unbekannte Größen geſucht werden ſollen, und welche in der Formel:

$ax \pm by \pm cz = S$ enthalten ſind, wo a, b, c ganze poſitive Zahlen bedeuten, und die Werthe von x, y, z in eben ſolchen Zahlen gefunden werden ſollen.

Der zweyte Artikel handelt von der ſogenannten Regula Cocci oder Virginum, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehrere unbekannte Größen gefunden werden ſollen, und welche in der Form:

$$x + y + z = S.$$
$$ax + by + cz = P$$ enthalten ſind.

Als Anhang folgen einige zuſammengeſetzte unbeſtimmte Probleme.

Erſter Artikel.

Unbeſtimmte Probleme, mit mehrern unbekannten Größen und einer einzigen Gleichung.

§. 296.

I. Aufgabe. Zwey ganze poſitive Zahlen zu ſuchen, derer Summe 12 iſt.

Auflöſung. Dieſe Zahlen ſeyen x und y, ſo erhält man: $x + y = 12$

$$x = 12 - y.$$

Man kann nun für y alle Zahlen von 1 bis 11 nehmen, weil die Bedingniß beigeſetzt wurde, daß beide Größen ganze und poſitive Zahlen ſeyn müſſen. — Dieſe Aufgabe läßt alſo folgende 6 Auflöſungen zu:

$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.$

$x = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Die fünf letzten Auflöſungen ſind nemlich ſchon in den 6 erſten enthalten.

Hätte man drey Zahlen zu finden, derer Summe 12 iſt, ſo dürfte man nur die Werthe von x wieder in zwey Theile zertheilen, wodurch man eine viel größere Menge von Auflöſungen erhielte.

II. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, derer Differenz 10 iſt.

Auflöſung. $x - y = 10$

$$x = y + 10.$$

Man ſieht gleich auf den erſten Anblick, daß dieſes Problem unendlich viele Auflöſungen zulaſſe. Denn man ſetze für y was immer für eine Zahl, ſo wird doch x immer um 10 größer ſeyn.

III. Aufgabe. Zwey ganze, poſitive Zahlen zu finden, derer Produkt 48 iſt.

Auflöſung. $x \times y = 48$

$$x = \frac{48}{y}.$$

Man wähle nun für y ſolche Zahlen, welche Factorn von 48 ſind; da giebt es denn folgende Auflöſungen:

$$y = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 6.$$
$$x = 48, \ 24, \ 16, \ 12, \ 8.$$

IV. Aufgabe. Zwey ganze poſitive Zahlen zu finden, welche zum Quotus 4 geben.

Auflöſung. $\frac{x}{y} = 4$

$$x = 4y.$$

Auch dieſes Problem läßt unendlich viele Auflöſungen zu; denn man ſetze für y was immer für ganze Zahlen, ſo wird die Foderung der Aufgabe befriediget ſeyn.

$$y = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, \ 10.$$
$$x = 4, \ 8, \ 12, \ 16, \ 20, \ 24, \ 28, \ 32, \ 36, \ 40.$$

§. 297.

Nun trifft die Reihe jene Probleme, wo die unbekannten Größen auch Coefficienten vor ſich haben. Die Regeln der Operation lernen ſich am leichteſten aus Beyſpielen.

I. Aufgabe. Man theile die Zahl 100 in zwey Theile, von denen der erſte durch 3, der andere durch 5 theilbar iſt.

Auflöſung. Es ſeyen dieſe beiden Zahlen x und y. Da nun x durch 3, und y durch 5 theilbar ſeyn ſoll, ſo ſetze man $x = 3A$

$$y = 5B$$

wo man für A und B alle beliebigen ganzen Zahlen ſubſtituiren kann.

$$3A + 5B = 100$$
$$3A = 100 - 5B$$
$$A = \frac{100 - 5B}{3}.$$

Man ſieht hieraus, daß B kleiner als 20 ſeyn müſſe, weil ſonſt $A = 0$ würde. — Man ziehe nun aus dieſer Fraction $\frac{100-5B}{3}$ ſo viele Ganze als möglich;

$$A = 33 - B + \frac{1-2B}{3}.$$

Die

Die Fraction $\frac{1-2B}{3}$ ſetze man wieder einem neuen Buchſtaben C gleich, weil doch auch dieſe Fraction in ganzen Zahlen beſtimmt werden ſoll. Und da B negativ iſt, ſo ſetze man auch C negativ.

$$\frac{1-2B}{3} = -C$$
$$-1 + 2B = 3C$$
$$2B = 3C + 1$$
$$B = \frac{3C+1}{2} = C + \frac{C+1}{2}.$$

Dieſe Fraction $\frac{C+1}{2}$ ſey $= D$

$$C + 1 = 2D$$
$$C = 2D - 1.$$

Nun ſubſtituire man für D die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$D = 1.$	$D = 2.$	$D = 3.$	$D = 4.$	$D = 5.$	$D = 6.$
$C = 1.$	$C = 3$	$C = 5.$	$C = 7.$	$C = 9.$	$C = 11.$
$B = 2.$	$B = 5$	$B = 8.$	$B = 11.$	$B = 14.$	$B = 17.$
$A = 30.$	$A = 25.$	$A = 20.$	$A = 15.$	$A = 10.$	$A = 5.$
$x = 90.$	$x = 75.$	$x = 60.$	$x = 45.$	$x = 30.$	$x = 15.$
$y = 10.$	$y = 25.$	$y = 40.$	$y = 55.$	$y = 70.$	$y = 85.$

Dieſes ſind nun die ſechs möglichen Auflöſungen, wenn x und y poſitive ganze Zahlen ſeyn ſollen. Wollte man $D = 7$ ſetzen, ſo erſchiene: $B = 20$ und $A = 0$.

Wollte man aber $D = 0$ oder $= -1, -2, -3$ ſetzen, ſo würde $y = -5$, alſo negativ werden.

Dieſe Operation iſt nun ein Formular für alle ähnlichen unbeſtimmten Probleme.

II. Aufgabe. Es ſollen 100 fl. in Laubthalern und Baierthalern bezahlt werden. Wie kann dieſes geſchehen, ohne daß man nöthig habe, wieder herauszugeben?

Auflöſung. Man habe vonnöthen x Laubthaler und y Baierthaler. Nun beſtimme man beyde Größen in dem Guldenwerthe.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ Laubthaler} = \frac{11x}{4} \text{ fl.} \\ y \text{ Baierthaler} = \frac{12y}{5} \text{ fl.} \end{array}\right\} = 100 \text{ fl.}$$

1) $\frac{11x}{4} + \frac{12y}{5} = 100$

$\frac{55x + 48y}{20} = 100$

$55x + 48y = 2000$

$y = \frac{2000 - 55x}{48} = 41 - x + \frac{32 - 7x}{48}.$

2) $\frac{32 - 7x}{48} = - A.$

$- 32 + 7x = + 48A$

$x = \frac{48A + 32}{7} = 6A + 4 + \frac{6A + 4}{7}.$

3) $6A + 4 = 7B$

$A = \frac{7B - 4}{6} = B + \frac{B - 4}{6}.$

4) $\frac{B - 4}{6} = C$

$B = 6C + 4.$

Man ſetze nun $C = 0$, ſo wird $B = 4$.

$A = 4. \quad x = 32. \quad y = 5.$

Man hat alſo 32 Laubthaler und 5 Baierthaler nothwendig.

32 Laubthaler = 88 fl. 5 Baierthaler = 12 fl. aber $88 + 12 = 100$.

Und zwar iſt dieſes die einzige mögliche Auflöſung, wenn x und y poſitiv ſeyn ſollen. Wollte man für C eine größere oder kleinere Zahl ſetzen, als 0, ſo würde entweder x oder y negativ werden, d. h. der Bezahlende müßte ſich den Ueberſchuß in der einen oder andern Münze herausgeben laſſen.

III. Aufgabe. Man ſuche zwey Zahlen, derer Summe 85 iſt, und wovon die erſte durch 3 dividirt 2, die andere durch 4 dividirt, 3 übrig läßt.

Auflöſung. Die verlangten Zahlen ſeyen x und y.

$x + y = 85.$

Aber

Aber $x = 3A + 2$ (vergl. §. 79.)

$y = 4B + 3.$

Subſtituirt: $3A + 2 + 4B + 3 = 85$

$$3A + 4B = 80.$$

$$A = \frac{80 - 4B}{3} = 26 - B + \frac{2 - B}{3}.$$

$2 - B = -3C$

$+ B = 3C + 2.$

Nun ſubſtituire man für C.. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

C = 0	C = 1	C = 2	C = 3	C = 4	C = 5	C = 6
B = 2	B = 5	B = 8	B = 11	B = 14	B = 17	B = 20
A = 24	A = 20	A = 16	A = 12	A = 8	A = 4	A = 0
x = 74	x = 62	x = 50	x = 38	x = 26	x = 14	x = 2
y = 11	y = 23	y = 35	y = 47	y = 59	y = 71	y = 83

Es ſind alſo in ganzen poſitiven Zahlen ſieben Auflöſungen möglich.

IV. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl, welche durch 11 theilbar iſt, durch 17 dividirt aber 5 zum Reſt läßt.

Auflöſung. Die Zahl ſey $= x$.

Alſo $x = 11A$

$x = 17B + 5.$

$11A = 17B + 5.$

$$A = B + \frac{6B + 5}{11} = B + C.$$

$6B + 5 = 11C.$

$$B = C + \frac{5C - 5}{6} = C + D$$

$5C - 5 = 6D.$

$$C = \frac{6D + 5}{5} = D + E.$$

$D = 5E.$

Nun ſubſtituire man für E 0, 1, 2, 3, 4...

E = 0	D = 0	C = 1	B = 1	A = 2	x = 22
E = 1	D = 5	C = 7	B = 12	A = 19	x = 209
E = 2	D = 10	C = 13	B = 23	A = 36	x = 396
E = 3	D = 15	C = 19	B = 34	A = 53	x = 583
E = 4	D = 20	C = 25	B = 45	A = 70	x = 770 u. ſ. w.

Man

Man ſieht nun, daß die Werthe von x immer um 187 ſteigen; und alſo leicht weiter fortgeführt werden können. Jede dieſer Zahlen iſt durch 11 ohne Reſt theilbar, und läßt, durch 17 dividirt, 5 übrig.

Anmerkung. Man kann ſich die Subſtitution dadurch erleichtern, daß man die verlangte unbekannte Zahl allgemein als einen Werth des letzten Buchſtabens darſtellt; bey welchem keine Fraction mehr geblieben iſt, z. B. in der letzten Aufgabe:

$$D = 5E.$$

$$C = \frac{6D+5}{5} = 6E + 1.$$

$$B = \frac{11C-5}{6} = 11E + 1.$$

$$A = \frac{17B+5}{11} = 17E + 2.$$

$$x = 11\,(17E+2) = 187E + 22.$$

Subſtituirt man hier für E — 0, 1, 2, 3, 4 ... ſo erhält man wieder für x: 22, 209, 396, 583 u. ſ. w.

V. Aufgabe. Es wurde eine Anzahl Gänſe und Ferkeln gekauft; eine Gans wurde um 17, ein Ferkel um 29 Groſchen bezahlt. Es koſteten aber die Ferkel um 7 Groſchen mehr, als die Gänſe. Wie viel Stücke konnten es von jeder Gattung geweſen ſeyn?

Auflöſung. Es waren x Gänſe und y Ferkel, jene koſteten 17x, dieſe 29y Groſchen; mithin

$$17x = 29y - 7.$$

$$x = \frac{29y-7}{17} = y + \frac{12y-7}{17} = y + A.$$

$$A = \frac{12y-7}{17}.$$

$$y = \frac{17A+7}{12} = A + \frac{5A+7}{12} = A + B.$$

$$A = \frac{12B-7}{5} = 2B + \frac{2B-7}{5}{}^{*} = 2B + C.$$

$$B = \frac{5C+7}{2} = 2C + \frac{C+7}{2} = 2C + D.$$

$$C = 2D - 7.$$

* Es

* Es wurde hier gefliſſentlich der zweite Theil des Zählers nicht dividirt, um die ſpäter folgende, allgemeine Darſtellung dieſer Operation einleuchtender zu machen. —

Nun beſtimme man x und y in Aequivalenten von D.

$$B = 2C + D = 5D - 14.$$
$$A = 2B + C = 12D - 35.$$
$$y = A + B = 17D - 49.$$
$$x = y + A = 29D - 84.$$

Jetzt ſubſtituire man in den Werthen von x und y für D eine beliebige Zahl, die jedoch nicht kleiner als 3 ſeyn darf, weil ſonſt x und y negativ würde. — Es konnten alſo geweſen ſeyn

Ferkeln: 2, 19, 36, 53, 70, 87 … (Differenz 17.)
Gänſe: 3, 32, 61, 90, 119, 148 … (Differenz 29.)

§. 298.

Unterſucht man das Verfahren, wie jeder der folgenden Buchſtaben aus dem vorhergehenden beſtimmt wurde, etwas näher, ſo entdeckt man, daß ſich daſſelbe auf das Verhältniß der Zahlen 17 und 29 gründe, und daß hier nichts anders geſchehe, als was (§. 84.) bey Beſtimmung des größten gemeinſchaftlichen Theilers zweyer Zahlen geſchah.

17	29	1				
	17					
	12	17	1			
		12				
		5	12	2		
			10			
			2	5	2	
				4		
				1	2	2
					2	
					0.	

Oder

Oder auch:

$29 = 1.17 + 12.$	$x = 1.y + A.$
$17 = 1.12 + 5.$	$y = 1.A + B.$
$12 = 2.5 + 2.$	$A = 2.B + C.$
$5 = 2.2 + 1.$	$B = 2.C + D.$
$2 = 2.1 + 0.$	$C = 2.D - 7.$

Anmerkung. Das letzte Glied C würde geheißen haben $C = 2D$, wenn die erſte Gleichung $17x = 29y$ geweſen wäre. — Da ſie aber $17x = 29y - 7$ war, ſo muß dieſes auch in dem letzten Gliede (hier mit —) bemerkt werden, wie ſich ſogleich näher zeigen wird.

§. 299.

Allgemein habe man die unbeſtimmte Gleichung: $ax = by \pm n$, wo a, b, und n bekannte Zahlen vorſtellen. Verfährt man nun hier eben ſo, als wenn man den größten gemeinſchaftlichen Theiler von a und b zu ſuchen hätte, und bezeichnet die Coefficienten der Quotuſſe durch die griechiſchen Buchſtaben α, β, γ, δ; die jedesmaligen Reſte aber durch A, B, C, D.

Nemlich:	ſo erhält man:
$a = \alpha.b + c$	$x = \alpha.y + A.$
$b = \beta.c + d$	$y = \beta.A + B.$
$c = \gamma.d + e$	$A = \gamma.B + C.$
$d = \delta.e + f$	$B = \delta.C + D.$
$e = \varepsilon.f + g$	$C = \varepsilon.D + E.$
$f = ϛ.g + o.$	$D = ϛ.E \mp n.$

Hier iſt im Allgemeinen anzumerken: wenn die Anzahl der Beſtimmungen gerade iſt, wie in dem letzten Beyſpiele, ſo wird das Zeichen von dem Gliede n (in der erſten Gleichung) in ſein entgegengeſetztes verwandelt; bey einer geraden Zahl der Beſtimmungen hat n in der letzten Beſtimmung das Zeichen der erſten Gleichung. — Der Grund hievon iſt aus den bisherigen Aufgaben leicht zu beſtimmen.—

Ferner ergiebt ſich aus der Form: $ax = by \pm n$ eine allgemeine Regel, wodurch beſtimmt wird, welche unbeſtimmte Glei-

Gleichungen dieſer Art auflösbar ſind, oder nicht. — Es dürfen nemlich die bekannten Größen a und b keinen gemeinſchaftlichen Factor haben, welche nicht auch der Größe n gemein iſt; widrigenfalls würde für n eine Fraction erſcheinen, mithin die Aufgabe in ganzen Zahlen unauflösbar ſeyn.

Man habe z. B. die Gleichung:

$$14x = 21y + 5.$$

Da hier 14x und 21y den gemeinſchaftlichen Factor 7 haben, ſo kann die Gleichheit in ganzen Zahlen nur durch ein Ein- oder Mehrfaches von 7 (anſtatt 5) hergeſtellt werden. Denn ſonſt erſcheint $y = 2A - \frac{5}{7}$ u. ſ. w.

§. 300.

Am wenigſten Schwierigkeit haben jene Gleichungen, worin ax dem bx unbedingt gleich, und $\pm n = 0$ iſt. z. B. Man ſuche eine Zahl, welche ſowohl durch 4, als durch 7 ohne Reſt theilbar iſt.

Auflöſung. Es ſey dieſe Zahl = x.

$$\text{folglich } x = 4A$$
$$x = 7B$$
$$\overline{4A = 7B.}$$

Hier wird nach dem vorhergehenden §.

$7 = 1.4 + 3$	$A = 1.B + C$
$4 = 1.3 + 1$	$B = 1.C + D$
$3 = 3.1 + 0.$	$C = 3.D.$

Mithin: $B = 4D$
$A = 7D.$

Die Bedingung der Aufgabe wird alſo erfüllet ſeyn, wenn entweder $A = 7D$, oder $B = 4D$ iſt. In beiden Fällen wird $x = 28D$, wo ſich für D alle möglichen ganzen Zahlen ſubſtituiren laſſen.

Zum Beſchluſſe dieſes Artikels noch eine Aufgabe: „Man ſuche eine oder mehrere Zahlen von der Beſchaffenheit, daß

daß ſie durch 2 dividirt 1 ⎫
— 3 — 2 ⎪
— 4 — 3 ⎬ zum Reſte laſſen,
— 5 — 4 ⎪
— 6 — 5 ⎭
durch den Diviſor 7 aber rein aufgehen.“

Aufloͤſung. Dieſe Zahl ſey $= X$.

Wollte man nun $X = 6.u + 5$ ſetzen, ſo waͤren darin ſchon die Formen $2A + 1$, und $3B + 2$ eingeſchloſſen; denn jede Zahl, welche durch 6 dividirt zum Reſte 5 giebt, laͤßt durch 2 dividirt 1, und durch 3 dividirt 2 uͤbrig. — Doch wir wollen dieß auch algebraiſch zeigen.

1) $\left.\begin{aligned} X &= 2A + 1 \\ X &= 3B + 2 \end{aligned}\right\} 2A = 3B + 1$

$$A = B + C = B + \frac{B+1}{2}$$

$$B = 2C - 1.$$

folglich $X = 6C - 1.$

2) $\left.\begin{aligned} X &= 6C - 1 \\ X &= 6.u + 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 6C &= 6.u + 6 \\ C &= u + 1. \end{aligned}$

folglich $X = 6(u + 1) - 1 = 6u + 5.$

3) $\left.\begin{aligned} X &= 6u + 5 \\ X &= 4x + 3. \end{aligned}\right\} 4x = 6u + 2$

$$x = u + D = u + \frac{u+1}{2}$$

$$u = 2D - 1.$$

folglich $x = 3D + 1.$

$X = 12D - 1.$

4) $\left.\begin{aligned} X &= 12D - 1 \\ X &= 5y + 4 \end{aligned}\right\} 5y = 12D - 5$

$$y = 2D - 1 + E = 2D - 1 + \tfrac{2}{5}D.$$

$$D = 2E + F = 2E + \tfrac{1}{2}E.$$

$$E = 2F.$$

folglich $D = 5F.$

$y = 12F - 1$

$X = 60F - 1.$

5) X

$$5)\ \left.\begin{array}{l} X = 60F - 1 \\ X = 7z. \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{60F-1}{7} = 8F + G = 8F + \frac{4F-1}{7}.$$

$$F = G + H = G + \frac{3G+1}{4}$$

$$G = H + I = H + \frac{H-1}{3}$$

$$H = 3I + 1.$$

folglich

$$G = 4I + 1$$
$$F = 7I + 2$$
$$Z = 60I + 17$$
$$X = 420I + 119.$$

Dieſes iſt nun die allgemeine Formel für die in der Aufgabe bezeichneten Zahlen. Läßt man I = 0, 1, 2, 3, 4, 5 gelten, ſo erhält man folgende Reihe, worin die Differenz 420 iſt.

119, 539, 959, 1379, 1799, 2219, 2639 u. ſ. w.

Probe. a) $\frac{119}{2}$ = Quotus 59, Reſt 1.

b) $\frac{119}{3}$ = Q. 39. R. 2. c) $\frac{119}{4}$ = Q. 29. R. 3.

d) $\frac{119}{5}$ = Q. 23. R. 4. e) $\frac{119}{6}$ = Q. 19. R. 5.

f) $\frac{119}{7}$ = Q. 17. R. 0.

Zweyter Artikel.

Unbeſtimmte Probleme, mit mehrern unbekannten Größen und zwey Gleichungen, oder Regel Coeci (oder Virginum.)

§. 301.

Die ſogenannte Regel Coeci oder Virginum, (weil die Operation ziemlich mechaniſch, und daher gleichſam für Blinde und unſtudirte Mädchen nicht zu ſchwer iſt) iſt im Allgemeinen eine Anleitung: aus der Summe mehrerer Produkte, von derer jedem ein Factor, und überdieß die Summe der Mitfactorn gegeben

ben iſt, die Mitfactorn ſelbſt, in ganzen Zahlen, durch unbeſtimmte Gleichungen zu finden. — Die Operation lernt ſich am leichteſten durch Beyſpiele.

§. 302.

Aufgabe. I. Die Zahl 107 iſt die Summe dreyer Produkte, wovon das eine 9, das andere 4, das dritte 3 zum Factor hat. Die Summe der Mitfactorn iſt 24... Welches ſind die Mitfactorn ſelbſt?

Auflöſung. Es ſeyen dieſe Mitfactorn x, y, z.

alſo $9x + 4y + 3z = 107.$

$x + y + z = 24.$

Nun multiplicire man die zweyte Gleichung mit dem kleinſten Factor der unbekannten Größen, und ziehe das Produkt von der erſten Gleichung ab.

$$\begin{array}{r} 9x + 4y + 3z = 107 \\ 3x + 3y + 3z = 72 \\ \hline 6x + y \quad \ldots = 35. \end{array}$$

$$y = 35 - 6x.$$

Nun laſſen ſich für x alle ganzen Zahlen ſubſtituiren, die nicht größer als 5, und nicht kleiner als 3 ſind;

denn da: $x + y + z = 24$

$z = 24 - (x + y)$

ſo muß $x + y < 24$ ſeyn.

Mithin: $x = 3,\ 4,\ 5.$

$y = 17,\ 11,\ 5.$

$z = 4,\ 9,\ 14.$

Probe. α) $9.5 + 4.5 + 3.14 = 107.$

$5 + 5 + 14 = 24.$

β) $9.4 + 4.11 + 3.9 = 107.$

$4 + 11 + 9 = 24.$

γ) $9.3 + 4.17 + 3.4 = 107.$

$3 + 17 + 4 = 24.$

Mehrere Auflöſungen ſind in ganzen poſitiven Zahlen nicht möglich.

Aufgabe

Aufgabe II. Ein Lehrer hat 30 Schüler, wovon einige 12, andere 11, andere 10 Jahre alt ſind. Die Summe der Jahre von Allen iſt: 338. — Wie viele Schüler mögen von jedem dieſer dreyerley Alter ſeyn?

Auflöſung. x Schüler von 12, y von 11, z von 10 Jahren.

Alſo: $12x + 11y + 10z = 338$ und $x + y + z = 30$

$$\underline{10x + 10y + 10z = 300}$$

$$2x + y = 38$$

$$y = 38 - 2x.$$

Da nun $z = 30 - (x + y)$

$$x + y < 30$$

ſo kann man für x alle ganzen Zahlen ſubſtituiren, die nicht größer als 18, und nicht kleiner als 9 ſind.

$x = 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9.$
$y = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.$
$z = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Aufgabe III. Ein Metzger kaufte 52 Stücke: Kälber, Schweine, Schafe um 142 fl. Ein Schaf koſtete 2, ein Schwein $3\frac{1}{2}$, ein Kalb 4 fl. Wie viele Stücke können es von jeder Sorte geweſen ſeyn?

Auflöſung. Es waren x Kälber, y Schweine und z Schafe.

$4x + \frac{7}{2}y + 2z = 142$ und $x + y + z = 52.$

$$8x + 7y + 4z = 284$$

$$\underline{4x + 4y + 4z = 208}$$

$$4x + 3y = 76.$$

$$x = \frac{76 - 3y}{4} = 19 - \frac{3}{4}y.$$

Man ſetze $y = 4A.$

$$x = 19 - 3A.$$

A =	1,	2,	3,	4,	5,	6.
x =	16,	13,	10,	7,	4,	1.
y =	4,	8,	12,	16,	20,	24.
z =	32,	31,	30,	29,	28,	27.

Aufgabe.

Aufgabe. IV. Ein Goldſchmidt hat 16 löthiges, 12 löthiges, 9 löthiges Silber. Nun will er daraus 30 Mark 11 löthiges erhalten. Wie viel kann er von jedem der dreyerley Silber in die Miſchung nehmen?

Auflöſung. x Mark vom 16, y vom 12, z vom 9 löthigen Silber.

$$16x + 12y + 9z = 330 \quad | \quad x + y + z = 30.$$
$$\underline{9x + 9y + 9z = 270}$$
$$7x + 3y = 60.$$
$$y = \frac{60 - 7x}{3} = 20 - \frac{7x}{3}.$$

Es ſey $x = 3A.$

$y = 20 - 7A.$

A =	0,	1,	2.
x =	0,	3,	6.
y =	20,	13,	6.
z =	10,	14,	18.

Aufgabe. V. Es ſollen 100 fl. in Baierthalern, Laubthalern, ganzen und halben Kopfſtücken ſo bezahlt werden, daß die Anzahl der Geldſtücke ebenfalls 100 betrage. Wie kann dieß geſchehen?

Auflöſung. Man habe dazu u Baierthaler, x Laubthaler, y Vierundzwanziger, z Zwölfer nothwendig.

Alſo $\frac{12}{5}u + \frac{11}{4}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z = 100.$

Nach Hinwegſchaffung der Brüche:

$$48u + 55x + 8y + 4z = 2000.$$
$$\underline{4u + 4x + 4y + 4z = 400.}$$
$$44u + 51x + 4y = 1600.$$
$$y = 400 - 11.u - \frac{51x}{4.}$$

Man ſetze $x = 4A.$

$y = 400 - 11.u - 51.A.$

Nun wähle man für u und A alle möglichen ganzen Zahlen, ſo daß y nicht 0 oder negativ werde. Um aber

alle

alle möglichen Veränderungen aufzufinden, muß man die eine Zahl, z. B. A ruhen laſſen. Da ergeben ſich denn folgende Auflöſungen, 43 an der Zahl.

a) Wenn A = 1.

u = 31, 30, 29, 28, 27, 26.
x = 4, 4, 4, 4, 4, 4.
y = 8, 19, 30, 41, 52, 63.
z = 57, 47, 37, 27, 17, 7.

b) Wenn A = 2.

u = 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21.
x = 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8.
y = 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67.
z = 64, 54, 44, 34, 24, 14, 10.

c) Wenn A = 3.

u = 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16.
y = 5, 16, 27, 38, 49, 60, 71.
x = 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12.
z = 61, 51, 41, 31, 21, 11, 1.

d) Wenn A = 4.

u = 17, 16, 15, 14, 13, 12.
x = 16, 16, 16, 16, 16, 16.
y = 9, 20, 31, 42, 53, 64.
z = 58, 48, 38, 28, 18, 8.

e) Wenn A = 5.

u = 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6.
x = 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20.
y = 2, 13, 24, 35, 46, 57, 68.
z = 66, 56, 46, 36, 26, 16, 6.

f) Wenn A = 6.

u = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
x = 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24.
y = 6, 17, 28, 39, 50, 61, 72.
z = 62, 52, 42, 32, 22, 12, 2.

g) Wenn

g) Wenn A = 7.

ü = 3, 2, 1.

x = 28, 28, 28.

y = 10, 21, 32.

z = 59, 49, 39.

§. 303.

Die zuſammengeſetzten unbeſtimmten Aufgaben, d. h. diejenigen, worin die unbekannten Gröſſen entweder als Produkte, oder als Potenzen des zweiten, dritten und vierten Grades vorkommen, laſſen ſich weder nach einer allgemeinen Norm, noch jederzeit in ganzen Zahlen auflöſen. Einige derſelben ſetzen voraus, daß man wenigſtens eine mögliche Auflöſung wie immer, z. B. durch öftere Verſuche, ſchon wiſſe. — Wir begnügen uns mit folgenden drey Problemen.

I. Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein Quadrat iſt.

Auflöſung. Die eine Quadratzahl heiße x^2, die andere y^2. Alſo $x^2 + y^2 = S^2$.

Nun beſtimme man die Wurzeln x und y durch ſo einen allgemeinen, correlativen Ausdruck, daß x^2 und y^2 genau ein Quadrat hervorbringen.

Man ſetze $x = 2AB$, wo für AB alle möglichen ganzen und gebrochenen Zahlen geſetzt werden können, und $y = A^2 - B^2$. Mithin $A > B$.

Es wird alſo $x^2 = 4A^2B^2$

$$y^2 = A^4 - 2A^2B^2 + B^4$$

addirt: $x^2 + y^2 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4 = S^2$.

$$A^2 + B^2 = S.$$

Es ſey nun $A = 2.\ B = 1.$

So wird $x = 4$, $y = 3$. $\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \end{array} \right.$ $(x^2 + y^2 = 25.$

Es ſey $A = 3.\ B = 1.$ ſo wird $x^2 + y^2 = 36 + 64 = 100.$

$A = 3.\ B = 2$ — — $x^2 + y^2 = 144 + 25 = 169.$

$A = 1.\ B = \frac{1}{2}$ — — $x^2 + y^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$ u. ſ. w.

II. Zwey

II. Zwey Quadratzahlen zu finden, derer Differenz wieder ein Quadrat iſt, d. i. $x^2 - y^2 = D^2$.

Auflöſung. Es ſey $x = A^2 + B^2$

$$y = 2AB$$

$$x^2 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4$$

$$-y^2 = \quad -4A^2B^2$$

$$x^2 - y^2 = A^4 - 2A^2B^2 + B^4 = D^2.$$

$$A^2 - B^2 = D.$$

Es ſey $A=4$. $B=1$. ſo wird $x^2-y^2=289-64=225$.

$A=4$. $B=2$ . . . $x^2-y^2=400-256=144$.

$A=4$. $B=3$ . . . $x^2-y^2=625-576=49$ u. ſ. w.

III. Eine oder mehrere Zahlen zu finden, derer Quadrat, um 4 vermehrt, ein reiner Kubus wird.

Auflöſung. Es ſey die Zahl $= x$, ſo erhält man die Gleichung: $\sqrt[3]{x^2+4} = R$.

Hier iſt nun unumgänglich nothwendig, wenigſtens einen Fall zu wiſſen, wo die Formel $x^2 + 4$ ein reiner Kubus wird. Ein ſolcher Fall iſt, wenn ich $x=2$ ſetze. Denn $x^2 + 4 = 8$.

Man ſetze alſo $x = 2 + A$, und ſubſtituire in der erſten Gleichung: $\sqrt[3]{8+4A+A^2} = R$.

Man ſetze: $R = 2 + \frac{1}{3}A$.

$$\sqrt[3]{8+4A+A^2} = 2 + \tfrac{1}{3}A.$$

kubirt $8+4A+A^2 = 8 + 4A + \frac{2}{3}A^2 + \frac{1}{27}A^3$

$$9 = A. \text{ mithin } x = 11.$$

Probe. $x^2 + 4 = 121 + 4 = 125 = 5^3$.

Aus dieſem zweiten Falle läßt ſich ein dritter eruiren, wenn man $x = 11 + B$ ſetzt, und

$$\sqrt[3]{125+22B+B^2} = 5 + BC.$$

kubirt: $125+22B+B^2 = 125+75BC+15B^2C^2+B^3C^3$.

 Um

Um 75BC gegen 22B aufheben zu können, ſey $C = \frac{22}{75}$, ſo erhält man $B = -\frac{122625}{10648}$

folglich $x = -\frac{5497}{10648}$.

Probe. $x^2 + 4 = \frac{483736625}{113379904} = (\frac{785}{484})^3$.

Verbindet man den erſten und zweiten Fall miteinander, und ſetzt $x = \frac{2+11D}{1+D}$ (denn iſt $D = 0$, ſo wird $x = 2$; iſt aber D unendlich groß, ſo wird $x = 11$). So ergeben ſich wieder zwey neue Fälle.

Alſo vierter Fall: $x = \frac{2+11D}{1+D}$

$$x^2 + 4 = \frac{8+52D+125D^2}{(1+D)^2} = \frac{8+60D+177D^2+125D^3}{(1+D)^3}.$$

Setzt man nun die Kubikwurzel hievon $= E + 5D$, deren Kubus: $E^3 + 15E^2D + 75ED^2 + 125D^3$ iſt,

und $E = \frac{177}{75} = \frac{59}{25}$.

So wird $D = -\frac{80379}{367875}$

und $x = -\frac{148419}{287496} = -\frac{5497}{10648}$ u. ſ. w.

Fünfter Fall: $x = \frac{2+11D}{1-D}$

$$x^2 + 4 = \frac{8+36D+125D^2}{(1-D)^2} = \frac{8+28D+89D^2-125D^3}{(1-D)^3}$$

Setzt man die Kubikwurzel hievon $= 2 - 5D$, deren Kubus: $8 - 60D + 150D^2 - 125D^2$ iſt:

ſo wird $D = \frac{88}{61}$, und $x = -\frac{1090}{27}$.

Probe. $x^2 + 4 = \frac{1191016}{729} = (\frac{106}{9})^3$.

Vier-

Vierter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen Proportionen und Progreſſionen.

Vorbegriffe.

§. 304.

Wenn man zwey Größen, z. B. a und b ſo miteinander vergleicht, daß die eine das Maß der andern wird, ſo erhält man ein mathematiſches Verhältniß. Ein mathematiſches Verhältniß iſt alſo die Beſtimmung einer Größe a durch Vergleichung mit einer zweyten Größe b.

Anmerkungen.

1. Da ſich nur gleichartige Größen zum Maße dienen, ſo folgt, daß nur gleichartige Größen miteinander in ein Verhältniß gebracht werden können.

2. Größen, welche auf dieſe Art durch Vergleichung mit einer andern beſtimmt werden, müſſen überdieß von der Art ſeyn, daß ſie ſich zählen, oder wie immer durch Zahlen ausdrücken laſſen. Und ſo kann man am Ende jedes mathematiſche Verhältniß in ein bloßes Zahlenverhältniß auflöſen.

§. 305.

Bey Vergleichung zweyer Zahlengrößen (ſtummer oder benannter) iſt ein doppelter Zweck möglich. Entweder verlangt man zu wiſſen, um wie viele Einheiten die eine Größe mehr oder weniger habe, als die andere; oder das Wievielte der einen Größe die andere ſey. Man habe z. B. die Zahlen 3 und 9. Entweder kann man fragen: Um wie viele Einheiten iſt 3 kleiner als 9, und 9 größer als 3? — Oder: das Wievielte von 3 iſt 9, und von 9 iſt 3? — Im erſten Falle verlange ich den Unterſchied, im zweyten den Quotus beider Zahlen. Den Unterſchied finde ich durch die Subtraktion, den gegenſeitigen Quotus durch die Diviſion.

§. 306.

Die Beſtimmung, welche ſich aus der Subtraktion ergiebt, heißt die arithmetiſche; und jene, welche ſich aus der Diviſion ergiebt, heißt das geometriſche Verhältniß zweyer Größen. Jenes fodert das Subtractions-, dieſes das Diviſionszeichen, welche Zeichen zwiſchen die verglichenen Größen geſetzt werden.

Z. B.	3 — 7 4 — 8 a — b	ſind arithmetiſche	3 : 6 4 : 8 a : b	ſind geometriſche Verhältniſſe.

Anmerkung. 1) In dem arithmetiſchen Verhältniſſe werden zwey Größen als Summen, im geometriſchen aber als Produkte verglichen.

2) Arithmetiſch heißt das Verhältniß, weil darin blos der Zahlenunterſchied (Ἀριθμός die Zahl) berückſichtiget wird. Bey dem geometriſchen Verhältniſſe iſt die eine Größe das Maß oder die Einheit, mit welcher die andere ausgemeſſen wird, ſo wie man ein Stück Landes ausmißt (γεωμετρεῖν), indem man eine kleinere Fläche, z. B. einen Quadratfuß, ſo oft als möglich, in daſſelbe hineinträgt.

§. 307.

In jedem Verhältniſſe unterſcheidet man dreyerley Größen:

1) Die zwey verglichenen Größen a — b, oder a : b (Glieder des Verhältniſſes, Termini), wovon das erſte und voranſtehende das Vorderglied (antecedens), das zweyte und nachſtehende aber das Hinterglied, (consequens) heißt.

2) Die durch das Verhältniß beſtimmte Größe x, welche bey arithmetiſchen Verhältniſſen die Differenz (d), bey geometriſchen der Quotus (q) iſt, und der Verhältniß-Exponent oder Zeiger genannt wird.

§. 308.

Verhältniſſe heißen oder ſind:

1) ſteigend, wenn das consequens größer iſt, als das antecedens, z. B. 6 — 9
6 : 18.

2) fal-

2) **fallend**, wenn das consequens kleiner iſt, als das antecedens, z. B. $10 - 4$
$48 : 6.$

3) **gleich**, wenn die Verhältnißexponenten die nemlichen ſind, z. B.
$5 \overset{6}{-} 11$
$7 \overset{6}{-} 13$ } gleiche arithmetiſche
$9 \overset{6}{-} 15$

$2 \overset{2}{:} 4$
$3 \overset{2}{:} 6$ } gleiche geometriſche Verhältniſſe.
$4 \overset{2}{:} 8$

4) **ungleich**, wenn die Verhältnißexponenten verſchieden ſind.
$3 \overset{1}{-} 4$
$5 \overset{4}{-} 9$ } ungleiche arithmetiſche
$6 \overset{6}{-} 12$

$3 \overset{2}{:} 6$
$4 \overset{3}{:} 12$ } ungleiche geometriſche Verhältniſſe.
$5 \overset{4}{:} 20$

§. 309.

In jedem Verhältniſſe hat eine doppelte Beziehung der verglichenen Größen, alſo auch ein zweifacher Exponent Statt. (§. 305.)

Z. B. in dem Verhältniſſe: $5 - 7$ kann der Exponent $+ 2$, oder $- 2$ ſeyn, je nach dem ich die kleinere Zahl von der größern, oder die größere von der kleinern abziehe. Und in dem geometriſchen $3 : 9$ iſt der Exponent entweder 3, wenn ich 9 durch 3; oder $\frac{1}{3}$, wenn ich 3 durch 9 dividire. — Es iſt im Grunde einerley, auf welche Art man den Verhältnißexponenten ſuche, wenn man ſich nur immer gleich bleibt; doch — da ohnehin die Verhältniſſe keine bloße Subtraction und Diviſion bezeichnen — iſt es in mancher Rückſicht vortheilhafter, den Verhältnißexponenten bey arithmetiſchen dadurch zu finden, daß man das antecedens von dem consequens abzieht; bey geometriſchen Verhältniſſen aber, daß man das consequens durch das antecedens dividirt.

§. 310.

Nach dieſer Vorausſetzung iſt der allgemeine Ausdruck eines arithmetiſchen Verhältniſſes : a — a + d; eines geometriſchen aber : a : aq.

Denn wenn a — b jedes arithmetiſche Verhältniß
und a : b jedes geometriſche Verhältniß bezeichnen kann; und überdieß b — a = d
b : a = q iſt
ſo iſt auch b = a + d
b = aq.

Durch Subſtitution ergiebt ſich endlich a — a + d
a : aq.

Aus gleichem Grunde iſt b — b + d ein arithmetiſches
und b : bq ein geometriſches Verhältniß; und zwar ſind ſowohl die beiden arithmetiſchen, als auch die beiden geometriſchen Verhältniſſe einander gleich, weil ihr Exponent der nemliche iſt. (§. 308.)

§. 311.

Zwey gleiche Verhältniſſe mittelſt des Gleichheitszeichens zuſammengeſtellt geben eine Proportion; und zwar

1) eine arithmetiſche, wenn die Verhältniſſe arithmetiſch;

2) eine geometriſche, wenn die Verhältniſſe geometriſch ſind.

$$\left.\begin{array}{l} 2 - 5 = 6 - 9 \\ 5 - 9 = 10 - 14 \end{array}\right\} \text{arithmetiſche}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 : 6 = 4 : 12 \\ 9 : 3 = 15 : 5 \end{array}\right\} \text{geometriſche Proportionen.}$$

Der allgemeine Ausdruck einer arithmetiſchen Proportion iſt:

a — a + d = b — b + d.

Der einer geometriſchen aber:

a : aq = b : bq. (§. praec.)

Erklä-

Erklärungen.

Man nennt

a) das erſte und letzte Glied einer Proportion die äußern Glieder (termini extremi)

b) das zweite und dritte die mittlern Glieder (termini medii),

c) die beiden Vorder- oder die beiden Hinterglieder Homologe oder gleichnamige Glieder (termini homologi),

d) die Proportion ſelbſt gerade, wenn ſie aus zwey ſteigenden, oder zwey fallenden Verhältniſſen; — ungerade — wenn ſie aus einem ſteigenden und einem fallenden Verhältniſſe zuſammengeſetzt iſt.

§. 312.

Wenn in einer Proportion die inneren Glieder einander gleich ſind, ſo heißt ſie ſtätig oder fließend (continua); widrigenfalls discret.

2 — 5 = 5 — 8. ſtätige arithmetiſche

2 : 4 = 4 : 8 ſtätige geometriſche Proportion.

Man ſchreibt derley ſtätige Proportionen, Kürze halber, nur mit drey Gliedern, indem man das mittlere Glied nur einmal ſetzt; dieſes Glied heißt dann die mittlere Proportionalzahl.

2 — 5 — 8. Differenz 3.

2 : 4 : 8. Quotus 2.

Folgeſätze. 1) In einer ſtätigen arithmetiſchen Proportion (aus drey Gliedern) iſt zwiſchen einem jeden vorhergehenden Gliede, und ſeinem nachfolgenden die nemliche Differenz.

2) In einer ſtätigen geometriſchen Proportion giebt jedes vorhergehende Glied mit ſeinem nachfolgenden einerley Quotus.

§. 313.

Eine ſtätige Proportion (im verkürzten Ausdrucke), von mehr als drey Gliedern heißt eine Progreſſion oder Reihe.

1 — 3

1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 11 arithmetiſche
1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 geometriſche Progreſſion.

In jeder arithmetiſchen oder geometriſchen Progreſſion heißen alle Glieder, außer dem erſten, Hinterglieder; und alle, außer dem letzten, Vorderglieder.

Soviel haben die arithmetiſchen und geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen mit einander gemein. Die Natur der Sache fodert nun, daß das Eigenthümliche derſelben auch getrennt behandelt werde. Die Ordnung, in welcher dieſes geſchieht, iſt folgende:

Erſtes Hauptſtück. Von den arithmetiſchen Proportionen und Progreſſionen.

Zweytes Hauptſtück. Von den geometriſchen Proportionen und Progreſſionen.

Aus der Verbindung einer arithmetiſchen und geometriſchen Progreſſion ergeben ſich die Logarithmen; alſo

Drittes Hauptſtück. Von den Logarithmen.

Jedes Hauptſtück zerfällt — nach Erfoderniß des zu behandelnden, mehr oder weniger reichhaltigen Stoffes, wieder in mehrere oder wenigere Artikel.

Anmerkung. Vor der eigentlichen Proportionslehre muß noch die Natur der Verhältniſſe näher beſtimmt werden.

Erſtes Hauptſtück.

Von den arithmetiſchen Proportionen und Progreſſionen der Zahlen.

§. 314.

Geſetze der arithmetiſchen Verhältniſſe.

I. Da die arithmetiſch verglichenen Größen gegeneinander in dem Verhältniſſe der Subtraction ſtehen, ſo müſſen ſie im ſtrengſten Sinne gleichartig ſeyn, oder gemacht werden. Alſo z. B. 1 fl. — 1 kr. = 60 kr. — 1 kr.

II. Zwey

II. Zwey gleichartige, durch einerley Maß beſtimmte Größen verhalten ſich arithmetiſch, wie die Zahlen, welche ihnen als Coefficienten voranſtehen.

60 kr. — 1 kr. = 60 — 1.

III. Zu einem gegebenen arithmetiſchen Verhältniſſe findet man ein oder mehrere gleiche, wenn man eine beliebige Zahl als Antecedens erwählt, und dazu den Verhältnißexponenten addirt, welche Summe das Conſequens giebt.

$$a-(a+d)=b-(b+d)=c-(c+d)=x-(x+d).$$

IV. Jedes arithmetiſche Verhältniß bleibt unverändert, wenn man das Antecedens und Conſequens um eine beliebige Zahl, z. B. m vermehrt, oder vermindert:

$$a-(a+d)=(a\pm m)-(a+d\pm m).$$

V. Ein arithmetiſches Verhältniß, daß aus gebrochenen Zahlen eines verſchiedenen Nenners beſteht, läßt ſich in ein anderes verwandeln, worin die Nenner gleich ſind. Doch muß der gemeinſchaftliche Nenner ausdrücklich ſtehen.

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{4-6}{8}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{a+d}{c}=\frac{ac-(ab+bd)}{bc}.$$

VI. Würden und Wurzeln paſſen nur in ſo fern zu einem arithmetiſchen Verhältniſſe, als ſie förmlich ſubtrahirt werden können, d. h. ganz gleichartig ſind.

$$a^2-3a^2=5a^2-7a^2$$

$$2\sqrt{x}-7\sqrt{x}=5\sqrt{x}-10\sqrt{x}.$$

Was nun von einzelnen Verhältniſſen gilt, muß auch von der Proportion ſelbſt gelten.

Erſter Artikel.

Arithmetiſche Proportion.

§. 315.

Geſetze der arithmetiſchen discreten Proportion.

I. In der discreten arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich.

Denn

Denn da : $a - (a + d) = b - (b + d)$ §. 310.)
ſo iſt : $a + (b + d) = (a + d) + b$
$a + b + d = a + b + d.$

$5 - 11 = 7 - 13.$
$5 + 13 = 11 + 7.$
$18 = 18.$

II. Zu drey gegebenen Zahlen findet man die vierte, unbekannte Proportionalzahl (x), wenn man die Summe der äußern Glieder jener der innern gleich ſetzt, und von x die bekannte Größe durch Subtraction hinwegſchafft:

Z. B. a) $3 - 7 = 8 - x.$
$x + 3 = 15$
$x = 12$

alſo $3 - 7 = 8 - 12.$

oder b) $5 - 19 = x - 30$
$x + 19 = 35$
$x = 16$

alſo $5 - 19 = 16 - 30.$

oder c) $7 - x = 4 - 100$
$x + 3 = 107$
$x = 104$

alſo $7 - 104 = 3 - 100.$

oder d) $x - 45\frac{1}{2} = 17\frac{3}{4} - 50$
$x + 50 = 63\frac{1}{4}$
$x = 13\frac{1}{4}$

alſo: $13\frac{1}{4} - 45\frac{1}{2} = 17\frac{3}{4} - 50.$

Folgeſatz. Wenn die Summe zweyer Zahlen (z. B. 3 + 20) der Summe zweyer anderer (z. B. 16 + 7) gleich iſt, ſo ſtehen dieſe Zahlen jedesmal in einer arithmetiſchen Proportion, wenn man nur die Zahlen der einen Summe zu den äußern, die der andern zu den mittlern Gliedern macht: $3 - 7 = 16 - 20$
oder $3 - 16 = 7 - 20$ u. ſ. w.

Anmer-

Anmerkung. Die §. 25. gezeigte Elferprobe hat ihren Grund in der arithmetiſchen Proportion. Wenn man nemlich die verjüngte Summe der geraden Zifferſtellen (a) von jener der ungeraden (b) (oder auch verkehrt), ſowohl in den Summanden, als auch in der Hauptſumme abzieht — (für letztere nehmen wir A und B): ſo iſt $a + B = b + A$. d. i. dieſe vier Zahlen ſtehen in einer arithmetiſchen Proportion.

In dem Beyſpiele §. 25 iſt:

$$a = 1\ (+11)\quad A = 7.$$
$$b = 8\quad B = 3\ (+11).$$

Alſo $a - b = A - B$

$$1 - 8 = 7 - 14.$$

oder: $b - a = B - A$

$$8 - 12 = 3 - 7.$$

§. 316.

Lehrſatz. Die allgemeine Form der ſtätigen arithmetiſchen Proportion iſt: $a - a + d - a + 2d$.

Beweis. Man verwandle die ſtätige Proportion in eine discrete, worin das letzte Glied unbekannt $(= x)$ iſt, und beſtimme dieſes nach §. praec.

$$a - a + d - x =$$
$$a - a + d = a + d - x$$
$$x + a = 2a + 2d$$
$$- a = - a$$
$$x = a + 2d.$$

Subſtituirt: $a - a + d = a + d - a + 2d$.

oder: $a - a + d - a + 2d$.

§. 317.

Geſetze der arithmetiſchen ſtätigen Proportion.

I. In der ſtätigen arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußern Glieder dem Doppelten des mittlern Gliedes gleich.

$$a - a + d - a + 2d$$
$$a + a + 2d = 2\,(a + d)$$
$$2a + 2d = 2\,(a + d).$$

II. Um

II. Um zu zwey gegebenen Zahlen die dritte arithmetiſche Proportionalzahl zu finden, betrachtet man dieſe als das unbekannte Glied (x); bildet aus der Summe der äußern Glieder, und dem doppelten mittlern Gliede eine Gleichung, und ſchafft die bekannten Größen von x nach den Regeln der Gleichungen hinweg.

Aufgabe. Man ſuche zu 18, 29 die dritte arithmetiſche Proportionalzahl, ſo daß x auf der erſten, zweiten und dritten Stelle zu ſtehen komme.

Auflöſung. a) $x - 18 - 29$

$$x + 29 = 36$$
$$x = 36 - 29 = 7.$$

b) $18 - x - 29$

$$2x = 47$$
$$x = \frac{47}{2} = 23\frac{1}{2},$$

d. i.: die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zweyer Zahlen iſt ihrer halben Summe gleich.

c) $18 - 29 - x$

$$x + 18 = 58$$
$$x = 40.$$

Folglich hat man die drey ſtätigen arithmetiſchen Proportionen

$$7 - 18 - 29$$
$$18 - 23\tfrac{1}{2} - 29$$
$$18 - 29 - 40.$$

Folgeſatz. Wenn die Summe zweier Zahlen (z. B. 3 und 7 = 10) dem Doppelten einer andern (z. B. 5) gleich iſt, ſo iſt die letzte die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen den beiden andern.

$$3 - 5 - 7$$
$$2 \times 5 = 3 + 7$$
$$10 = 10.$$

Zweyter Artikel.

Arithmetiſche Progreſſion.

§. 318.

Arithmetiſche Progreſſion heißt eine Reihe von Zahlen, welche immer um eine gleiche Differenz ſteigen oder fallen.

Nennt

Nennt man dieſe Differenz allgemein $\pm$ d, weil die Reihe ſteigend oder fallend ſeyn kann, und das erſte Glied = a, ſo hat man für alle arithmetiſche Progreſſionon die allgemeine Form:

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d,\ a \pm 4d,\ a \pm 5d,\ a \pm 6d$.. u. ſ. w.

Da nun die arithmetiſche Progreſſion nur eine fortgeſetzte ſtätige Proportion iſt, ſo müſſen jedesmal drey unmittelbar auf einander folgende Glieder wieder eine ſtätige arithmetiſche Proportion geben.

Z. B. $a - a \pm d - a \pm 2d$

$(a \pm d) - (a \pm 2d) - (a \pm 3d)$

$(a \pm 2d) - (a \pm 3d) - (a \pm 4d)$ u. ſ. w.

§. 319.

Betrachtet man dieſe allgemeine arithmetiſche Reihe aufmerkſam, ſo zeigt ſich

1) daß jedes Glied derſelben die Summe aus dem erſten Gliede, und einer ſo vielfachen Differenz ſey, als Glieder vorausgehen;

2) daß folglich, wenn p die Anzahl der Glieder bedeutet, wo die Reihe abgebrochen wird, das allgemeine Glied ſey $a \pm d\,(p - 1)$;

3) daß, wenn man die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a \pm d\,(\overline{n - 1})$$

und das vorletzte Glied $y = a \pm d\,(\overline{n - 2})$ u. ſ. w. ſeyn müſſe.

§. 320.

Nach dieſen Vorausſetzungen ergiebt ſich für eine geſchloſſene Progreſſion als allgemeine Formel:

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d \ldots a+d(n-2),\ a+d(n-1)$.

Es ſey $a = 1$.

$d = 4$.

$n = 20$. ſo entſteht die Progreſſion:

1, 5, 9, 13, 17 ...... 73, 77.

So daß z = 77. Da

Da nun in der Formel $z = a + d\,(n-1)$ auch noch die Größen a, d, n vorkommen, ſo können ſie ebenfalls allgemein daraus beſtimmt werden.

Nemlich 1) $a = z - d\,(n-1)$.

2) $d = \frac{z-a}{n-1}$.

3) $n = \frac{z-a+d}{d} = \frac{z-a}{d} + 1$.

Subſtituirt man nun aus der obigen Progreſſion für z, d, n, a ihre Werthe, ſo ergiebt ſich die Richtigkeit des Verfahrens; 1) $a = 77 - 4 \cdot (19) = 77 - 76 = 1$.

2) $d = \frac{77-1}{20-1} = \frac{76}{19} = 4$.

3) $n = \left(\frac{77-1}{4}\right) + 1 = 19 + 1 = 20$.

§. 321.

Lehrſatz. Die Summe zweyer Glieder, derer eines eben ſo weit von dem erſten Gliede, als das andere von dem letzten Gliede entfernt iſt, iſt der Summe des erſten und letzten Gliedes gleich.

Beweis. Ein Glied welches die m^{te} Stelle nach dem erſten einnimmt, iſt $= a + d \times m$; und ein Glied in der m^{ten} Stelle vor dem letzten Gliede $= a + d\,(n-1-m)$; daher die Summe $2a + d\,(n-1) = a + z$ (§. praec.)

Dieſe Wahrheit wird anſchaulich, wenn man eine arithmetiſche Reihe doppelt, aber in verkehrter Ordnung unter einander ſchreibt.

Erſtes Beyſpiel, wo die Anzahl der Glieder gerade iſt.

2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29
29,	26,	23,	20,	17,	14,	11,	8,	5,	2
31,	31,	31,	31,	31,	31,	31,	31,	31,	31

Zweytes Beyſpiel, wo die Anzahl der Glieder ungerade iſt.

4,	6,	8,	10,	12,	14,	16
16,	14,	12,	10,	8,	6,	4
20,	20,	20,	20,	20,	20,	20.

Nennt

Nenn't man nun in dieſer Reihe (und allen jenen), worin die Gliederzahl ungerade iſt, das mittlere Glied m, die Summe des erſten und letzten Gliedes aber a+z: ſo iſt offenbar, daß

$$2m = a + z$$

$$m = \frac{a+z}{2.}$$

Anmerkung. Eine arithmetiſche Reihe von ungerader Gliederzahl läßt ſich in eine andere von gerader umſchaffen, wenn man das mittlere Glied m hinwegläßt.

§. 322.

Aufgabe. Die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion zu finden.

Auflöſung. Man ſchreibe die allgemeine Formel arithmetiſcher Reihen doppelt, und in verkehrter Ordnung untereinander, und nenne ihre Summen = S. Addirt man nun beide Reihen, ſo enthält die Summe 2S offenbar n mal die Summe (a + z), woraus ſich dann der Werth für das einfache S finden läßt.

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots a + d\,(n-2) + z.$$
$$S = z + a + d\,(n-2) + \dots\dots\dots (a+d) + a.$$

$$2S = (a+z)n \quad (\text{§. praec.})$$

$$S = \left(\frac{a+z}{2}\right)n \text{ oder } = (a+z)\,\frac{n}{2.}$$

Mit Worten ausgedrückt heißt dieſe Formel: Man findet die Summe einer arithmetiſchen Reihe, wenn man die halbe Summe des erſten und letzten Gliedes mit der ganzen Gliederanzahl multiplicirt. — Oder: Wenn man die Summe des erſten und letzten Gliedes mit der halben Gliederzahl multiplicirt.

§. 323.

Aus dieſer Formel laſſen ſich wieder neue Werthe für a, z und n finden.

Nem.

Nemlich 1) $a = \frac{2S - nz}{n}$

2) $z = \frac{2S - an}{n}$

3) $n = \frac{2S}{a + z}$.

Stellt man nun dieſe drey Werthe mit jenen, §. §. 319, 320 gefundenen, zuſammen, ſo erhält man drey neue Gleichungen; und da von den vier vorkommenden Größen jede die geſuchte ſeyn kann, ſo ergeben ſich $3 \times 4 = 12$ neue Formeln. Dazu noch die bisher gefundenen acht addirt, giebt es zwanzig verſchiedene Formeln, welche hier folgen.

Nro.	Zu ſuchende Größe.	Gegeben iſt.	Formeln.
I.	a.	z. d. n.	$z - d\,(n-1)$
II.		z. n. S.	$\frac{2S - nz}{n}$
III.		d. n. S.	$\frac{S}{n} - \frac{d\,(n-1)}{2}$
IV.		z. d. S.	$\frac{d \pm \sqrt{-8dS + (d+2z)^2}}{2}$
V.	z.	a. d. n.	$a + d\,(n-1)$
VI.		a. n. S.	$\frac{2S - an}{n}$
VII.		d. n. S.	$\frac{S}{n} + d\left(\frac{n-1}{2}\right)$
VIII.		a. d. S.	$\frac{-d \pm \sqrt{8dS + (2a-d)^2}}{2}$

Nro.

Nro.	Zu ſuchende Größe.	Gegeben iſt.	Formeln.
IX.	d.	a. z. n.	$\frac{z-a}{n-1}$
X.		a. n. S.	$\frac{2S-2an}{n(n-1)}$
XI.		z. n. S.	$\frac{2nz-2S}{n(n-1)}$
XII.		a. z. S.	$\frac{(z+a)\,.\,(z-a)}{2S-a-z}$
XIII.	n.	a. d. z.	$1+\frac{z-a}{d}$
XIV.		a. S. z.	$\frac{2S}{a+z}$
XV.		a. d. S.	$\frac{d-2a\pm\sqrt{8dS+(2a-d)^2}}{2d}$
XVI.		d. S. z.	$\frac{d+2z\pm\sqrt{-8dS+(d+2z)^2}}{2d}$
XVII.	S.	a. n. z.	$(a+z)\times\frac{n}{2}$
XVIII.		a. d. n.	$n\times\left(a+d\times\frac{n-1}{2}\right)$
XIX.		d. n. z.	$n\times\left(z-d\times\frac{n-1}{2}\right)$
XX.		a, d. z.	$\frac{(z+a)\times(d+z-a)}{2d}$

Anmerkung. Alle dieſe Formeln ſind zunächſt für die ſteigenden Progreſſionen berechnet; hat man alſo eine fallende Progreſſion zu behandeln, ſo verwandelt man ſie zuerſt in eine ſteigende, dadurch, daß man ſie verkehrt anſchreibt, d. i. das erſte Glied zum letzten, und das letzte zum erſten macht, und die Differenz poſitiv ſetzt.

Z. B. die fallende Progreſſion (oder vielmehr Degreſſion): 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 wird in eine ſteigende verwandelt, wenn ich

$$a = 2$$
$$z = 16$$
$$d = + 2$$ ſetze.

§. 324.

Aufgaben.

I. Welches iſt die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

Auflöſung. $a = 1$. $z = 1000$. $n = 1000$.

$$S = (a + z)\frac{n}{2} = 1001 \times 500 = 500500.$$

II. Wie viele Schläge macht der Hammer einer gewöhnlichen Stundenuhr innerhalb eines Jahres?

Auflöſung. Zuerſt ſuche man die Schläge für Tag und Nacht.

$a = 1$. $z = 12$. $n = 12$.

$S = 13 \times 6 = 78$ Schläge innerhalb eines Tages.
78 — für die Nacht.

156 für einen mathematiſchen Tag.

$156 \times 365 = 56940$ Schläge innerhalb eines gemeinen Jahres.

III. Es hatte Jemand einen Brunnen graben laſſen, und zwar für den erſten Fuß in die Tiefe 2 fl., für jeden folgenden $\frac{1}{2}$ fl. mehr — in allem aber 1005 fl. bezahlt. Wie viele Fuß tief war der Brunnen geworden?

Auflöſung. Hier iſt $a = 2$. $d = \frac{1}{2}$. $S = 1005$. n aber unbekannt; die Auflöſung geht alſo nach Formel XV.

$$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{8dS + (2a - d)^2}}{2d}$$

$$n = \frac{1}{2} - 4 \pm \sqrt{\frac{16129}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{127}{2} - 4 = 60.$$

Alſo war der Brunnen 60 Fuß tief geworden.

IV. Wel-

IV. Welches iſt im Allgemeinen die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion, die ſich mit 1 anfängt, und deren Gliederzahl = n, die Differenz aber = d iſt?

Aufloͤſung. Da hier aus den gegebenen Groͤßen a, d, n die Groͤße S gefunden werden ſoll, ſo muß die XVIII. Formel genommen werden.

$$S = n \times \left(a + d \times \frac{n-1}{2}\right)$$

aber a = 1.

$$S = n \times \left(1 + d \times \frac{n-1}{2}\right) = n \times \left(1 + \frac{dn-d}{2}\right)$$

$$S = n + \frac{dn^2-dn}{2} = n + \frac{(n^2-n)d}{2}$$

$$S = n + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Dritter Artikel.

Von den vieleckigen oder Polygonal-Zahlen.

§. 325.

Die Summation der arithmetiſchen Progreſſionen, welche von 1 anfangen, und derer Differenz der Ordnung nach 1, 2, 3, 4 u. ſ. w., oder uͤberhaupt eine ganze Zahl iſt, fuͤhrt auf die Lehre von den vieleckigen oder Polygonal-Zahlen, welche entſtehen, wenn man einige Glieder einer ſolchen Progreſſion zuſammenzaͤhlt. — Vieleckige oder Polygonalzahlen heißen ſie, weil ſich ſo viel Punkte, als eine ſolche Zahl Einheiten hat, als Drey- Vier- Fuͤnf- uͤberhaupt M-Ecke darſtellen laſſen.

Bey dieſen Zahlen ſind vorzuͤglich zwey Groͤßen zu unterſcheiden.

1) Die Groͤße n, welche anzeigt, a) wie viele Glieder der Progreſſion addirt worden, und b) wie viele Punkte eine Seite des MEckes habe; daher ſie auch ſchlechtweg die Seite, oder Seitenzahl heißt.

2) Die Groͤße M, welche die Anzahl der Winkel bedeutet, wovon das Vieleck benennt wird.

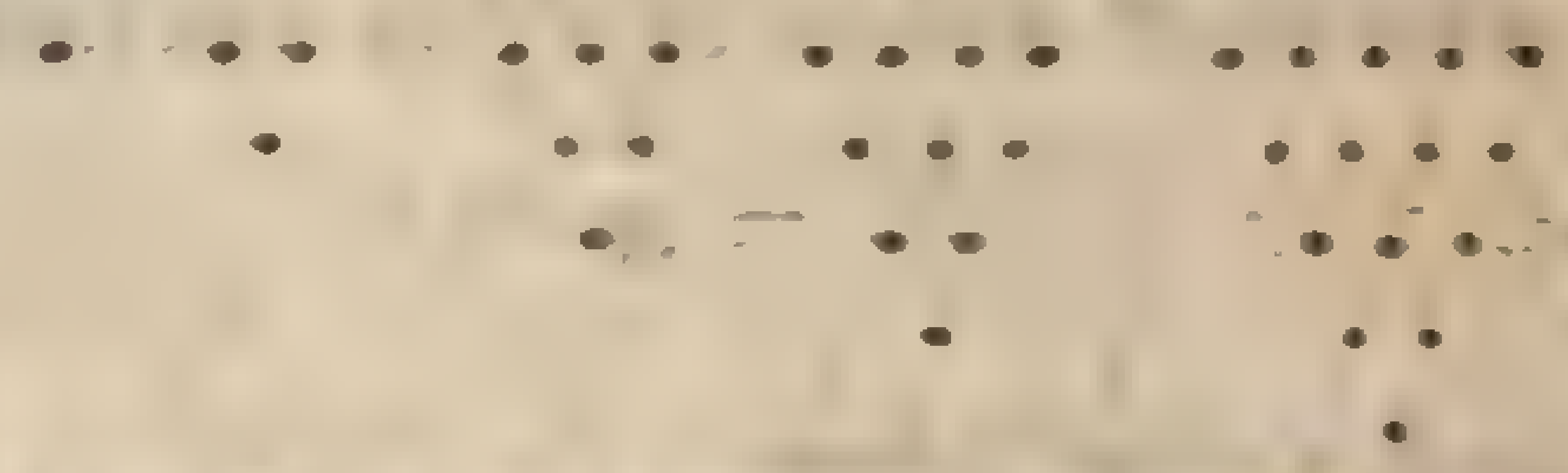
I. Urſprung der dreyeckigen Zahlen.

Man ſetze die Differenz = 1, ſo entſteht die Progreſſion: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . n.

Nimmt man nun außer dem erſten Gliede noch die Summe von zwey, drey, vier — n Gliedern, ſo erhält man die dreyeckigen Zahlen, wie ſie folgende Reihe darſtellt:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 . . . .

Figur 1. 3. 6. 10. 15.



u. ſ. w.

Iſt nun die Seite des Dreyecks allgemein = n, ſo iſt die Formel für alle dreyeckigen Zahlen:

$$= \frac{(1+n)n}{2}$$

* Es ſey z. B. n = 5, ſo wird die dreyeckige Zahl von 5 ſeyn $\frac{(1+5)5}{2} = 3 \cdot 5 = 15$, wie oben.

II. Urſprung der viereckigen Zahlen.

Man ſetze die Differenz = 2, ſo ergiebt ſich die Reihe:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 . . . . n

wovon die Summen die Quadrate der natürlichen Zahlen geben, die ſich durch Vierecke ausdrücken laſſen.

1 4 9 16 25 u. ſ. w.

Iſt nun allgemein die Seite = n, ſo iſt die Formel für die viereckigen Zahlen : $S = n^2$.

III. So hat im Allgemeinen die Figur zwey Ecke mehr, als die Differenz Einheiten, oder $M = d + 2$. Man erhält alſo die fünf-, ſechs-, ſiebeneckigen Zahlen, wenn man

man die Differenz = 3, 4, 5 ſetzt. — Subſtituirt man nun dieſe verſchiedenen Differenzen in der allgemeinen Formel (§. 324. IV.)

$$S = n + \frac{n(n-1)d}{2}$$

ſo ergeben ſich folgende ſpecielle Formeln:

$$\text{Das IIIeck} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{IVeck} = n^2$$

$$\text{Veck} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{VIeck} = \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n = n(2n-1)$$

$$\text{VIIeck} = \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$\text{VIIIeck} = \frac{6n^2-4n}{2} = n(3n-2)$$

$$\text{IXeck} = \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2} \text{ u. ſ. w.}$$

$$\text{Meck} = \frac{(M-2)n^2-(M-4)n}{2}$$

Aufgabe. Welches iſt die 12 eckige Zahl von 20?

Auflöſung. Indem hier M = 12 und n = 20 iſt, ſo wird

$$x = \frac{(10^5 \times 400) - 8^4 \cdot 20}{2}$$

$$= 2000 - 80 = 1920.$$

Vierter Artikel.

Von den arithmetiſchen Progreſſionen des zweiten Grades.

§. 326.

Eine Reihe von Zahlen, derer Differenzen eine arithmetiſche Progreſſion geben, iſt eine arithmetiſche Progreſſion des zweiten Grades. — In einer ſolchen

ſolchen Progreſſion ſtehen zum Beyſpiel die Quadrate der natürlichen Zahlen:

$$\begin{array}{lllllllll} 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & 64, & 81 \\ & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & 17 \text{ erſte Differenzen} \\ & & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2. \text{ zweyte Differenz.} \end{array}$$

Die zweyte Differenz iſt jene zwiſchen den Gliedern der erſten Differenzen, oder der arithmetiſchen Progreſſion.

Die allgemeine Formel für die arithmetiſchen Progreſſionen des zweiten Grades wird, wenn man die erſte der erſten Differenzen durch d, und die zweyte durch δ bezeichnet, folgende ſeyn:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a.	a+d.	a+2d+δ.	a+3d+3δ.	a+4d+6δ.	a+5d+10δ.

Beweis. Die erſten Differenzen (oder die arithmetiſche Progreſſion vom erſten Grade) ſind offenbar:

$$d,\ d+\delta,\ d+2\delta,\ d+3\delta,\ d+4\delta,\ d+5\delta.$$

Es muß alſo a in jedem Gliede, und d in jedem folgenden einmal öfter, als im vorhergehenden enthalten ſeyn.

Eben ſo einleuchtend iſt es, daß in dem dritten Gliede δ vorkommen müſſe; und weil, wenn man das dritte von dem vierten abzieht, der Reſt $d+2\delta$ ſeyn muß, ſo muß δ im vierten Gliede dreifach vorkommen. Zieht man das vierte Glied von dem fünften ab, ſo muß der Reſt $d+3\delta$ ſeyn, welches vorausſetzt, daß δ in dem fünften Gliede ſechsfach vorkomme u. ſ. w. Oder allgemein:

Es müſſen die Coefficienten von δ ſo zunehmen, daß, wenn man jeden vorhergehenden von dem darauf folgenden abzieht, jeder folgende Reſt um 1 größer, als der vorhergehende wird. Nun ſind dieſe Coefficienten folgende:

$$\begin{array}{lllll} 1, & 1+2, & 1+2+3, & 1+2+3+4, & 1+2+3+4+5= \\ 1, & 3, & 6, & 10, & 15. \end{array}$$

§. 327.

Folgeſätze.

I. Das erſte Glied a kommt alſo in jedem folgenden Gliede, und auch im letzten vor, wo man die Reihe abbricht.

II. Die

II. Die Differenz d erſcheint in jedem Gliede, multiplicirt mit $N-1$ (wenn dadurch die Anzahl der vorhergehenden Glieder bezeichnet wird).

III. Die zweite Differenz δ hat zum Coefficienten eine Dreyeckszahl von $N-2$ Gliedern. Jeder Coefficient von δ kann alſo durch ein Dreyeck dargeſtellt werden; daher iſt (nach §. 325. I.) der Coefficient von δ allgemein

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2} = \frac{N^2-3N+2N^0}{2}$$

IV. Daher iſt das Glied, vor welchem $N-1$ Glieder hergehen,

$$\text{oder } Z = a + (N-1)d + \left(\frac{N^2-3N+2N^0}{2}\right)\delta$$

$$Z = \tfrac{1}{2}\delta \times N^2 + (d-\tfrac{3}{2}\delta)N + (a+\delta-d)N^0.$$

Aufgabe. 1) Welches iſt das zehnte Glied in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 angefangen?

Aufloͤſung. Hier iſt $a=1$. $N=10$. $d=3$. $d=2$.

$$Z = 1 + 9 \cdot 3 + \tfrac{72}{2} \cdot 2 = 28 + 72 = 100.$$

Aufgabe. 2) Welches iſt das hundertſte Glied in der Reihe:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 u. ſ. w.

Aufloͤſung. Hier iſt $d=2$. $\delta=1$. $N=100$.

$$\text{folglich } Z = 1 + (99 \cdot 2) + \left(\tfrac{9702}{2}\right) = 5050.$$

§. 328.

Aufgabe. Die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion des zweiten Grades zu finden.

Aufloͤſung. I. Nennt man die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion des zweiten Grades $= s$, und die des erſten $= S$, ſo geht aus der Formel §. 326 die Gleichung hervor: $s = S + (N-2)\triangle \times \delta$, wo $(N-2)\triangle$ die Summe der dreyeckigen Zahlen 1, 3, 6, 10 u. ſ. w. vorſtellt.

II. Dieſe Summe iſt, wenn die Anzahl aller Glieder der Progreſſion N, und folglich die Anzahl der zu ſuchenden Dreyecksʒahlen $N-2$ heißt

$$= \tfrac{1}{6}(N-2)^3 + \tfrac{1}{2}(N-2)^2 + \tfrac{1}{3}(N-2)^1.$$

Beweis.

Beweis. Iſt die Anzahl der Dreyeckszahlen N, ſo iſt die Formel für die Summe der drey erſten gültig; denn $\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{3} = 10$.

Die vierte Dreyeckszahl iſt $= z + (N+1)$, ſo wie jede folgende, welche zu den gegebenen hinzukommt.

Weil $z = \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N$, ſo iſt die vierte Dreyeckszahl $= \frac{1}{2}N^2 + 1\frac{1}{2}N + 1$. Dieſer Werth zu $\frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3}N$ addirt, giebt: $\frac{1}{6}(N+1)^3 + \frac{1}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{3}(N+1)$.

Die Formel gilt alſo auch für die Summe von vier Dreyeckszahlen, und nach der nemlichen Beweisart für die Summe von 5, 6, 7 u. ſ. w.

Daher:

$$s = [2a + d(N-1)]\frac{N}{2} + \delta\left[\frac{1}{6}(N-2)^3 + \frac{1}{2}(N-2)^2 + \frac{1}{3}(N-2)\right]$$

$$s = N^3\left(\frac{\delta}{6}\right) + N^2\left(\frac{d-\delta}{2}\right) + N\left(\frac{6a - 3d + 2\delta}{6}\right)$$

§. 329.

Aufgaben.

I. **Die Summe von den Quadraten aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu finden.**

Auflöſung. Hier iſt $a = 1$. $d = 3$. $\delta = 2$. $N = 100$.

Alſo: $s = 1000000 \times \frac{1}{3} + \frac{10000}{2} + \frac{50}{3}$.

$s = 338.350$.

II. In einem Arſenale befindet ſich eine Anzahl Kugeln, in Form einer abgekürzten dreyeckigen Pyramide geſchichtet. In der oberſten Schichte liegen 28, in der zweiten 36, in der dritten 45. — Welches iſt die Summe dieſer Kugeln, da es in allem 20 Schichten ſind?

Auflöſung. 28. 36. 45.

8. 9.

1.

alſo $a = 28$.

$d = 8$.

$\delta = 1$.

$N = 20$.

$s = (8000 \times \frac{1}{6}) + (400 \times \frac{7}{2}) + (20 \times \frac{146}{6})$

$s = 1820 + 1400 = 3220$ Kugeln.

Zwey:

Zweytes Hauptſtück.

Von den geometriſchen Proportionen und Progreſſionen.

Erſter Artikel.

Von den geometriſchen Verhältniſſen.

§. 330.

Die Größe, Gleichheit oder Ungleichheit geometriſcher Verhältniſſe wird durch ihre Exponenten beſtimmt, welche man bekanntlich erhält, wenn man das Conſequens durch das Antecedens dividirt. — Alſo bleibt der Werth eines geometriſchen Verhältniſſes ſo lange unverändert, als ſein Exponent der nemliche iſt.

Erklärungen.

1) Das geometriſche Verhältniß heißt rational oder irrational, je nach dem der Exponent q eine Rational- oder Irrationalzahl iſt. (§. 14.)

2) Da in einem geometriſchen Verhältniſſe die Größen durch Diviſion verglichen werden, ſo gelten hier alle Regeln, welche für die Diviſion ganzer und gebrochener Zahlen bisher gegeben wurden.

3) Die in einem rationalen geometriſchen Verhältniſſe ſtehenden Größen heißen commenſurabel, weil ſich die eine Größe b durch die andere a, oder durch einen aliquoten Theil derſelben meſſen läßt. Aus dem entgegengeſetzten Grunde heißen die Größen eines irrationalen Verhältniſſes incommenſurabel; doch kann man jedes irrationale Verhältniß durch Approximation auf ein rationales, und die beiden incommenſurablen Größen auf commenſurable reduciren.

§. 331.

Geſetze der geometriſchen Verhältniſſe.

I. Das geometriſche Verhältniß zweier Zahlen bleibt unverändert, wenn man mit der nemlichen Zahl beide Glieder entweder multiplicirt, oder dividirt. a : b

$$a : b = ax : bx$$

$$a : b = \frac{a}{x} : \frac{b}{x}$$

Denn iſt $\frac{b}{a} = q$. ſo iſt auch $\frac{bx}{ax} = q\frac{x}{x} = q$.

Alſo läßt ſich jedes gegebene Verhältniß, deſſen Glieder Primzahlen ſind, in unendlich vielen größern Formen ausdrücken, wenn man Antecedens und Conſequens durch eine beliebige Zahl multiplicirt.

$$2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 8 : 12 = 2m : 3m.$$

Im Gegentheile kann man ein geometriſches Verhältniß, deſſen Glieder gleichartige Produkte ſind, wenn man ſie durch den größten gemeinſchaftlichen Theiler dividirt, auf die kleinſte Form zurückbringen. (§. 84.)

$$12 : 18 = 2 : 3$$

$$52 : 39 = 4 : 3$$

$$am : bm = a : b.$$

II. Ein geometriſches Verhältniß aus Fractionen läßt ſich in ein anderes gleiches von ganzen Zahlen umſchaffen, wenn man alle Fractionen auf einen gleichen Nenner bringt, und den gemeinſchaftlichen Nenner hinwegläßt; denn Ganze verhalten ſich, wie gleichartige Theile derſelben. Gemiſchte Zahlen verwandelt man zuerſt in einen uneigentlichen Bruch, und bey Decimalen macht man den Nenner ſichtbar.

Alſo 1) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{6} : \frac{4}{6} = 3 : 4.$

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{6}{8} : \frac{7}{8} = 6 : 7.$$

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = ad : bc.$$

2) $1\frac{1}{2} : 3\frac{1}{5} = \frac{3}{2} : \frac{16}{5} = 15 : 32.$

$$0{,}05 : 6 = \frac{5}{100} : 6 = 5 : 600 = 1 : 120.$$

Anmerkung. Das bisher Geſagte hat auch Statt, wenn mehr als zwey Verhältnißzahlen gegeben ſind; nur muß die Veränderung mit jedem Gliede vorgenommen werden; alſo:

α) $5 : 10 : 15 : 20 : 30 = 1 : 2 : 3 : 4 : 6.$

β) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{30 : 40 : 45 : 48}{60} = 30 : 40 : 45 : 48.$

γ) $am : abm^2 : a^2cm^3 = 1 : bm : acm^2.$

Wenn

Wenn nun eine ſolche Reihe von Verhältnißzahlen mit einer andern proportional ſeyn ſoll, ſo muß, wenn man eine Reihe durch die andere dividirt, bey jedem Gliede der nemliche Quotus erſcheinen.

$$\frac{am : abm^2 : a^2cm^3}{1 : bm : acm^2} \ldots \text{Quotus } am.$$

oder $$\frac{1 : bm : acm^2}{am : abm^2 : a^2cm^3} \ldots \text{Quotus } \frac{1}{am.}$$

III. Sind die Verhältnißzahlen ungleich benannte Größen, ſo macht man ſie gleichartig; und dann iſt das Verhältniß ſolcher gleichartigen, durch einerley Maß beſtimmten Größen, dem Verhältniſſe der Zahlen gleich, welche ihnen als Coefficienten voranſtehen.

Alſo: 3 kr. : 1 fl. = 3 kr. : 60 kr. = 3 : 60 = 1 : 20.
1 Baierth. : 1 Laubth. = 144 kr : 165 kr. = 144 : 165 = 48 : 55.

IV. Irrationalzahlen von einerley Wurzel und Größe ſtehen in einem rationalen Verhältniſſe.

$$5\sqrt{3} : 20\sqrt{3} = 5 : 20 = 1 : 4.$$

V. Zu einem gegebenen geometriſchen Verhältniſſe findet man ein gleiches zweytes, von welchem das Antecedens oder Conſequens gegeben ſeyn kann, wenn man mit dem Verhältnißexponenten das Antecedens multiplicirt, oder das Conſequens dividirt.

Z. B. Man habe das Verhältniß : 27 : 45. . .

Sollte man nun mehrere gleiche Verhältniſſe finden, derer Vorderglieder 3, 6, 9, 12 ſeyn ſollten, ſo dürfte man dieſe nur mit dem Verhältnißexponenten $\frac{45}{27} = \frac{5}{3}$ multipliciren.

$$27 : 45 = \begin{cases} 3 : 3 \cdot \frac{5}{3} = 3 : 5 \\ 6 : 6 \times \frac{5}{3} = 6 : 10 \\ 9 : 9 \times \frac{5}{3} = 9 : 15 \\ 12 : 12 \times \frac{5}{3} = 12 : 20. \end{cases}$$

Sollte man aber als Hinterglieder : 25, 30, 35, 40 verlangen, ſo müßten dieſe Größen durch den nemlichen Exponenten $\frac{5}{3}$ dividirt werden.

27 : 45

$$27 : 45 = \begin{cases} 25 \times \frac{3}{5} : 25 = 16 : 25 \\ 30 \times \frac{3}{5} : 30 = 18 : 30 \\ 35 \times \frac{3}{5} : 35 = 21 : 35 \\ 40 \times \frac{3}{5} : 40 = 24 : 40. \end{cases}$$

VI. Alle geometriſchen Verhältniſſe laſſen ſich auf das Verhältniß bloßer Zahlen, und dieſe wieder auf Verhältniſſe ganzer Zahlen reduciren.

Alſo z. B. $\sqrt{2} : \sqrt[3]{3} = 1{,}4142136 : 1{,}4422496$
$= 14142136 : 14422496.$

Anmerkung. 1) Was hier von den geometriſchen Verhältniſſen geſagt wurde, iſt auf die geometriſchen Proportionen ſelbſt anwendbar.

2) Von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen wird §. 336 die Rede ſeyn.

Zweyter Artikel.

Von den geometriſchen Proportionen.

§. 332.

Da der allgemeine Ausdruck jeder geometriſchen Proportion $a : b = aq : bq$ iſt, ſo ergiebt ſich zuvörderſt der wichtige Satz: In jeder (geraden, discreten) geometriſchen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder, dem Produkte der mittlern gleich:

$$a \times bq = b \times aq.$$

Dieſes iſt der Probierſtein aller ächten geometriſchen Proportionen, und das Grundgeſetz, aus dem ſich die übrigen Geſetze natürlich ableiten.

Folgeſätze: I. Um nun zu was immer für einer discreten geometriſchen Proportion aus drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl (x) zu finden, darf man nur das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern Glieder gleich ſetzen, und die bekannten Größen von x durch Diviſion hinwegſchaffen.

a) $5 : 11 = 25 : x$

$$5x = 11 . 25$$

$$x = \frac{11 . 25}{5} = 55.$$

b) $5 : 11 = x : 55$

$$11x = 55 . 5$$

$$x = \frac{55 . 5}{11} = 25.$$

c) $5 : x = 25 : 55$

$$x = \frac{55 . 5}{25} = \frac{11 . 5 . 5}{25} = 11.$$

d) $x : 11 = 25 : 55$

$$x = \frac{11 . 25}{55} = \frac{55 . 5}{55} = 5.$$

II. Wenn das Produkt zweyer Zahlen (z. B. 5, 6) dem Produkte zweyer andern (z. B. 3, 10) gleich iſt, ſo geben dieſe Zahlen eine discrete geometriſche Proportion, wenn man die Factorn des einen Products zu äußern, die des andern zu innern Gliedern macht.

$$3 : 5 = 6 : 10.$$

§. 333.

Satz. Die allgemeine Form der ſtätigen geometriſchen Proportion iſt: $a : aq : aq^2$.

Beweis. Man verwandle die ſtätige Proportion in eine discrete, worin das letzte Glied unbekannt $(= x)$ iſt, und beſtimme dieſes nach §. praec.

$$a : aq = aq : x$$

$$a . x = a^2q^2$$

$$x = \frac{a^2q^2}{a} = aq^2.$$

Alſo: $a : aq = aq : x = a : aq = aq : aq^2$
$= a : aq : aq^2$. (§. 312.)

Folgeſätze. I. In der geometriſchen ſtätigen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern gleich.

a : aq

$$a : aq : aq^2$$
$$a \times aq^2 = (aq)^2$$
$$a^2q^2 = a^2q^2.$$

Daraus erklärt ſich nun von ſelbſt, wie man zu zwey gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl finden könne.

Z. B. 1) $3 : 9 : x$
$$3x = 9^2 = 81$$
$$x = \tfrac{81}{3} = 27.$$

2) $3 : x : 27$
$$x^2 = 81$$
$$x = 9.$$

3) $x : 9 : 27$
$$x = \tfrac{81}{27} = 3.$$

II. Wenn das Produkt zweyer Zahlen eine Quadratzahl giebt, ſo iſt die Wurzel von dieſer die mittlere Proportionalzahl zwiſchen beiden erſten.

Z. B. $4 \times 9 = 36 = 6^2$

Alſo : $4 : 6 : 9.$

§. 334.

Abgeleitete Geſetze der geometriſchen Proportion.

I. In jeder Proportion laſſen ſich die vier Glieder achtmal verſetzen: 1) durch Verwechslung der mittlern und äußern Glieder (permutando); 2) durch Umkehrung der Verhältniſſe (invertendo).

$$\left.\begin{array}{l} a : b = aq : bq \\ a : aq = b : bq \\ bq : aq = b : a \\ bq : b = aq : a \end{array}\right\}\ \text{permutando.}$$

$$b : a = bq : aq \quad \text{invertendo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : bq = a : aq \\ aq : bq = a : b \\ aq : a = bq : b \end{array}\right\}\ \text{permutando.}$$

Beweiſ.

Beweis. In allen dieſen Formen iſt das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittleren gleich $abq = abq$.

II. In jeder Proportion verhält ſich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu ſeinem Hinterglied.

$$a : b = aq : bq$$

$$a \pm aq : b \pm bq = a : b = aq : bq.$$

Denn $(a \pm aq) b = (b \pm bq) a$. Oder permutando, et componendo vel differentiando.

$$(a \pm b) : (aq \pm bq) = b : bq = a : aq.$$

III. Wenn man in einer Proportion ein oder beide Verhältniſſe, oder jedes Paar homologer Glieder, — oder überhaupt ein äußeres und ein inneres Glied — durch die nemliche Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo ſtehen die Produkte oder die Quotienten noch in einer Proportion zu einander.

Wenn $a : b = aq : bq$ . . ſo iſt

1) $am : bm = aq : bq.$

2) $am : bm = amq : bmq.$

3) $am : b = amq : bq.$

4) $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{aq}{m} : \frac{bq}{n}.$

Beweis. In allen dieſen Proportionen iſt α) der Exponent beyder Verhältniſſe der nemliche, und β) das Produkt der äußern Glieder dem der mittlern gleich.

IV. Eine Proportion, worin ein Glied, oder einige, oder alle aus gebrochenen Zahlen beſtehen, läßt ſich ihres Werthes unbeſchadet in eine andere von ganzen Zahlen umſchaffen, wenn man die Nenner der mittlern Glieder als Factorn zu den äußern, und die Nenner der äußern Glieder als Factorn zu den mittlern ſetzt. Ueberhaupt betrachte man die innern Glieder als Dividend, die äußern als Diviſor, und wende alle Vortheile in der Operation

an,

an, welche ſich bey der Diviſion ganzer und gebrochener Zahlen anwenden laſſen.

$$\frac{a}{x} : \frac{b}{y} = \frac{c}{u} : \frac{d}{z}$$

$$ay : bx = cz : du. \quad (\S.\ 331.\ \text{II.})$$

oder $au : bz = cx : dy$; in beiden Fällen iſt $aduy = cbxz$.

V. Die Proportion bleibt, wenn man alle Glieder derſelben zu gleichen Würden erhebt, oder daraus gleiche Wurzeln zieht. Z. B. $a : b = aq : bq$.

Alſo: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{aq} : \sqrt{bq}$.

$$a^m : b^m = (aq)^m : (bq)^m.$$

und wenn $a : b = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$, ſo ergiebt ſich

$$a^m : b^m = c : d.$$

Beweis. 1) Wenn $a : b = aq : bq$

ſo iſt: $abq = abq$.

alſo auch $\sqrt{abq} = \sqrt{abq}$.

oder: $\sqrt{a} \times \sqrt{bq} = \sqrt{b} \times \sqrt{aq}$ (alſo nach §. 332. II.)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{aq} : \sqrt{bq}.$$

2) Wenn $a : b = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$,

ſo iſt auch $a . \sqrt[m]{d} = b . \sqrt[m]{c}$; folglich zu m potenzirt

$$a^m \sqrt[m]{d^m} = b^m \sqrt[m]{c^m}$$

$$a^m . d = b^m . c$$

$$\overline{a^m : b^m = c : d.}$$

§. 335.

Wenn man die homologen Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen durcheinander multiplicirt oder dividirt, ſo bleiben auch die Produkte proportional.

$$a : b = aq : bq$$

$$c : d = cm : dm$$

$$\overline{ac : bd = acmq : bdmq.}$$

$$\begin{array}{l} 2 : 3 = 6 : 9 \\ 5 : 6 = 10 : 12 \\ \hline 10 : 18 = 60 : 108 \text{ u. ſ. w.} \end{array}$$

Ferner:
$$\begin{array}{l} a : b = aq : bq \\ c : d = cm : dm \\ g : h = gn : hn \\ \hline acg : bdh = acgmnq : bdhmnq. \end{array}$$

Hieraus fließen denn wieder folgende Geſetze:

I. Wenn in zwey Proportionen zwey gemeinſchaftliche Glieder vorkommen, ſo ſind die übrigen ebenfalls proportional.

1) Wenn die beiden gemeinſchaftlichen Glieder das erſte oder zweite Verhältniß ausmachen.

α) $$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : b = g : h \text{ ſo iſt ex aequo simpliciter} \\ \hline c : d = g : h. \end{array}$$

β) $$\begin{array}{l} m : n = o : p \\ x : y = o : p. \\ \hline m : n = x : y. \end{array}$$

Denn zwey Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich.

2) Wenn die gemeinſchaftlichen Glieder homolog ſind.

α) $$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ g : a = h : c \\ \hline ag : ab = hc : cd; \text{ und nach §. 334. III.} \\ g : b = h : d. \text{ d. i. ordinatim et ex aequo.} \end{array}$$

β) $$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ b : g = d : h \\ \hline ab : bg = cd : dh \\ a : g = c : h. \text{ aus dem nemlichen Grunde.} \end{array}$$

3) Wenn die gemeinſchaftlichen Glieder die äußern oder mittlern ſind.

α) $$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ g : a = d : h \text{ ſo wird perturbate et ex aequo} \\ \hline g : b = c : h. \end{array}$$

$$\beta)\quad \begin{array}{l} a : b = c : d \\ b : g = h : c \\ \hline a : g = h : d. \end{array}$$

II. Wenn in zwey Proportionen zwey homologe Glieder gleich ſind, ſo ſtehen das Antecedens und Conſequens derſelben in dem Verhältniſſe, in welchem die Produkte der übrigen zwey Verhältniſſe ſtehen.

$$\text{Z. B.}\quad \begin{array}{l} C : c = E : V \\ T : t = V : e \\ \hline CT : ct = E : e. \end{array}$$

§. 336.

Dieſes führt uns auf die Lehre von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen. Man heißt aber ein zuſammengeſetztes Verhältniß, (z. B. E. : e. §. praec.) dasjenige, welches durch die Multiplication zweyer oder mehrerer anderer entſtanden iſt. Eine Proportion, welche aus ſolchen zuſammengeſetzten Verhältniſſen beſteht, heißt dann eine zuſammengeſetzte Proportion. — Man habe z. B. die Proportionen:

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ f : g = d : h \\ l : m = h : n \\ o : p = n : q \\ \hline aflo : bgmp = cdhn : dhnq. \\ \qquad\qquad = c : q. \end{array}$$

Das heißt: wenn mehrere Verhältniſſe von der Art ſind, daß immer das Hinterglied in einem Verhältniſſe das Vorderglied im folgenden wird, ſo iſt das Verhältniß des erſten Gliedes zum letzten aus allen dieſen zuſammengeſetzt.

Man pflegt ſolche zuſammengeſetzte Proportionen manchmal auch ſo auszudrücken:

$$(C : c) + (T : t) = E : e.$$

$$(a : b) + (f : g) + (l : m) + (o : p) = c : q.$$

Wo dann das Zeichen + keine Addition, ſondern eine Zuſammenſetzung der Verhältniſſe anzeigt, d. i. daß die homologen Glieder durcheinander zu multipliciren ſeyen.

Bey-

Beyſpiele I. Zwey Flächen A und B verhalten ſich wie die Produkte aus ihren Längen und Breiten.

Es habe A zur Länge 300, zur Breite 240 Fuß.
B — — 250 — — 180 Fuß:
ſo iſt das Verhältniß von

$$\begin{aligned} A : B &= 300 \times 240 : 250 \times 180 \\ &= (300 : 250) + (240 : 180) \\ &= 6 \times 24 : 5 \times 18 \\ &= 1 \times 24 : 5 \times 3 \\ &= 1 \times 8 : 5 \times 1 = 8 : 5. \end{aligned}$$

II. Der Kubikinhalt zweyer Größen, z. B. zweyer Zimmer, C, D verhält ſich gegen einander wie die Produkte aus Länge, Breite, Höhe.

C ſey 16 Fuß hoch, 28 lang, 20 breit
D ſey 18 — — 25 — 21 breit; ſo ergiebt ſich

$$\begin{aligned} C : D &= 16.28.20 : 18.25.21 \\ &= (16:18) + (28:25) + (20:21) \\ &= 128 : 135. \end{aligned}$$

§. 337.

Aus den zuſammengeſetzten Verhältniſſen gehen noch insbeſondere die vervielfältigten hervor; wenn nemlich in drey gleichen Verhältniſſen das Conſequens des erſten, das Antecedens im zweyten — und das Conſequens des zweyten Verhältniſſes das Antecedens des dritten iſt, d. h.

wenn: $a : b = x : y$
$b : c = x : y$
$c : d = x : y$ ſo ergiebt ſich

I. $a : c = x^2 : y^2$.

Man nennt ein aus zwey gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetztes ein duplicirtes, oder quadratiſches.

II. $a : c = x^2 : y^2$
$\sqrt{a} : \sqrt{c} = x : y$.

Dieſes Verhältniß $x : y$ heißt in Anſehung des duplicirten $a : c$ ein ſubduplicirtes.

III. $a : d = x^3 : y^3$. —

d. i. a ſteht zu d in einem triplicirten oder kubiſchen Verhältniſſe.

IV. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d} = x : y$.

Das Verhältniß x zu y iſt in Anſehung des triplicirten a : d ein ſubtriplicirtes.

§. 338.

Aufgaben über Proportionen, worin vervielfältigte Verhältniſſe vorkommen.

I. Kreisflächen verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer (oder auch Halbmeſſer):

$$C : c = D^2 : d^2.$$

Wenn nun ein Kirchenrundel, deſſen Durchmeſſer 40 Fuß iſt, ungefähr 830 Menſchen faßt; welches iſt die Capacität eines andern Rundels, das 100 Fuß im Durchmeſſer hat?

Auflöſung. $40^2 : 100^2 = 830 : x$

$$x = \frac{830 \times 10000}{1600} = 5187 \text{ Menſchen.}$$

II. Die Gewichte der Kugeln (von einerley Materie) verhalten ſich, wie die Kubuſſe ihrer Durchmeſſer:

$$P : p = D^3 : d^5.$$

Wenn nun eine Kugel, deren Durchmeſſer 2 Zoll iſt, 5 Pfund wiegt; wie ſchwer muß eine andere Kugel ſeyn, welche 6 Zoll im Durchmeſſer hat?

Auflöſung. $2^3 : 6^3 = \overset{℔}{5} : \overset{℔}{x}$

$$x = \frac{5 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^3} = 27 \cdot 5 = 135 ℔.$$

III. Die Preiſe der Diamanten verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Gewichte. $A : a = P^2 : p^2$.

Wenn nun ein Diamant, welcher einen Karath ſchwer iſt, 5 fl. gilt. Welches wird der Werth jenes berühmten Diamants von 1680 Karath ſeyn, welchen der König von Braſilien beſitzt?

Auf-

Aufloͤſung. $1^2 : 1680^2 = 5$ fl. : x fl.

$$x = 2822400 \times 5 = 14'112.000 \text{ fl.}$$

IV. Die Raͤume freyfallender Koͤrper verhalten ſich wie die Quadrate der Fallzeiten. Nun faͤllt ein freygelaſſener Koͤrper in der erſten Sekunde 15,597 rheiniſche, oder ungefaͤhr 16 baieriſche Fuß. Wie viele Sekunden braucht ein Stein, um von einer Hoͤhe von 6000 baieriſchen Fuß herabzufallen?

Aufloͤſung. Heißt man die Raͤume S, und s, die Zeiten T und t, ſo erhaͤlt man

$$s : S = t^2 : T^2;$$

oder auch: $\sqrt{s} : \sqrt{S} = t : T$ (§. 337. II.)

Da nun $s = 16$. $t = 1$. $T = x$. $S = 6000$

ſo hat man: $\sqrt{16} : \sqrt{6000} = 1 : x$

$$x = \sqrt{375} = 19{,}365 \text{ Sekunden.}$$

V. Die Staͤrke des Lichtes nimmt in dem Verhaͤltniſſe ab, als das Quadrat der Entfernung des zu beleuchtenden Koͤrpers zunimmt. Wenn nun zwey Kerzen ein Bild in einer Entfernung von 5 Fuß hinlaͤnglich erleuchten: auf wie viele Fuß Entfernung wird man das nemliche Bild bey 128 Kerzen noch eben ſo deutlich ſehen?

Aufloͤſung. $l : L = e^2 : E^2$

$$\sqrt{l} : \sqrt{L} = e : E$$

$$\sqrt{2} : \sqrt{128} = 5 : x.$$

$$x = 5\sqrt{\tfrac{128}{2}} = 5\sqrt{64} = 40 \text{ Fuß.}$$

VI. Die Kraft, mit welcher die magdeburgiſchen Halbkugeln, aus denen die Luft ſo viel moͤglich herausgepumpt iſt, zuſammenhalten, verhaͤlt ſich, wie die Quadrate der Durchmeſſer (oder auch Zirkelflaͤchen) dieſer Kugeln. — Wenn nun zwey ſolche Halbkugeln, bey einem Durchmeſſer von 6 Zollen, mit einer Kraft von $428\frac{3}{4}$ Pfund zuſammenhalten: Wie ſtark werden dieß zwey andere Kugeln thun, derer Durchmeſſer 12 Zolle iſt?

Auf-

Aufløſung. $d^2 : D^2 = v : V$

$$6^2 : 12^2 = 428\tfrac{3}{4} : x$$

$$x = \frac{144 \times 1715}{4 \times 36} = 1715 \text{ Pfund.}$$

VII. Ein Uhrpendel, das in einer Sekunde eine Schwingung machen ſoll, muß 440,5 pariſer Linien lang ſeyn. Welches muß die Länge eines andern Pendels ſeyn, das in einer Sekunde zweymal ſchwingt? — Es verhalten ſich aber die Schwingungszeiten, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen,

d. i. $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

alſo auch: $t^2 : T^2 = l : L$.

$$1 : \tfrac{1}{4} = 440{,}5 : x$$

$$x = 110{,}125 \text{ pariſer Linien.}$$

* Die übrigen zuſammengeſetzten Verhältniſſe, welche nach der gemeinen Regel fortgehen, kommen in der praktiſchen Rechenkunſt vor.

§. 339.

Wenn mehrere Verhältniſſe einander gleich ſind, ſo verhält ſich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu ſeinem Hinterglied.

d. i. wenn $a : b = c : d = f : g = h : l$

ſo iſt $(a+c+f+h) : (b+d+g+l) = a : b = c : d \ldots$

Der Beweis folgt aus §. 334. II.

$$a : b = c : d$$

$(a+c) : (b+d) = f : g$. nach der Vorausſetzung

$$(a+c+f) : (b+d+g) = h : l$$

$$(a+c+f+h) : (b+d+g+l) = h : l = f : g = c : d = a : b.$$

Denn wenn zwey Verhältniſſe einem dritten gleich ſind, ſind ſie auch unter ſich gleich.

Auf dieſem Satze beruht nun die ſogenannte Diviſion in verhältnißmäßige Theile. Z. B. Es ſoll die Zahl S in vier Theile getheilt werden, welche ſich verhalten, wie a, b, c, d. — So ſetze man, dieſe Theile ſeyen v, x, y, z. folglich nach §. 331. II. Anm.

v : x

$\frac{v:x:y:z}{a:b:c:d} = q$. alſo auch: $a:v = b:x = c:y = d:z$.

Mithin $(a+b+c+d):(v+x+y+z) = a:v = b:x$ u. ſ. w.

Da nun $v+x+y+z = S$. nach der Vorausſetzung, ſo wird

$$(a+b+c+d):S = \begin{cases} a:v \\ b:x \\ c:y \\ d:z. \end{cases}$$

d. h. Die Summe aller Verhältnißzahlen verhält ſich zur Summe aller Theile, als wie jede einzelne Verhältnißzahl zu ihrem entſprechendem Theile.

Dritter Artikel.

Von den geometriſchen Progreſſionen.

§. 340.

Geometriſche Progreſſion heißt man eine Reihe von Zahlen, von welchen jede nächſtfolgende durch die vorhergehende dividirt, einen gleichen Quotus giebt. Iſt nun das erſte Glied $= a$, der Quotus oder Exponent $= q$ (welcher bey einer ſteigenden Progreſſion größer als 1, bey einer fallenden aber ein eigentlicher Bruch ſeyn muß), ſo iſt der allgemeine Ausdruck einer geometriſchen Reihe:

$$\begin{matrix} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} & \text{VI.} & \text{VII.} \\ a, & aq, & aq^2, & aq^3, & aq^4, & aq^5, & aq^6 \ldots\ldots \end{matrix}$$

Da nun die geometriſche Progreſſion nur eine fortgeſetzte ſtätige Proportion iſt, ſo müſſen jedesmal drey, unmittelbar auf einander folgende, Glieder wieder eine ſtätige geometriſche Proportion geben.

Z. B. $a : aq : aq^2$

$aq : aq^2 : aq^3$

$aq^2 : aq^3 : aq^4$ u. ſ. w.

§. 341.

§. 341.

Betrachtet man dieſe Reihe etwas genauer, ſo findet man

1) daß in jedem Gliede derſelben das erſte Glied a vorkomme, multiplicirt mit einer Würde von q, deren Exponent ſo viele Einheiten enthält, als Glieder vorhergehen.

Deßwegen iſt das erſte Glied $aq^0 = a$.

2) Daß, wenn p die Anzahl der Glieder bedeute, wo die Reihe abgebrochen wird, das allgemeine Glied seyn müſſe: $a \times q^{p-1}$.

3) Daß, wenn die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a \times q^{n-1} \text{ werde.}$$

Folglich auch $a = \frac{z}{q^{n-1}}$ und $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$.

* Der Werth für n läßt ſich nur mit Hülfe der Logarithmen beſtimmen.

Der vollſtändige Ausdruck der geometriſchen Progreſſion iſt alſo: $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 \ldots aq^{n-2}, aq^{n-1}$.

§. 342.

In jeder geometriſchen Progreſſion ſind die Produkte des erſten und letzten, und überhaupt je zweyer, von dem erſten und letzten Gliede gleich weit abſtehender Glieder gleich, und laſſen ſich folglich in eine Proportion ſtellen.

$$\begin{array}{l} a, \quad aq, \quad aq^2 \ldots\ldots aq^{n-3}, aq^{n-2}, aq^{n-1} \\ aq^{n-1}, aq^{n-2}, aq^{n-3} \ldots\ldots aq^2, \quad aq, \quad a \\ \hline a^2q^{n-1}, a^2q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Anmerkung. Wenn man die allgemeine Formel geometriſcher Reihen durch das erſte Glied dividirt, ſo erhält man: $1, q, q^2, q^3, q^4 \ldots q^{n-2}, q^{n-1}$, worin alſo alle Glieder Potenzen des zweyten Gliedes ſind, übrigens aber das geometriſche Verhältniß nicht geſtört iſt.

§. 343.

§. 343.

Satz. Die Summe jeder geometriſchen Reihe iſt:

$$S = \frac{q.Z - a}{q - 1.}$$

Beweis. Man multiplicire die Reihe: a, aq, aq^2, aq^3 ... aq^{n-1} noch mit dem Exponenten q, und ziehe von dieſem Produkte die erſte einfache Reihe ab. Heißt nun die Summe der einfachen Reihe = S, ſo iſt die Summe der mit q multiplicirten = qS.

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$
$$qS = \quad + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n.$$

Zieht man nun die obere Summe von der untern ab, ſo erhält man:

$$qS - S = aq^n - a$$

zerfällt $S(q-1) = aq^n - a$

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1.}$$

Nun aber iſt $aq^n = aq^{n-1} \times q = Z \times q$ (§. 341.) alſo ſubſtituirt:

$$S = \frac{q.Z - a}{q - 1.}$$

Anmerkung. Zu dem nemlichen Reſultate gelangt man auch auf folgendem Wege:

Da in einer geometriſchen Reihe alle Verhältniſſe (der Ordnung nach) gleich ſind,

d. i. $a : aq = aq : aq^2$
$aq^2 : aq^3 = aq^3 : aq^4$ u. ſ. f.

ſo verhält ſich die Summe aller Vorderglieder, zur Summe aller Hinterglieder wie das erſte zum zweiten u. ſ. w. (§. 341.)

Nun ſind in einer geometriſchen Reihe alle Glieder, außer dem letzten, Vorderglieder; und alle Glieder, außer dem letzten, Hinterglieder. — Es iſt alſo die Summe aller Vorderglieder . . . . = S — Z

die Summe aller Hinterglieder = S — a.

folg.

folglich: $(S-z):(S-a) = a : aq$
$= 1 : q$

$$Sq - qZ = S - a$$
$$Sq - S = qz - a$$
$$S(q-1) = qz - a$$
$$S = \frac{qz-a}{q-1} \text{ oder auch } \frac{a.q^n - a}{q-1}.$$

§. 344.

Der allgemeine Ausdruck für die Summation geometriſcher Reihen iſt zunächſt für die ſteigenden Reihen berechnet; er paßt aber auch für die fallenden, wenn man nur $\frac{a.q^n-a}{q-1}$ in $\frac{-a.q^n+a}{-q+1} = \frac{a-aq^n}{1-q}$ oder $= \frac{a-qz}{1-q}$ verwandelt, welches geſchieht, wenn man Zähler und Nenner mit -1 multiplicirt; oder wenn man die Reihe qS (§. praec.) als die kleinere, weil q ein eigentlicher Bruch iſt, von der größern Reihe S abzieht u. ſ. w.

Nähere Prüfung der letzten Formel.

In dem Ausdrucke $\frac{a-aq^n}{1-q}$ liegt wirklich das ganze Geſetz einer geometriſchen Progreſſion. Man ſetze $(a-aq^n) = a(1-q^n)$.. folglich
$\frac{a-aq^n}{1-q} = a\frac{(1-q^n)}{1-q}$. Man dividire nun:

$$\frac{1-q^n}{(1-q)} \mid 1+q+q^2+q^3 \ldots\ldots q^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\overset{-}{}1 \overset{-}{+} q} \\ \quad (1-q) \\ \quad \underline{\overset{-}{}q \overset{-}{+} q^2} \\ \qquad (1-q) \\ \qquad \underline{\overset{-}{}q^2 \overset{-}{+} q^3} \\ \qquad\quad (1-q) \\ \qquad\quad \underline{\overset{-}{}q^3 \overset{-}{+} q^4} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots q^{n-1} - q^n \\ \qquad\qquad\quad (1 - q) \\ \qquad\qquad\quad \underline{\overset{-}{}q^{n-1} \overset{-}{+} q^n} \\ \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

Wenn

Wenn nun: $\frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+q^3 \ldots + q^{n-1}$

ſo iſt auch $\frac{(1-q^n)}{1-q} a = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$.

§. 345.

Aus der Formel $S = \frac{qZ-a}{q-1}$ laſſen ſich wieder drey Werthe für Z, q, und a finden. — Ueberhaupt erhält man, analog mit §. 323, aus den fünf Stücken a, q, n, Z, S folgende zwanzig Formeln.

Nro.	Zu ſuchen.	Gegeben iſt.	Formeln.
I.	a.	z. q. n.	$\frac{Z}{q^{n-1}}$
II.		z. q. S.	$Zq - S \times (q-1)$
III.		q. n. S.	$\frac{S \times (q-1)}{q^n - 1}$
IV.		z. n. S.	$a.(S-a)^{n-1} - Z.(S-Z)^{n-1} = 0$
V.	z.	a. q. n.	aq^{n-1}
VI.		a. q. S.	$\frac{a + S.(q-1)}{q}$
VII.		n. q. S.	$\frac{(Sq - S).q^{n-1}}{q^n - 1}$
VIII.		a. n. S.	$Z.(S-Z)^{n-1} - a.(S-a)^{n-1} = 0$

Nro.

Nro.	Zu ſuchen.	Gegeben iſt.	Formeln.
IX.	q.	a. z. n.	$\text{Log.}\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{\text{Log.}\frac{z}{a}}{n-1}$
X.		a. z. S.	$\frac{S-a}{S-z}$
XI. *)		z. n. S.	$q^n - \frac{S}{S-z} \times q^{n-1} + \frac{z}{S-z} = 0$
XII.		a. n. S.	$q^n - \frac{q}{a} \times S + \frac{S}{a} - 1 = 0$
XIII	n.	a. z. q.	$1 + \frac{\text{Log.}\frac{z}{a}}{\text{Log.}\,q.}$
XIV.		S. z. q.	$1 + \left(\text{Log.}\frac{z}{S-q.(S-z)}\right) : \text{Log.}\,q$
XV.		a. S. q.	$\text{Log.}\left(1 + S \times \frac{q-1}{a}\right) : \text{Log.}\,q$
XVI.		a. z. S.	$1 + \left(\text{Log.}\frac{z}{a}\right) : \left(\text{Log.}\frac{S-a}{S-z}\right)$

Nro.

*) Dienlicher iſt vielleicht folgende Formel:

$$\frac{S}{S-z} - q - \frac{q-1}{q^{n-1}-1} = 0; \text{ denn}$$

aus $\frac{S}{S-z} = q + \frac{q-1}{q^{n-1}-1}$ kann q ohne viele Mühe entweder ganz, oder bis auf einen höchſt geringen Fehler gefunden werden.

Nro.	Zu ſuchen.	Gegeben iſt.	Formeln.
XVII.		a. z. q.	$\frac{zq-a}{q-1}$
XVIII.	S.	n. z. q.	$\frac{z}{q^{n-1}} \times \frac{q^n-1}{q-1}$
XIX.		a. n. q.	$\frac{a\times(q^n-1)}{q-1}$
XX.		a. n. z.	$\frac{z\sqrt[n-1]{z}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z}-\sqrt[n-1]{a}}$

§. 346.

Aufgaben.

I. Ein Gläubiger machte mit ſeinem Schuldner den Vertrag, daß dieſer im erſten Jahre nur zwey Gulden, in jedem nächſten aber dreimal ſo viel, als im vorhergehenden, bezahlen ſollte. Nach Verlauf von 8 Jahren war die ganze Schuld getilgt. Was hatte ſie betragen?

Auflöſung. Hier iſt a=2. q=3. n=8; folglich

$$S = \frac{2\times3^8-2}{2} = \frac{13.120}{2} = 6560 \text{ fl.}$$

II. Wenn man ein Körnlein Weizen ausſäet, und dieſes 10 Körnlein; und jedes von dieſen ausgeſäet, jährlich wieder 10 Körnlein bringt. Wie viele Körnlein giebt dieß im zwölften Jahre?

Auflöſung. $z = 1 \times 100000'000.000$ Körnlein im zwölften Jahre.

Folglich in zwölf Jahren: 111.111'111.111 Körnlein.

III. Wenn der Erfinder des Schachſpiels für das erſte Quadratchen einen Heller, für jedes folgende aber das Zweifache des vorhergehenden ſich ausbedungen hätte: Wie viele Gulden würde die Summe betragen haben?

Auf-

Auflöſung.

$$S = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 18'''446.744''073.709'551.615 \text{ Hl.}$$

$$= 38.430''716.820'228.232 \text{ fl. } 3 \text{ kr. } 1 \text{ hl.}$$

Anmerkung. Nimmt man an, daß hundert Perſonen, ohne Unterlaß, in jeder Sekunde jede Perſon 10 Karolinen bezahlte, ſo würden ſie über 108.716 Jahre zu zahlen haben! —

IV. Welches iſt die Summe einer geometriſchen Reihe, deren erſtes Glied 81, das neunte und letzte Glied $\frac{1}{81}$, und der Exponent $\frac{1}{3}$ iſt?

Auflöſung. Da die Reihe abnehmend iſt, ſo wird

$$S = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{81 - 81 \times \frac{1}{81} \times \frac{1}{243}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{80 + \frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} = \frac{(80 + \frac{242}{243})3}{2} = 121 \tfrac{40}{81}.$$

V. Welches iſt das erſte Glied einer geometriſchen Reihe, worin $q = 2$. $n = 12$. $S = 409.500$ iſt?

Auflöſung. Nach Formel III.

$$a = \frac{S(q-1)}{q^n - 1} = \frac{409500}{4096-1} = 100.$$

Vierter Artikel.

Von der Summation der unendlichen abnehmenden Reihen.

§. 347.

Eine geometriſche Reihe, deren Exponent eine eigentliche Fraction iſt, und deren letztes Glied nicht dargeſtellt werden kann, heißt eine unendliche abnehmende Reihe.

Z. B. Es ſey das erſte Glied 1, der Exponent $\frac{1}{2}$ und $n = \infty$.

So erhält man: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$

oder wenn $a = 1$. $q = \frac{1}{3}$. $n = \infty$.

So ergiebt ſich: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$.

Erklä-

Erklärung. Da eine ſolche abnehmende Reihe ohne Aufhören fortläuft, und der Werth der Glieder in eben dem Verhältniſſe abnimmt, als viele Glieder genommen werden; ſo muß man das ∞^{te} oder n^{te} Glied als etwas unendlich Kleines annehmen. Denn da $z = aq^{n-1} \ldots q$ aber, nach der Vorausſetzung eine eigentliche Fraction, alſo $= \frac{1}{\pi}$, und $n = \infty$ iſt: So wird $z = \frac{a}{\pi^\infty}$, d. i. der Nenner π muß unendlich oft mit ſich ſelbſt multiplicirt werden. Alſo $Z = \frac{1}{\infty} =$ unendlich klein.

Es iſt aber ein Lehrſatz der höhern Mathematik, daß unendlich kleine Größen in Beziehung auf endliche verſchwinden, d. i. $= 0$ ſeyen.

Alſo $a \pm \frac{1}{\infty} = a.$

Die allgemeine Formel für die abnehmenden geometriſchen Reihen

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

modificirt ſich alſo, wenn $n = \infty$, und $q = \frac{1}{\pi}$ iſt, für die unendlichen abnehmenden, in dieſe

$$\Sigma = \frac{a - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{a}{1 - \frac{1}{\pi}}.$$

Man iſt alſo dadurch in den Stand geſetzt, die Summe jeder ſolchen unendlichen Reihe zu finden.

§. 348.

Aufgaben.

I. Die Summe der Reihe: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$ zu finden.

Auflöſung. Hier iſt $a = 1$, $\pi = 2$.

$$\text{Alſo } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

II. Die Summe der Reihe: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \ldots \frac{1}{\infty}$ zu finden.

Auf-

Aufløſung. Hier iſt $a = 1.\ \pi = 3.$

$$\text{Alſo } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}.$$

III. Die Summe einer Reihe zu finden, worin das erſte Glied a, der Exponent $\frac{b}{c}$ — ſo daß $b < c$ — und $n = \infty$ iſt.

Aufløſung. $\Sigma = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots\ldots$

(Hier iſt $\pi = \frac{c}{b} \ldots$ alſo $\frac{1}{\pi} = \frac{b}{c}$)

$$\text{alſo } \Sigma = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}.$$

Anmerkung. Sollten die Zeichen der Glieder wechſeln, wie z. B. in der Reihe:

$$A - \frac{Ax}{y} + \frac{Ax^2}{y^2} - \frac{Ax^3}{y^3} + \frac{Ax^4}{y^4} \ldots;$$

ſo ſetze man $\pi = -\frac{y}{x}$, alſo $\frac{1}{\pi} = -\frac{x}{y}$; und die Summe wird ſeyn: $\Sigma = \frac{A}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{Ay}{y + x}.$

§. 349.

Zu den unendlichen abnehmenden geometriſchen Reihen gehören auch die unendlichen Decimalbrüche (§. 130), derer Natur hier näher zu unterſuchen iſt.

1. Man habe den unendlichen Decimalbruch:

0,333333 ......

Dieſer läßt ſich auch ſo darſtellen:

$$\tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{3}{1000} + \tfrac{3}{10000} + \ldots\ldots$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1}{10} + 3 \cdot (\tfrac{1}{10})^2 + 3 \cdot (\tfrac{1}{10})^3 + 3 \cdot (\tfrac{1}{19})^4 \ldots\ldots$$

Hier iſt offenbar $a = 0{,}3 \ldots \frac{1}{\pi} = \frac{1}{10}.$

$$\text{Alſo: } \Sigma = \frac{0{,}3}{1 - \frac{1}{10}} = \tfrac{3}{10} \times \tfrac{10}{9} = \tfrac{3}{9} = \tfrac{1}{3}.$$

Nehme

Nehme ich zwey Ziffer als erſtes Glied, ſo wird $a = 0{,}33 \ldots$ folglich $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{100}$.

Denn $0{,}3333 \ldots$ iſt auch

$$= 0{,}33 + 0{,}33 \times \frac{1}{10^2} + 0{,}33 \times \frac{1}{10^4} \ldots\ldots$$

So ergiebt ſich $\Sigma = \frac{0{,}33}{1 - 0{,}01} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$ u. ſ. f.

II. Man habe den unendlichen Decimalbruch $0{,}272727$

$$= 0{,}27 + 0{,}27 \times \frac{1}{100} + 0{,}27 \times \frac{1}{100^2} + \ldots.$$

So iſt $a = 0{,}27$.

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}01.$$

Folglich: $\Sigma = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Stellt man allgemein die immer wiederkehrenden Ziffer durch $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ vor, ſo iſt der Werth des Decimalbruches:

$$0{,}\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{10^n - 1}$$

wo n die Anzahl der wiederholten Ziffer anzeigt.

III. Man habe endlich den Decimalbruch $0{,}41666\ldots$: Hier beginnt der unendliche Decimalbruch offenbar erſt mit der dritten Zifferſtelle... $0{,}006666\ldots.$

Alſo iſt $a = 0{,}006$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}1.$$

Folglich $\Sigma = \frac{0{,}006}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}006}{0{,}9} = \frac{6}{900}$.

Addirt man dazu noch: $\frac{41}{100} \ldots$ ſo wird

$$\frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{369 + 6}{900} = \frac{375}{900} \overset{75}{=} \frac{5}{12}.$$

Anmerkung. Es geht aus der Natur der Dekadik hervor, daß jede gemeine Fraction, deren Nenner ein Produkt aus einem rationalen Factor 2^n, 5^n, 10^n, und einem irrationalen (im Bezuge auf 1000...) z. B. 3, 7, 11, 13, 17 iſt, wenn man ſie in einen Decimalbruch verwandelt, (d. i. Zäh-

 ler

ler und Nenner mit einer gemeinſchaftlichen Zahl multiplicirt, welche den Nenner in eine Würde von 10^n verwandelt), einen doppelten Decimalbruch giebt, einen endlichen, und einen unendlichen. Und zwar muß der endliche zuerſt kommen, weil er von einem rationalen Factor erzeugt wird. Der unendliche kann ſchon ſeinem Begriffe zu Folge nur zuletzt ſtehen.

Z. B. Es ſey $\frac{1}{6}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln; ſo erhält man: 0,16666....

Nun iſt $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{2}{30} \ldots$ Hier iſt der rationale Theiler, welcher den endlichen Decimalbruch erzeugt, 10, der irrationale aber 3, welcher erſt bei der zweiten Decimalſtelle beginnt; denn $\frac{2}{30} = 0{,}0666\ldots\ldots$

Nennt man nun allgemein den endlichen Decimalbruch 0,ABCD...., den unendlichen aber, wie oben $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma\ldots$ ſo iſt der Werth eines Decimalbruches nach dem dritten Geſetze (§. §. 130, 132) 0,ABCD... $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma\ldots.$

$$\Sigma = \frac{ABCD\ldots}{10^m} + \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{(10^n - 1)10^m},$$ wo m die Zahl der Zifferſtellen im endlichen Decimalbruche, n aber die der wiederkehrenden Ziffer im unendlichen Decimalbruche bezeichnet.

Drittes Hauptſtück.

Von den Logarithmen.

Vorbegriffe.

§. 350.

Jede poſitive, ſowohl ganze, als gebrochene Zahl — die Einheit (1) ausgenommen — kann, wenn ſie ſtuffenweiſe zu allen möglichen Potenzen, ſowohl mit ganzen, als gebrochenen Exponenten, erhoben wird, den Werth jeder andern Zahl erlangen, ſo groß oder klein dieſe immer ſeyn mag.

Erklärung. I. Es ſey eine ſolche Zahl allgemein B. Man

Man ſchreibe nun drey Zahlenreihen L, M, N, Glied für Glied untereinander.

1) Die Reihe L ſey eine arithmetiſche Progreſſion, in welcher $a = 0.$ $d = 1.$

2) Die Reihe M ſey eine geometriſche Progreſſion $a = 1.$ $q = B \ldots$ oder auch $a = B.$

3) Die Reihe N endlich ſey die nemliche geometriſche Progreſſion, aber in einer beſtimmten Zahl ausgedrückt, z. B. $B = 2.$

L... $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots n$

M... $B^0, B^1, B^2, B, B^4, B^5, B^6 \ldots B^n$

N $\begin{cases} \ldots 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots 2^n \\ \ldots 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 \ldots 2^n. \end{cases}$

II. Man ſieht hier offenbar, daß die Zahl 2 den Werth der Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32 u. ſ. w. annehmen könne, wenn man ſie zu den Potenzen: 0, 1, 2, 3, 4, 5... erhebt.

Aber auch den Werth der Zahlen 3, 5, 6, 7, 9... wird die nemliche Zahl 2 erlangen können, wenn man bedenkt, daß zwiſchen der erſten und zweiten, zweiten und dritten Potenz, noch unendlich viele Mittelpotenzen mit gebrochenen Exponenten Statt haben.

III. Die Zahlen in der Reihe L, welche mit den Exponenten von B (und hier von 2) einerley ſind, beſtimmen die Anzahl der Verhältniſſe (Λόγων ἀριθμόν) für die unter ihnen ſtehenden Glieder der Reihen M und N, und heißen überhaupt Logarithmen.

Z. B. Bis auf B^1 iſt ein Verhältniß $B^0 : B$

Bis B^2 ſind zwey Verhältniſſe $B^0 : B = B : B^2$

Bis B^3 ſind drey Verhältniſſe $B^0 : B = B : B^2 = B^2 : B^3$

Bis B^n ſind n Verhältniſſe.

IV. Die Reihen L, M, N können auch fallend ſeyn.

L. $2, 1, 0, -1, -2, -3, -4 \ldots -n$

M. $B^2, B^1, B^0, B^{-1}, B^{-2}, B^{-3}, B^{-4} \ldots B^{-n}$

N. $\begin{cases} 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{2^{-n}} \\ 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4} \ldots 2^{-n}. \end{cases}$

Alſo kann die Zahl a auch den Werth von Fractionen annehmen.

§. 351.

Die Logarithmen ſind alſo nichts anders, als die Exponenten derjenigen Würden, zu denen eine Zahl (B) erhoben werden muß, um was immer für einer andern Zahl gleich zu werden.

I. Wenn nun $B^x = a$, und $B^y = b$; ſo iſt x der Logarithmus von a, und y der Logarithmus von b. B ſelbſt heißt die Baſis oder Grundzahl.

II. Um den Logarithmus einer Zahl a, oder b zu bezeichnen, ſetzt man vor dieſelbe Log. oder blos L, l.

Log. a = x. Alſo auch: $B^{\log. a} = a$.

Log. b = y. $B^{\log. b} = b$.

III. Die Logarithmen, welche bey einer beſtimmten Baſis einer jeden Zahl zukommen, heißen ein Logarithmenſyſtem.

§. 352.

An und für ſich kann jede Zahl als Baſis eines Logarithmenſyſtems angenommen werden, außer 1, weil 1 zu was immer für einer Potenz erhoben 1 bleibt, folglich den Werth keiner andern Zahl erlangen kann; und es ſind ſehr viele Logarithmenſyſteme gedenkbar. In dem gemeinen Logarithmenſyſteme, welches auch das Briggiſche heißt, iſt die Baſis B = 10 geſetzt. Die Logarithmen dieſes Syſtems heißen überhaupt die Briggiſchen.

Anmerkung. I. Der Erfinder der Logarithmen iſt Johann Neper, Baron von Marchiſton; wenigſtens von ihm erſchien das erſte Logarithmiſche Werk unter dem Titel: Mirifici canonis logarithmorum descriptio. Edinburgi 1614. Heinrich Briggs, Profeſſor der Geometrie zu Oxford, richtete ſie bequemer ein, indem er 10 zur Baſis annahm, und berechnete die Logarithmen der Zahlen 1 — 20.000, und von 90000 — 100.000. Die Berechnung der Logarithmen für die Zahlen 20000 — 90.000 hatte Adrian Vlacq, ein Holländer,

länder, gemacht. — In Deutſchland ſind die bekannteſten Ausgaben logarithmiſcher Tafeln

1) Vega's logarithmiſch-trigonometriſches Handbuch. Leipzig bei Weidmann 1800.

2) Joh. Karl Schulze's Sammlung logarithmiſch-trigonometriſcher Tafeln. Berlin bei Mylius 1778.

3) Adrian Vlacqs Tabellen der Logarithmen für alle ganze Zahlen von 1 – 10.000, herausgegeben von Joh. Jakob Ebert. Frankfurt am Mayn bey Fleiſcher 1790.

Anmerkung II. Die Logarithmen leiſten in der Mathematik die wichtigſten Dienſte. Mittelſt ihrer verwandelt ſich die Multiplication und Diviſion in eine Addition und Subtraction; das Potenziren und Wurzelausziehen in eine einfache Multiplication und Diviſion. Ohne Logarithmen würde man jene Aufgaben, worin die Exponenten unbekannt ſind, gar nicht löſen können. Ueberdieß können die trigonometriſchen Linien nur mittelſt der Logarithmen berechnet werden.

Erſter Artikel.

Von den Briggiſchen Logarithmen.

§. 353.

Da in dem Briggiſchen Logarithmenſyſteme die Grundzahl B = 10 iſt, ſo verwandeln ſich die Reihen L, M, N (§. 350. I. IV.) in folgende:

L.	$-3.$	$-2.$	$-1.$	$0.$	$1.$	$2.$	$3.$	$4 \ldots$
M.	$10^{-3}.$	$10^{-2}.$	$10^{-1}.$	$10^{0}.$	$10^{1}.$	$10^{2}.$	$10^{3}.$	$10^{4}.$
N.	$\frac{1}{1000}.$	$\frac{1}{100}.$	$\frac{1}{10}.$	1.	10.	100.	1000.	10.000.

Da nun die Reihe L die Logarithmen für die entſprechenden Zahlen in der Reihe N anzeigt, ſo iſt

$$\text{Log. } 1 = 0 \text{ oder } 0.0000000$$
$$\text{Log. } 10 = 1 \ldots 1.0000000$$
$$\text{Log. } 100 = 2 \ldots 2.0000000$$
$$\text{Log. } \tfrac{1}{10} = -1 \ldots -1.0000000 \text{ u. ſ. w.}$$

§. 354.

§. 354.

Für alle Zahlen, welche nicht in der Reihe N enthalten ſind, ſind die Logarithmen Fractionen, und zwar für die Zahlen von 1 — 10 excluſive, eigentliche Fractionen, für die übrigen uneigentliche. — Wir wollen nun über den Logarithmus der Zahl 2 eine kurze Betrachtung anſtellen.

Es ſey Log. $2 = x$

alſo $10^x = 2$.

Offenbar muß dieſer Logarithmus größer ſeyn, als 0, und kleiner als 1. Es ſey alſo

α) $x = \frac{1}{2}$. folglich $10^{\frac{1}{2}} = 2$. oder $\sqrt[2]{10} = 2$.

Nun iſt aber $\sqrt{10} = 3,16 \ldots$ alſo iſt $\frac{1}{2}$ noch viel zu groß.

β) Man ſetze alſo $x = \frac{1}{3}$. folglich $10^{\frac{1}{3}} = 2$.

oder $10 = 2^3 = 8$.

Man ſieht hier, daß $\frac{1}{3}$ der Wahrheit zwar näher komme, aber doch noch zu groß ſey.

γ) Es ſey alſo $x = \frac{7}{23}$, welche Fraction etwas kleiner als $\frac{1}{3}$ iſt.

$10^{\frac{7}{23}} = 2$

$10^7 = 2^{23}$

10000.000 = 8'388608, wo, wenn man die letzten ſechs Stellen als Decimalen anſieht, nicht einmal mehr 2 als Differenz bleiben.

δ) Es ſey endlich $x = \frac{3}{10}$, welche Fraction um $\frac{1}{230}$ kleiner iſt als $\frac{7}{23}$.

$10^{\frac{3}{10}} = 2$

$10^3 = 2^{10}$

1000 = 1024. Es kommt alſo der Logarithmus $\frac{3}{10}$ der Wahrheit ziemlich nahe, iſt aber noch um etwas zu klein.

In den Tabellen zeigt ſich, daß Log. 2 = 0,3010300 ſey. Wo die Nullen am Ende bedeuten, daß zwar von dieſen Decimalſtellen keine Theile vorhanden ſeyen, aber in den folgenden noch einige ſtehen können, welche man wegen ihrer Kleinigkeit verachtet.

§. 355.

Erklärungen und Folgeſätze.

I. In dem Briggiſchen Syſteme ſind die Logarithmen gewöhnlich bis auf 7 Decimalſtellen berechnet. Man nennt die in einem Logarithmus vorkommende ganze Zahl — die Charakteriſtik, oder den Kennziffer; die Decimalen hingegen die Mantiſſe, (welche von der Charakteriſtik durch einen Punkt getrennt wird).

II. Für jede ganze Zahl, welche aus n Zifferſtellen beſteht, iſt die Charakteriſtik n — 1. (§. 353.)

Alſo für die Zahl 99 = 1,.......
999 = 2,.......
9999 = 3,.......
1000.000 = 6,.......

III. Ganze Zahlen und uneigentliche Brüche fodern poſitive, eigentliche Brüche aber negative Logarithmen. (§. 353.)

IV. Wenn die Mantiſſe eines Logarithmus bleibt, und nur die Charakteriſtik vergrößert oder verkleinert wird, ſo bleiben auch die Ziffern der dem Logarithmus entſprechenden Zahl, nur muß dieſe ſo oft durch 10 multiplicirt oder dividirt werden, als viele Einheiten die Charakteriſtik mehr oder weniger erhalten hat, weil 1 — die Charakteriſtik des Zehners iſt. —

Z. B. Da Log. 9624 = 3. 9833556
So iſt ... Log. 962,4 = 2. 9833556
Log. 96,24 = 1. 9833556
Log. 9,624 = 0. 9833556
Log. 0,9624 = — 1. + 9833556
= 0. 9833556. (— 1.)

Ferner Log. 96240 = 4.9833556
Log. 962400 = 5.9833556
Log. 9624000 = 6.9833556 u. ſ. f.

§. 356.

§. 356.

Satz. Der Logarithmus eines Produktes iſt der Summe aus den Logarithmen der Factorn gleich, d. i.

$$\text{Log. } a.b = \text{Log. } a + \text{Log. } b.$$

Beweis. Es ſey für das briggiſche Logarithmenſyſtem $B = \delta$ (δέκα, zehn).

$$\begin{array}{ll} a = \delta^x & \text{mithin Log. } a = x \\ b = \delta^y & \text{Log. } b = y \\ \hline a.b = \delta^{x+y} \text{ (§. 179.)} & \text{folglich Log. } ab = \text{Log.} x + \text{Log.} y. \end{array}$$

Folgeſatz. Da nun Log. 2 = 0,3010300
und Log. 10 = 1,0000000
So iſt Log. 20 = 1,3010300.

Hat man alſo die Logarithmen der Primzahlen, ſo darf man ſie nur addiren, um die Logarithmen der zuſammengeſetzten zu erhalten:

$$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 3 = \text{Log. } 6.$$
$$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 5 = \text{Log. } 10.$$
Log. 2 + Log. 7 = Log. 14 u. ſ. w.

Aufgabe. Die Zahlen 89, 45 logarithmiſch zu multipliciren.

Auflöſung. Man ſuche in den Logarithmen-Tafeln die Logarithmen der Factorn, und addire ſie. Die Summe iſt der Logarithmus des verlangten Produktes, und in den Tafeln aufzuſchlagen.

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 89 = 1.9493900 \\ \text{Log. } 45 = 1.6532125 \\ \hline \text{Log. } (89 \times 45) = 3.6026025 = \text{Log. } 4005. \end{array}$$

§. 357.

Satz. Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man den Logarithmus des Diviſors von dem Logarithmus des Dividends abzieht, d. i.

$$\text{Log. } \frac{a}{b} = \text{Log. } a - \text{Log. } b.$$

Beweis.

Beweis. $a = \delta^x$ mithin $\text{Log. } a = x$
$b = \delta^y$ $\text{Log. } b = y$

$\frac{a}{b} = \delta^{x-y}$ (§. 179.) folgl. $\text{Log. } \frac{a}{b} = x - y$
$= \text{Log. } a - \text{Log. } b.$

Folgeſatz. Wenn alſo Log. 10 = 1,0000000
und Log. 2 = 0,3010300

So iſt Log. $\frac{10}{2}$ = Log. 5 = 0.6899700.

Aufgaben.

I. Die Zahl 1728 logarithmiſch durch 144 zu dividiren.

Aufloͤſung. Man ziehe Log. 144 von Log. 1728 ab; der Reſt iſt der Logarithmus des geſuchten Quotienten.

Log. 1728 = 3.2375437
—Log. 144 = —2.1583625
1.0791812 = Log. 12.

II. Den Logarithmus eines eigentlichen Bruches z. B. $\frac{5}{6}$ zu finden, oder dieſen in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Aufloͤſung. Man ſubtrahire den Logarithmus des Nenners von jenem des Zaͤhlers; vermehre aber den Logarithmus des letztern, als den kleinern, in der Charakteriſtik um ſo viele Einheiten, als nothwendig ſind, um die Subtraktion verrichten zu koͤnnen. Man kann die am Anfange des Logarithmus in der Charakteriſtik addirten Einheiten, nach der Mantiſſe, als abzuziehend mit — bezeichnen. Alſo

Log. 5 = 1.6989700 (—1.)
Log. 6 = 0,7781513
Log. $\frac{5}{6}$ = 0.9208187. (—1.)

Nun ſuche man in den logar. Tafeln die dieſem Logarithmus zugehoͤrige Zahl. Findet man denſelben nicht genau unter der Charakteriſtik 0, 1, 2; ſo ſuche man ihn unter einer hoͤhern 3, 4. In den kleinern Vlacquiſchen Tafeln iſt der naͤchſte Logarithmus 3.9208014 = Log. 8333 . . .

In dieſer Zahl nun muͤſſen von der Rechten gegen die Linke ſo viele Decimalſtellen abgeſchnitten werden, als die Summe der Einheiten betraͤgt, um welche die Charakteriſtik

ſo

ſowohl im Dividend, als Reſte erhöhet wurde. Da nun dieſe Summe hier = 4 iſt, ſo wird die verlangte Zahl ſeyn:

$$\text{Log.} - 1.+9208187 = 0{,}8333 \ldots\ldots \text{ (§. 355. IV.)}$$

§. 358.

Satz. Den Logarithmus von der Potenz einer Zahl erhält man, wenn man den Logarithmus der Zahl mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; d. i.

$$\text{Log. } A^n = n . \text{Log. } A.$$

Beweis. $A = \delta^x$; alſo $\text{Log. } A = x$.

$$\text{(§. 182) } A^n = \delta^{nx}$$

folglich $\text{Log. } A^n = nx.$

$$= n . \text{Log. } A.$$

Folgeſatz. Da nun $\text{Log. } 2 = 0.3010300$ iſt;

ſo wird $\text{Log. } 2^2 = \text{Log. } 4 = 0.6020600$

$\text{Log. } 2^3 = \text{Log. } 8 = 0.9030900$

$\text{Log. } 2^6 = \text{Log. } 64 = 1.8061800.$

Aufgabe. Die Zahl 98 logarithmiſch zum Quadrate zu erheben.

Auflöſung. Man multiplicire den Logarithmus von 98 durch 2; und ſuche die Zahl, welche dem ſo verdoppelten Logarithmus entſpricht, ſo hat man die verlangte Würde.

$$\text{Log. } (98)^2 = 1.9912261$$
$$2$$
$$\text{Log. } 98^2 = 3.9824522 = \text{Log. } 9604.$$

§. 359.

Satz. Den Logarithmus einer Wurzel erhält man, wenn man den Logarithmus der Würde durch den Wurzelexponenten dividirt;

$$\text{d. i. Log. } \sqrt[n]{A} = \frac{\text{Log. } A}{n}.$$

Beweis. $A = \delta^x$; alſo $\text{Log. } A = x$.

$\sqrt[n]{A} = \delta^{\frac{x}{n}}$ (§. 194); folglich $\text{Log. } \sqrt[n]{A} = \frac{x}{n} = \text{Log. } \frac{A}{n}.$

Auf-

Aufgabe. Aus 9261 logarithmiſch die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflöſung. Man dividire den Logarithmus von 9261 durch 3; der Quotient giebt den Logarithmus der Kubikwurzel.

$$\text{Log.}\ \sqrt[3]{9261} = \frac{3.9666579}{3} = 1.3222193$$
$$= \text{Log.}\ 21.$$

§. 360.

Verbindet man die Fälle §. §. 356, 357 mit einander, ſo iſt man auch in den Stand geſetzt, für jede discrete oder ſtätige geometriſche Proportion das fehlende Glied zu finden.

Aufgaben.

I. Welches iſt das vierte Glied dieſer Proportion: $19 : 209 = 71 : x$.

Auflöſung. $\text{Log.}\ x = (\text{Log.}\ 209 + \text{Log.}\ 71) - \text{Log.}\ 19.$

$$\text{Log.}\ 209 = 2.3201463$$
$$\text{Log.}\ 71 = 1.8512583$$
$$\text{Log.}\ (209 \times 71) = 4.1714046$$
$$-\text{Log.}\ 19 = 1.2787536$$
$$\text{Log.}\ \frac{209 \times 71}{19} = 2.8926510 = \text{Log.}\ 781.$$

Alſo $x = 781$.

II. Die mittlere Proportionalzahl $A : C : B$ logarithmiſch zu beſtimmen.

Auflöſung. $A : C : B$

Alſo $C^2 = AB$

$\sqrt{\ }\ C = \sqrt{AB}.$

logarithmiſirt: $\text{Log.}\ A - \text{Log.}\ C - \text{Log.}\ B.$ (§. 357.)

$2\ \text{Log.}\ C = \text{Log.}\ A + \text{Log.}\ B.$ (§.§. 317, 358.)

$$\text{Log.}\ C = \frac{\text{Log.}\ A + \text{Log.}\ B}{2}$$

d. h. Wenn C die mittlere geometriſche Proportionalzahl von A, B iſt: ſo iſt Log. C die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zu den Logarithmen von A und B.

§. 361.

Mittelſt dieſer letzten Aufgabe iſt man in den Stand geſetzt, für was immer für eine gegebene Zahl, z. B. für 3 den briggiſchen Logarithmus zu finden. — Es ſey $A=1$. $B=10$. und $\text{Log. } A=0$. $\text{Log. } B=1$.

$$\text{So iſt } C=\sqrt{AB}=\sqrt{10}=3{,}1622771$$

$$\text{und Log. } C=\frac{0+1}{2}=0{,}50000000$$

Nun ſuche man ferner zwiſchen A und C die mittlere geometriſche Proportionalzahl, ſo wird

$$D=\sqrt{AC}=1{,}7782794$$

$$\text{und Log. } D=\frac{\text{Log. } A+\text{Log. } C}{2}=0{,}25000000.$$

Setzt man dieſe Operation ſo lange fort, bis zur mittlern geometriſchen Proportionalzahl 3 erſcheint, ſo erhält man auf beſagte Weiſe den Logarithmus von 3.

Folgende Tabelle ſtellt das ganze Verfahren dar.

Tabelle zur Berechnung des briggiſchen Logarithmus der Zahl 3.

A = 1.0000000	. . . .	Log. A = 0.0000000.000	
B = 10.0000000	. . . .	L. B. = 1.0000000.000	
C = 3,1622777	$C=\sqrt{AB}$	L. C. = 0,5000000.0000	$L.C=\frac{L.A+L.B}{2}$
D = 1,7782794	$D=\sqrt{AC}$	L. D. = 0,2500000.0000	$L.D=\frac{L.A+L.C}{2}$
E = 2,3713737	$E=\sqrt{CD}$	L. E. = 0,3750000.0000	$L.E=\frac{L.C+L.D}{2}$
F = 2,7384196	$F=\sqrt{CE}$	L. F. = 0,4375000.000	$L.F=\frac{L.C+L.E}{2}$
G = 2,9427272	$G=\sqrt{CF}$	L. G. = 0,4687500.000	$L.G=\frac{L.C+L.F}{2}$
H = 3,0505279	$H=\sqrt{CG}$	L. H. = 0,4843750.0000	$L.H=\frac{L.C+L.G}{2}$
I = 2,9961427	$I=\sqrt{GH}$	L. I. = 0,4765625.0000	$L.I=\frac{L.G+L.H}{2}$
K = 3,0232131	$K=\sqrt{HF}$	L. K. = 0,4804687.5	$L.K=\frac{L.H+L.F}{2}$
L = 3,0096474	$L=\sqrt{IK}$	L. L. = 0,4785156.25	$L.L=\frac{L.I+L.K}{2}$

M =

M = 3,0028875	$M = \sqrt{IL}$	L. M. = 0,4775390.625	$L.M = \frac{L.I + L.L}{2}$
N = 2,9995132	$N = \sqrt{IM}$	L. N. = 0,4770507.8125	$L.N = \frac{L.I + L.M}{2}$
O = 3,0011999	$O = \sqrt{MN}$	L. O. = 0,4772949.21875	$L.O = \frac{L.M + L.N}{2}$
P = 3,0003564	$P = \sqrt{NO}$	L. P. = 0,4771728.515625	$L.P = \frac{L.N + L.O}{2}$
Q = 2,9999348	$Q = \sqrt{N.P}$	L. Q. = 0,4771118.1640625	$L.Q = \frac{L.N + L.P}{2}$
R = 3,0001456	$R = \sqrt{P.Q}$	L. R. = 0,4771423.33984	$L.R = \frac{L.P + L.Q}{2}$
S = 3,0000402	$S = \sqrt{Q.R}$	L. S. = 0,4771270.751953	$L.S = \frac{L.Q + L.R}{2}$
T = 2,9999875	$T = \sqrt{Q.S}$	L. T. = 0,4771194.458007	$L.T = \frac{L.Q + L.S}{2}$
V = 3,0000138	$V = \sqrt{S.T}$	L. V. = 0,4771232.6049804	$L.V = \frac{L.S + L.T}{2}$
W = 3,0000067	$W = \sqrt{T.V}$	L. W = 0,4771213,5314941	$L.W = \frac{L.T + L.V}{2}$
X = 2,9999941	$X = \sqrt{T.W}$	L. X. = 0,4771203.9947509	$L.X = \frac{L.T + L.W}{2}$
Y = 2,9999974	$Y = \sqrt{W.X}$	L. Y. = 0,477120.87631225	$L.Y = \frac{L.W + L.X}{2}$
Z = 2,9999990	$Z = \sqrt{W.Y}$	L. Z. = 0,4771211.1473083	$L.Z. = \frac{L.W + L.Y}{2}$
υ = 2,9999999	$\upsilon = \sqrt{W.Z}$	L. υ. = 0,4771212.3394012	$L.\upsilon. = \frac{L.W + L.Z}{2}$
Φ = 3,0000002	$\Phi = \sqrt{W.\upsilon}$	L. Φ. = 0,4771212.9357476	$L.\Phi = \frac{L.W + L.\upsilon}{2}$
χ = 3,00000006	$\chi = \sqrt{\upsilon.\Phi}$	L. χ. = 0,4771212.637244	$L.\chi = \frac{L.\upsilon + L.\Phi}{2}$
Ψ = 2,99999996	$\Psi = \sqrt{\upsilon.\chi}$	L. Ψ = 0,4771212.4884128	$L.\Psi = \frac{L.\upsilon + L.\chi}{2}$
ω = 3,00000001	$\omega = \sqrt{\chi\Psi}$	L. ω. = 0,4771212.5629186	$L.\omega = \frac{L.\chi + L.\Psi}{2}$

Aus dieſer Berechnung mag man ſich einen Begriff von der unendlichen Mühe machen, welche die Erfinder der Logarithmen hatten, um die Logarithmen für alle Primzahlen zu finden. — Doch weiß man heut zu Tage einen kürzern Weg durch die Functionen die Logarithmen zu finden.

§. 362.

§. 362.

Aufgabe. Eine Gleichung zu lőſen, worin die unbekannte Grőße als Würde oder Wurzelexponent vorkommt,

z. B. $A^x = \frac{S-d}{c}$

Aufloſung.

Man reducire die Gleichung ſo, daß die Grőße, deren Wurzel= oder Wurzelexponent unbekannt iſt, allein und zwar poſitiv auf einer Seite ſtehe; und ſetze für die bekannten Grőßen ihre Logarithmen. Da nun in der logarithmiſirten Gleichung die unbekannte Grőße nicht mehr als Exponent, ſondern als Factor oder Diviſor vorkommt, ſo kann ihr Werth nach den gewőhnlichen Regeln der Gleichungen gefunden, und die Gleichung gelőſet werden.

Alſo $A^x = \frac{S-d}{c}$

$$x . \text{Log. } A = \text{Log. } (S-d) - \text{Log. } c.$$

$$x = \frac{\text{Log. } (S-d) - \text{Log. } c}{\text{Log. } A.}$$

Beyſpiele.

I. Aus dem letzten und erſten Gliede einer geometriſchen Reihe: $Z = a . q^{n-1}$ die Gliederanzahl n zu beſtimmen.

Aufloſung. $a . q^{n-1} = Z.$

$$q^{n-1} = \frac{Z}{a}$$

$$(n-1) . \text{Log. } q = \text{Log. } Z. - \text{Log. } a.$$

$$n = 1 + \frac{\text{Log. } Z - \text{Log. } a}{\text{Log. } q.}$$

II. Einem Spione verſprach man für die erſte Minute ſeines Aufenthaltes im feindlichen Lager, um wichtige Nachrichten einzuziehen, einen Gulden; für die zweyte 2 Gulden, und für jede folgende das Doppelte. Er war glücklich und erhielt 32.767 fl. . . Wie lange war er im Lager geblieben?

Auflöſung. Hiezu dient die Formel:

$$S = \frac{a.q^n - a}{q - 1} \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ S = 32767 \\ q = 2 \\ n = x. \end{array}$$

$$q^x = \frac{Sq - S + a}{a} = 1 + S.\left(\frac{q-1}{a}\right)$$

Logarithmiſirt $x = \frac{\text{Log.}\left[1 + S.\left(\frac{q-1}{a}\right)\right]}{\text{Log. } q} = \frac{\text{Log. } 32.768}{\text{Log. } 2.}$

$$x = \frac{4.5154499}{0.3010300} = 15 \text{ Minuten} = \tfrac{1}{4} \text{ Stunde.}$$

Anmerkung. Die letzten Decimalen des Dividends 0,0000499 ſind 0,00005 gleich zu achten. Da nemlich 32768 die fünfzehnte Potenz von 2 iſt, ſo muß der Log. 2 in dem Log. 32768 genau 15mal enthalten ſeyn. Der kleine Fehler im Quotienten rührt von einer kleinen Unrichtigkeit in den Logarithmen her.

III. In einem Faße ſind a Maß Wein. Es werden b Maß Wein herausgelaſſen, und eben ſo viele Maß Waſſer nachgegoſſen; und dieß wird ſo oft wiederholt, bis noch $\frac{a}{d}$ Maß Wein im Faße ſind. Wie oft dürfen nun b Maß Wein herausgelaſſen, und b Maß Waſſer nachgegoſſen werden?

Auflöſung. Es iſt nach dem letzten oder n^{ten} Aufguſſe noch $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Wein im Faſſe; daher

$$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{d}, \text{ und}$$

$$(a-b)^n = \frac{a^n}{d}, \text{ folglich}$$

$$n \times \text{Log.}(a-b) = n \times \text{Log. } a - \text{Log. } d. \text{ und}$$

$$n[\text{Log. } a - \text{Log.}(a-b)] = \text{Log. } d.$$

Alſo $n \ldots = \frac{\text{Log. } d}{\text{Log. } a - \text{Log.}(a-b)}$

Setzt man $a = 60.$ $b = 2.$ $d = \frac{4}{3}$, ſo daß $\frac{a}{d} = 45$, ſo findet man n etwas Unbedeutendes kleiner als $8\frac{1}{2}$.

Zweyter

Zweyter Artikel.

Bemerkungen über den Gebrauch der kleinern logarithmiſchen Tafeln der Zahlen 1 — 10000.

§. 363.

Da die kleinern logarithmiſchen Tafeln nur die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 — 10000 enthalten, und man gleichwohl oft den Logarithmus einer größern Zahl nothwendig hat, ſo muß für dieſen Fall und für ähnliche eine leichte Verfahrungsart gezeigt werden. — Alſo

Erſter Fall. Den Logarithmus einer Zahl zu finden, welche über 4, aber doch nicht über 8 Zifferſtellen enthält, z. B. von 48'828,235.

Operation. 1) Man betrachte die vier erſten Ziffer als ganze Zahlen, die übrigen vier als Decimalen 4882,8125.

2) Man ſuche die Differenz zwiſchen dem Logarithmus der ſo verkürzten ganzen Zahl, und jenem der nächſt höhern Zahl.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 4883 & = 3{,}6886867 \\ -\text{Log. } 4882 & = 3{,}6885978 \\ \hline \text{d} & = 0{,}0000889. \end{array}$$

Da nun die Differenzen ſolcher Zahlen, welche über 1000 gehen, und nur um 1, oder noch weniger unterſchieden ſind, den Differenzen ihrer Logarithmen, wenigſtens bis zur ſiebenten Decimalſtelle, ziemlich genau geometriſch proportional ſind, ſo verhält ſich 1 (als Differenz der ganzen Zahlen 4882, 4883) zur Differenz der Decimalzahlen 4882, und 4882, 8125, (0,8125), als wie die Differenz der Logarithmen 0,0000889, zu x, als dem Complement zum Logarithmus von 4882. . . .

$$1 : 0{,}8125 = 0{,}0000889 : x.$$

$$x = 0{,}00007223125.$$

3) Dieſen Werth von x addire man zum Logarithmus der Zahl 4882 . . . ſo erhält man:

$$\text{Log. } 48'828.125 = 7.6886700.$$

Anmerkung 1. Daß der Kennziffer 7 ſeyn muß, erhellt daraus, weil die dem Logarithmus entſprechende ganze Zahl 8 Zifferſtellen hat.

Anmerkung 2. Auch für Decimalbrüche von mehr als 4 Ziffern läßt ſich dieſe Methode anwenden, wenn man nur in Beſtimmung der Charakteriſtik die nothwendigen Regeln beobachtet; ſo findet man z. B. daß der Logarithmus von 244,140625 = 2.3876400.

Anmerkung 3. Hat man die größern Tafeln, worin die Logarithmen bis 100.000 berechnet, und überdieß die Proportionaltheile (Partes proportionales) für die ſechste, ſiebente, zum Theil auch achte Zifferſtelle enthalten ſind, ſo wird der Logarithmus für eine aus mehr als fünf Ziffern beſtehende Zahl, z. B. 27757968, kürzer alſo gefunden.

a) Man ſuche den Logarithmus für die fünf erſten Stellen. Log. 27757000 = 7.4433725.

b) Da nun die bey dieſem Logarithmus herrſchende Differenz = 156 iſt, ſo ſuche man in der letzten Spalte P. P. die den drey letzten Stellen 968 zugehörigen Proportionaltheile.

Für die ſechste Stelle	9 iſt der Prop. Th.	140	zehnmillionteſte Theile.
— — ſiebente —	6 — — — —	9,4	
— — achte —	8 — — — —	1,25	
	Summe	150,65	

c) Dieſe Summe addire man als Complement zum Logarithmus von 27757000, ſo erhält man:

Log. 27757968 = 7.443387565.

§. 364.

Zweiter Fall. Die Zahl zu finden, die einem Logarithmus zugehört, deſſen Kennziffer größer als 3, deſſen Mantiſſe aber genau in den kleinern Tafeln vorkommt; z. B. die dem Logarithmus 7.5364322 zugehörige Zahl zu finden.

Operation. Man ſuche den gegebenen Logarithmus unter dem höchſten Kennziffer 3. Da nun, nach der Vorausſetzung, die Mantiſſe genau vorkommt, ſo hat man nur die der Charakteriſtik 7 entſprechenden 8 Zifferſtellen in der Zahl 3439 durch vier Nullen zu ſuppliren; alſo

$$7.5364322 = \text{Log. } 34390000.$$

Dritter Fall. Eine Zahl zu finden, die einem Logarithmus zugehört, deſſen Kennziffer zwar kleiner als 3, deſſen Mantiſſe aber nicht genau in den Tafeln vorkommt.

Operation. Man habe z. B. den Logarithmus 1.8976821. Man ſuche ihn unter dem Kennziffer 3, ſo findet man die ganze Mantiſſe bey 7901; da aber dem Kennziffer 1 nur Zehner zukommen, ſo iſt

$$1.8976821 = \text{Log. } 7901.$$

Findet man aber die Mantiſſe auch unter dem höhern Kennziffer nicht genau, und wünſcht gleichwohl, die dem Logarithmus entſprechende Zahl in mehrern Ziffern zu haben, ſo verfährt man alſo:

1) Um z. B. die dem Logarithmus 1.2480160 zugehörige Zahl genau zu finden, ſchlage man dieſen Logarithmus (B) unter dem Kennziffer 3 auf, und bemerke den nächſt kleinern Logarithmus (A), und den nächſt größern (C), zwiſchen welche B hineinfällt.

In gegenwärtigem Beyſpiele iſt A = 3.2479733. C = 3.2482186.

2) Nun ziehe man A ſowohl von B, als von C ab.

$$B - A = d.$$
$$C - A = \delta;$$

3) Formirt man nun die geometriſche Proportion

$$\delta : d = 1 : x$$

ſo iſt x das Complement, welches zu der — dem Logarithmus A — entſprechenden Zahl (a) addirt, die Zahl (b) giebt, welche dem Logarithmus B zukommt.

B =

B = (3)2480160	C = 3.2482186
—A = 3.2479733	A = 3.2479733
d = 0.0000427	δ = 0.0002453

0,0002453 : 0,0000427 = 1 : x... x = 0,1743

a = 1770

\+ x = 0,1740.. b = 1770,174

Log. 1770,1740 = 3.2480160

und folglich Log. 17,701740 = 1.2480160.

Anmerkung. 1) Die nemliche Methode ließe ſich auch anwenden, wenn der gegebene Logarithmus B zur Charakteriſtik 4, 5, 6 hätte.

Anmerkung 2) Hat man die größern logarithmiſchen Tafeln, ſo läßt ſich eine Aufgabe über dieſen dritten Fall leichter auf folgende Art löſen. Z. B. Um die dem Logarithmus 0.4883313 zugehörige Zahl zu finden, ſuche man (unter dem Kennziffer 3) den ihm am nächſten kommenden kleinern Logarithmus

0.4883251 = Log. 3,0784

Nun beſtimme man die Differenz beider Logarithmen

D = 62.

Davon ziehe man aus der Spalte P. P. den größten Proportionstheil ab, der ſich abziehen läßt, und ſchreibe die ihm zugehörige Zahl als 6te Zifferſtelle an

62	
—56	Zahl 0,00004
6	

Zum Reſte 6 füge man eine Nulle, und ſubtrahire ebenfalls den größten Proportionaltheil, der ſich ſubtrahiren läßt. Die ihm zugehörige Zahl giebt die 7te Zifferſtelle.

60	
—56	Zahl 0,000004

folglich 0.4883251 = Log. 3.078444

= Log. des Métre im Fußmaße.

* Sollte die gefundene Differenz kleiner ſeyn, als der zu 1 gehörige Proportionaltheil, ſo müßte man an die ihr zugehörige Stelle eine Nulle ſetzen.

§. 365.

Vierter Fall. Für einen negativen Logarithmus, z. B. für — 1.0791812 den ihm entſprechenden Bruch zu finden.

Operation. Man betrachte den Logarithmus als poſitiv, ſuche die ihm entſprechende Zahl, und mache ſie zum Nenner einer Fraction, deren Zähler 1 iſt.

$$+ 1{,}0791812 = \text{Log. } 12$$
$$- 1{,}0791812 = \text{Log. } \tfrac{1}{12}.$$

Will man aber lieber den Werth des negativen Logarithmus in einem Decimalbruche haben, ſo betrachte man ihn als poſitiv, und ziehe ihn von der Summe ſeiner Kennziffer (n) und der Zahl 4 ab (vorausgeſetzt, daß man nur die kleinern Tafeln beſitze). Der durch die Subtraction entſtehende Logarithmus entſpricht dem verlangten Decimalbruch, und iſt übrigens nach §. 357. II. zu behandeln.

Obiges Beyſpiel iſt alſo auch ſo aufzulöſen:

$n = 1$; alſo $n + 4 = 5$

$$\begin{array}{l} 5.0000000 \\ 1.0791812 \\ \hline 3.9208188. - (5) = \text{Log. } 8333\ (\times 0{,}10^{-5}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \text{Log. } 0{,}0833\ldots \end{array}$$

Es iſt aber $\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$

Dritte Abtheilung.

Praktiſche Rechenkunſt.

Fünfter Abſchnitt.

Praktiſche Rechenkunſt.

Einleitung.

§. 366.

Praktiſche Rechenkunſt iſt die Anleitung, wie die Grundſätze und Regeln der reinen Arithmetik und Algebra auf die, im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle anzuwenden ſeyen. Die praktiſche Rechenkunſt hat es alſo nicht mit allgemeinen, ſondern beſtimmten, nicht mit abſtrakten, ſondern concreten Zahlen zu thun.

Erklärung. 1) Eine gezählte Größe beſtimmter Art heißt eine benannte Zahl; es können aber gezählte Größen ſowohl ganze, als gebrochene Zahlen ſeyn; z. B. 5 fl., 6 Pfunde, $1\frac{2}{3}$ Thaler.

2) Die gezählten Größen oder benannten Zahlen beziehen ſich größtentheils auf die im bürgerlichen Leben eingeführten Münzen, Längen-, Flächen- Körpermaße u. ſ. w.

3) Die praktiſche Rechenkunſt muß nicht nur die geſetzlichen Beſtimmungen hierüber, wie ſie im Vaterlande ſind, anführen, ſondern auch das Verhältniß der inländiſchen Maße, Gewichte zu jenen benachbarter Länder angeben, und die Reduktion der einen auf die andern zeigen.

§. 367.

Die praktiſche Rechenkunſt unterſcheidet ſich der Form nach im Weſentlichen von der reinen Arithmetik nicht: aber bey Auflöſung der Rechnungsfälle des bürgerlichen Lebens weicht ſie von der Schulmethode aus guten Gründen ab, und bedient ſich gewiſſer Kunſtgriffe und Vortheile, wodurch die Rechnung kürzer und leichter, dabey aber doch mathematiſch richtig zu Ende gebracht wird. — Uebrigens zer-

fällt die praktiſche Rechenkunſt in drey Hauptſtücke, deren Inhalt im kurzen ſeyn wird:

Erſtes Hauptſtück. Anwendung der vier Rechnungsarten auf benannte Zahlen, deren Natur und Verhältniß zuvor näher beſtimmt werden muß.

Zweytes Hauptſtück. Anwendung der Proportionslehre auf Beſtimmungen der Waarenpreiſe, Reductionen, Tara, Repartitions-, Vermiſchungsrechnungen.

Drittes Hauptſtück. Anwendung der Progreſſionslehre und Logarithmen auf Zins-, Ziele-Discontorechnungen.

Jedes Hauptſtück zerfällt wieder in mehrere Artikel.

Erſtes Hauptſtück.

Anwendung der Rechnungsarten auf benannte Zahlen.

§. 368.

Bey Beſtimmung oder Ausmeſſung einer Größe kommt es darauf an, daß ein gewiſſes Maß, d. i. eine bekannte Größe von gleicher Art feſtgeſetzt werde, und daß man beſtimme, in welchem Verhältniſſe das Maß zur auszumeſſenden Größe ſtehe. Es iſt nun leicht zu begreifen, daß alle Maße benannter Zahlen wieder benannte Größen ſeyn, und daß ſie ſich auf ein einfaches Zahlenverhältniß müſſen zurückführen laſſen. Z. B. Das Maß des Gewichtes ſind Zentner, Pfunde, Lothe; das Maß der Längen ſind Ruthen, Ellen, Fuß, Zolle. Da nun 1 Ztr. = 100 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth; ſo iſt das Verhältniß dieſer drey Größen als wie: $1 : \frac{1}{100} : \frac{1}{3200}$; oder wie $3200 : 32 : 1$.

Man muß aber bey allen Maßen eine Einheit, und ein Element unterſcheiden.

1) Die Einheit iſt das kleinſte bürgerliche Maß, wodurch das Verhältniß der einmal feſtgeſetzten Unterabtheilungen gegen einander beſtimmt wird;

2) Das

2) Das Element iſt eine durch Convention eingeführte oder allgemein angenommene Ureinheit, wodurch das Verhältniß der Maße verſchiedener Länder feſtgeſetzt iſt, und ihre Reduction möglich wird.

Z. B. Die Eintheilung des Pfundes in Unzen, Lothe, Quintl. Pfenninggewichte, Gran haben zwar viele Länder miteinander gemein, und in dieſer Hinſicht iſt 1 Gran die Einheit dieſer verſchiedenen Gewichte. Da aber nicht alle dieſe Länder ein gleich ſchweres Pfund, folglich auch nicht die nemliche Einheit eines Grans haben, ſo mußte man eine gemeinſchaftliche Einheit oder ein gleiches Element annehmen, wodurch die Handelsgewichte verſchiedener Länder in ein gegenſeitiges Verhältniß gebracht wurden. Dieſe Elemente ſind für das Gewicht, die Aſſen des holländ. Troygewichts, oder die köllniſchen Richtpfenninge; für die Längenmaße die Linien des alten königl. Pariſer Fußes oder die Unterabtheilungen des neuen franzöſiſchen Métre u. ſ. w. — Bey einigen Maßen, z. B. bey dem Zeitmaße iſt die Einheit auch das Element, weil z. B. eine Terze bey allen Ländern gleich ſeyn kann.

Erſter Artikel.

Vorkenntniſſe vom Längen-, Flächen-, Körpermaß-, Gewicht, und von den Münzen.

A. Längenmaß.

§. 369.

1) Kleinere Längen zu meſſen, hat man den Fuß, die Elle; für größere, die Klafter, die Ruthe, die Meile.

2) Nimmt man den ehemaligen Königl. Pariſer Fuß zu 1440,0 Theilen an, ſo beträgt der Königl. Baierſche Fuß 1293,8 ſolcher Theile, oder 129,38 pariſer Linien.

3) Die baierſche Elle hält 2 Fuß, 10¼ baierſche Duodecimalzoll, oder 369,27 Pariſer Linien.

4) Die geometriſche Ruthe hält 10 baierſche Fuß, oder 8,9477 Pariſer Fuß.

5) Die

5) Die baierſche Klafter hält in der Länge 6 baierſche Fuß, oder 5,36863 franz. Fuß.

6) Das größte übliche Längenmaß iſt die Meile, und zwar in Teutſchland die teutſche, oder geographiſche Meile, deren 15 auf einen Meridiangrad gehen.

a) Die teutſche Meile beträgt 22803,29 pariſer, oder 25380,076 baieriſche Fuß.

b) Die baierſche Chauſſee-Meile betrug ehemals 26000 baieriſche Fuß; gegenwärtig aber beträgt ſie nur 25406, folglich eine Chauſſeeſtunde 12703, in welcher Entfernung auch die Stunden-Säulen geſetzt ſind.

7) Man unterſcheidet den geometriſchen, und den bürgerlichen Fuß (oder Werkſchuh)... Jener wird nach dem Decimal-, dieſer nach dem Duodecimalmaß eingetheilt.

8) **Einfacher Längenfuß** a) **im Duodecimalmaße.**

Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien.	Scrupel oder Haarbreiten.
1	12'	144''	1728'''	20736''''
	1	12	144	1728
		1	12	144
			1	12

9) **Einfacher Längenfuß** b) **im Decimalmaße.**

Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien	Scrupel.
1°	10'	100''	1000'''	10000''''
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

B. Flächenmaß.

§. 370.

1) Kleinere Flächen zu meſſen, dient der Quadratzoll, der Quadratfuß, die Quadratklafter, die Quadratruthe; für größere

größere das Tagwerk oder Jauchert; für noch größere die Quadratmeile.

2) Der baierſche □ Fuß = 116,244055 ... Pariſer □ Zolle.

3) Die baierſche □ Klafter = 36 baierſche □ Fuß.

4) Die baierſche dec. □ Ruthe = 100 baierſche □ Fuß.

5) Ein baieriſches Tagwerk oder Jauchert iſt 200 baieriſche Fuß lang, und eben ſo breit, und hält 40,000 baieriſche □ Fuß.

6) Die teutſche Quadratmeile hält 519'990.034,8241 franzöſiſche Quadratfuß.

7) Flächenmaß a) im Duodecimalmaße.

□ Ruthe.	□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.
1	144	20.736	2'985.984
	1	144	20.736
		1	144

8) Flächenmaß b) im Decimalmaße.

□ Ruthe.	□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.
1	100	10000	1'000.000
	1	100	10.000
		1	100

C. Körpermaß.

§. 371.

1) Kleinere Körper zu meſſen, dient der Kubikzoll, der Kubikfuß; größere — die Kubikruthe, Kubikklafter. Das größte Körpermaß iſt die Kubikmeile.

2) Der baierſche Kubikfuß = 1253,307626 franzöſiſche Kubikzoll.

3) Da die geſetzmäßige Scheiterlänge $3\frac{1}{2}$ Fuß iſt, ſo beträgt die baierſche Kubikklafter, als Holzmaß, 126 baierſche Kubikfuß.

4) Kör-

4) Körpermaß a) im Duodecimalmaße.

Kub. Ruthe.	Kub. Fuß.	Kub. Zoll.	Kub. Linien.
1	1728	2'985 984	5159'780.352
	1	1728	2'985.984
		1	1728

5) Körpermaß b) im Decimalmaße.

Kub. Ruthe.	Kub. Fuß.	Kub. Zoll.	Kub. Linien.
1	1000	1'000.000	1000'000.000
	1	1000	1'000.000
		1	1000

6) Zum Körpermaß gehören auch die Getränk- und Getreidmaße. — Wieder andere Körper werden durch das Gewicht beſtimmt, andere bloß gezählt; alſo

I. Baierſches Getränkmaß.

§. 372.

1) Um Flüſſigkeiten überhaupt zu meſſen, dient als Einheit die baierſche Maßkanne, welche 43 baierſche Decimalkubikzoll, folglich 53,8923 Pariſer Duodez-Kubikzolle beträgt.

2) Der baierſche Viſir-Eimer hält 64 Maßkannen, und iſt = 2752 baierſche Decimalzolle = 3449,1072 pariſer Duodec. Kubikzoll.

3) Der baieriſche Schenk-Eimer beträgt 60 Maßkannen, und iſt = 2580 baier. Decimalkubikzoll = 3233,538 franz. Duodez. Kubikzoll.

4) Eintheilung des Wein-, Bier- und Eſſigmaßes.

Ohm.	Eimer.	Viertel.	Maß.	Halbe, oder Seidel.	Quart.	Achterl.
1	2	8	120	240	480	960
	1	4	60	120	240	480
		1	15	30	60	120
			1	2	4	8
				1	2	4
					1	2

* Das Ohm oder Fuder iſt bey dem Weine gebräuchlich.

II. Bai-

II. Baierſches Getreidmaß.

§. 373.

1) Für das Getreidmaß iſt der altbaierſche Metzen die Einheit; er hält genau $34\frac{2}{7}$ baierſche Maßkannen, oder 1470,666 baierſche Decimalkubikzoll, oder 1868,2664 franz. Duodec. Kubikzoll.

2) Das ſechs Metzen-Maß, oder Schäffel hält 208 Maß, oder 8 Kubikfuß, 944 Decimalkubikzoll baier. = 8944 bair. Deckbz. = 11209,5984 franz. Duodecimalkubikzoll, und gilt für alle Getreidearten.

* Ehemals hatte das Haberſchäffel 7 baierſche Metzen.

3) Eintheilung des baierſchen Getreid- und Mehlmaßes.

Schäffel	Metzen	halbe Metzen	Viertel	Achtel	Sechzehntl	Dreyßger oder Maßl	½ Dreyßger
1	6	12	24	48	96	192	384
	1	2	4	8	16	32	64
		1	2	4	8	16	32
			1	2	4	8	16
				1	2	4	8
					1	2	4
						1	2

III. Baierſches Gewicht.

§. 374.

1) Da dem baierſchen Gewicht die holländiſche Mark Troygewicht (von Troyes in Champagne benannt) zu Grunde liegt, ſo muß dieſe zuerſt erklärt werden. Es iſt aber

1 Mark = 8 Unzen = 160 Engel = 640 Fierling = 1280 Troisken = 2560 Deurskeu = 5120 Aß = 68.985 kölln. Richtpfennige.

2) Die Köllner Mark (deren Eintheilung unten kommt) verhält ſich zur holländiſchen wie 19 : 20, oder nach köllniſchen Richtpfennigen, wie : 65536 : 68985, ſo daß alſo ein holländiſches Aß = 13,47 köllniſche Richtpfennige iſt.

Anmerkung. Es iſt in vieler Rückſicht vortheilhafter, die Vergleichung der Handelsgewichte nach köllniſchen Richt-

Richtpfenningen, als nach holländiſchen Aßen zu machen; theils weil das holl. Troygewicht, außer Holland und den Niederlanden, in keiner legalen Kopie exiſtirt; theils, weil die Vergleichung nach köllniſchen Richtpfenningen um vieles genauer wird, da überdieß die köllniſche Mark in vielen teutſchen Staaten ächt erhalten iſt, und aufbewahrt wird.

Das neue baierſche Pfund Kramgewicht beträgt 2 Mark, 25864 Richtpfennige köllniſch, d. i. 156936 köllniſche Richtpfennige oder 11647,638 holl. Aß, oder 560 franz. Grammes.

4) Das neue baierſche Apothekergewicht beträgt, nach einer königlichen Verordnung vom 30 Jänner 1811, genau 100887,12 kölln. Richtpfennige, oder 7487,7409 holl. Aß oder 360 franz. Grammes, ſo daß

14 Apothek. Pfund = 9 Pfund Handelsgewicht
und 7 Loth Apoth. Gew. = 6 Loth bürgerl. Gewicht.

5) Eintheilung des baieriſchen Handelsgewichtes.

Zentn.	Pfund.	Unze.	Loth.	Quintl.	Pfenninggewicht.	Gran.
1	100	1600	3200	12800	51200	768000
	1	16	32	128	512	7680
		1	2	8	32	480
			1	4	16	240
				1	4	60
					1	15

* Eine Laſt iſt = 2 Tonnen, 1 Tonne = 2 Ztr.

6) Eintheilung des baierſchen Apothekergewichts.

Pfund.	Unze.	Loth.	Drachme, Quintl.	Scrupel.	Gran.
1	12	24	96	288	5760
	1	2	8	24	480
		1	4	12	240
			1	3	60
				1	20

* Ein Gran hat beynahe die Schwere eines Getreidkorns. Bey flüſſigen Dingen rechnet man einen Löffel voll für ein Loth, 1 Tropfen für 1 Gran, 1 Maß für 48 Unzen oder 4 Pfund.

7) Ein-

7) Eintheilung des baierſchen Münzgewichtes oder der Köllnermark.

Mark.	Unze.	Loth.	Karath.	Quintl.	Pfenn.	Gran.	Eſchen (Aß)	Richtpfennig.
1	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1	2	3	8	32	36	544	8192
		1	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$
				1	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024
					1	$1\frac{1}{8}$	17	256
						1	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$
							1	$15\frac{1}{17}$

* Das Silber wird nach Marken gerechnet (1 Mark iſt ein halbes Pfund), und kommt übrigens mit dem Handelsgewicht überein.

IV. Papierrechnung. (Schreibpapier)

§. 375.

Ballen.	Rieß.	Buch.	Bogen.
1	10	200	4800
	1	20	480
		1	24 Bogen

* Ein Buch Druckpapier hält 25, ein Rieß 500, ein Ballen 5000 Bogen.

V. Maße nach Stücken.

§. 376.

Schock (Schober)	Schilling.	Mandel.	Dutzend.	Stücke.
1	2	4	5	60
	1	2	$2\frac{1}{2}$	30
		1	$1\frac{1}{4}$	15
			1	12

D. Zeitrechnung.

§. 377.

Das mathematiſche Jahr beſteht aus 365 Tagen, 5 Stunden, 48′, 37″.

Man

Man theilt das Jahr ein in 52 Wochen, oder 12 Monathe; ein Monath in 30 Tage (im Durchſchnitte); die Woche in 7 Tage; den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, die Sekunde in 60 Terzen. — Alle vier Jahre iſt ein Schaltjahr von 366 Tagen, wovon aber die Sekularjahre in etwas abgehen.

Eine Lunation, d. i. die Zeit von einem Neumond zum andern beträgt 29 Tage, 12 Stunden, 44 Minuten, 3 Sekunden.

E. Geldrechnung.

§. 378.

1) Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber oder Kupfer, oder beyden legiren oder beſchicken, heißt ſolche Metalle zuſammenſchmelzen.

2) Feines Gold oder Silber heißt, das keinen Zuſatz hat. Da 1 Mark 16 Loth oder 24 Karath enthält, ſo heißt, z. B. 12löthiges Silber, oder 22 karathiges Gold, wenn in jedem Stück Silber 12 Theile fein, und in jedem Stücke Gold 22 Theile fein ſind, daher ihr Gehalt durch $\frac{12}{16}$, $\frac{22}{24}$ ausgedrückt wird.

3) Es giebt reelle und fingirte Münzen. Die reellen oder gangbaren Münzen ſind wirklich geprägte Geldſtücke. Unter fingirten oder Rechnungsmünzen verſteht man den Maßſtab für den Kaufwerth der Dinge, und alſo auch der gangbaren Münzen. Fingirte Münzen ſind z. B. in England das Pfund Sterling, in Frankreich der Livre, in Teutſchland der Gulden, Reichsthaler.

4) Der Werth der reellen Münzen hängt von der Güte und von dem Gewichte des darin enthaltenen Metalls ab, zu deſſen Beſtimmung in Teutſchland das Köllniſche Markgewicht angewendet wird.

5) Eine Mark reines Silber oder Gold heißt eine feine Mark, oder eine Mark fein; und eine Mark des legirten oder beſchickten edlern Metalls heißt eine rauhe Mark, oder eine Mark rauh.

6) Das Gewicht einer Münzſorte heißt ihr Schrot, und ihr Gehalt an edlerm Metall, das Korn. Durch den Münzfuß wird Schrot, Korn und Kaufwerth einer Münze beſtimmt.

7) Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derſelbe die Beſchaffenheit der Münze verſichert. Die Bildſeite heißt die Hauptſeite, Avers; die Schrift- oder Wappenſeite heißt Revers (Rückſeite).

8) Die merkwürdigſten Münzfüße für Deutſchland ſind

a) im Golde

α) der rheiniſche Goldguldenfuß, 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karath, 6 Grän Goldes, und 3 Karath Silber; nach dieſem Fuße ſind die baierſchen Karolinen und Maxd'ors geprägt.

β) der Dukatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark, von 23 Karath, 8 Grän Gold, und 2 Grän Silber.

b) Im Silber

α) der Graumanniſche oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen, und 1764 erneuert; die feine Mark Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 Gulden.

β) der Conventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu 13⅓ Thaler, oder 20 fl. im Jahr 1753 von Oeſterreich, Baiern und Sachſen angenommen. Doch nur in öſterreichiſchen und ſächſiſchen Landen kurſiren die Silbermünzen nach dieſem Fuße; denn für Baiern und das ehmals ſogenannte Reich gilt

γ) der 24 Guldenfuß (1766). Die feine Mark zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden, oder 10 Conventionsthaler.

9) Verzeichniß der in Baiern gewöhnlichſten Goldmünzen.

	Schrot in köll. Rpf.	Korn in köll. Rpf.	Courantwerth fl.	kr.
Ein baierſcher Dukate	978	964	5	24
Eine baierſche Karolin	2734	2108	11	—
Eine halbe detto *	1367	1054	5	30
Ein Maxd'or	1822	1405	7	20
Ein halber detto	911	702,5	3	40
Ein franz. Ovalſchild, oder Sonnen-Louisd'or von 1726 *	2294,3	2071,3	11	—
Eine ältere detto, und andere Louisd'or, dann Doppien u. Frd'or.	1870	1696	9	—
Ein Louisd'or ſeit 1785 * . . .	2173	2058,7	10	48
Ein Souveraind'or	3161	2898	16	—
Ein halber detto	1580,5	1449	8	—
Eine vierfache ſpaniſche Doppie .	7544	6968	36	—
Eine zweifache detto	3772	3484	18	—
Eine einfache detto	1886	1742	9	—
Ein Goldgulden (unbiegſam) . .	979	702,5	3	40

Anmerkung. 1) Kaiſerliche, Kremnitzer, Holländer, Salzburger und alle vollgewichtige Reichsdukaten ſind den baierſchen an Werth gleich. Die päbſtlichen Dukaten gelten aber nur 5 fl. 8 kr. Die Florentiner 5 fl. 14 kr.

Anm. 2) Für jeden abgängigen Gran werden von jedem Dukaten, der nicht 65 alte pariſer Gran hält, 5 kr., bey den mit * bezeichneten $4\frac{1}{2}$ kr., und bey den zu geringen Karolinen und übrigen Goldmünzen 4 kr. abgezogen.

10) Silbermünzen.

	Schrot.	Korn.	fl.	kr.	pf.
Ein ehemaliger franzöſiſcher Laubthaler .	8275,2	7413,3	2	45	—
— halber detto	4137,6	3706,7	1	22	2
— Kronenthaler	8226,2	7142	2	42	—
— halber detto	4113	3571	1	21	—
— Baierthaler oder Konventionsthaler, ſo wie ein franz. Louis blanc. . . .	7874	6561,6	2	24	—
— halber detto	3937	3280,8	1	12	—
— Napoleonsthaler	7005	6304,5	2	19	$\frac{7}{8}$
— Kopfſtück	1873	1093	—	24	—
— halbes Kopfſtück	1093	546	—	12	—
— Reichsthaler	—	—	1	30	—
— franz. Livre	1397	1229	—	27	2
— Franc	1491	1260,9	—	27	$3\frac{3}{8}$

Ueber-

Ueberdieß giebt es noch aus Silber: Sechskreuzer-, Groſchen- und Kreuzerſtücke; aus Kupfer, Pfenninge und Häller.

11) Eintheilung eines Gulden.

Gulden	Fünfz.	Zwölfer	Sechſer	Batzen.	Groſch.	Kreuz.	Pfenn.	Häller.
1	4	5	10	15	20	60	240	480
	1	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	5	15	60	120
		1	2	3	4	12	48	96
			1	$1\frac{1}{2}$	2	6	24	48
				1	$1\frac{1}{3}$	4	16	32
					1	3	12	24
						1	4	8
							1	2

Zweyter Artikel.

Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Reduciren und Reſolviren.

§. 379.

Erklärungen.

1) Zahlen oder Einheiten einer niedrigern Ordnung auf Einheiten einer höhern Ordnung bringen (z. B. Kreuzer auf Gulden) heißt **reduciren**. Hingegen Einheiten einer höhern Ordnung in die enthaltenen Einheiten einer niedrigern Ordnung verwandeln (z. B. Zentner in Lothe), heißt **reſolviren**. Das erſte geſchieht durch die Diviſion, das zweyte durch die Multiplikation.

2) Jene Zahl, welche angiebt, wie viele Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der höhern geben, heißt die Reductions- oder Auflöſungszahl; z. B. iſt für Zentner und Lothe die Reductionszahl 3200, weil 3200 Lothe = 1 Zentner ſind.

* Die Reductionszahlen müſſen aus den vorangeſchickten Tabellen gefunden werden.

§. 380.

Das Reſolviren geſchieht auf folgende Art:

1) Man multiplicirt die höhere Ordnung mit der Auflöſezahl der nächſt niedrigen, oder ſogleich der niedrigſten Ordnung, in welche man reſolviren will.

2) Beſteht das zu reſolvirende Ganze ſelbſt aus mehrern Unterabtheilungen, ſo wird die höchſte Ordnung mit der Auflöſezahl der nächſt niedrigen multiplicirt, und zum Produkte werden die ſchon gegebenen Einheiten, welche mit der vorigen Auflöſezahl gleichen Namen haben, ſogleich im Sinne, hinzugezählt.

Beyſpiele. I. Wie viele Pfunde, Lothe, Quintl. ſind in 6 Zentnern enthalten?

Operation.

6 Ztr. × 100*	* Auflöſezahl in Pfunde.
600 Pfd. × 32**	** —— in Lothe.
19200 Loth × 4***	*** —— in Quintl.
76.800 Quintl.	

II. Wie viele Kreuzer, Pfenninge, Häller enthält ein franz. Laubthaler?

Operation.

a)	b)	c)
2 fl. 45 kr.	165 kr.	660
60	4	2
120	660 Pf.	1320
45		
165 kr.		

III. Wie viele Kubiklinien ſind in 3 Kubikfuß, 9 Kubikzoll (Duodec. M.) enthalten?

Antwort 8'973504 Kubiklinien.

Anmerkung. Bey dem Reſolviren iſt die Vermehrung nur ſcheinbar, indem blos der Umfang, nicht aber der Werth des Ganzen vergrößert wird; denn 3 fl. ſind nicht mehr als 180 kr. = $\frac{180}{60}$ fl.

§. 381.

§. 381.

Das Reduciren iſt dem Reſolviren gerade entgegengeſetzt (weßwegen ſich auch beyde zur Probe dienen), und geſchieht alſo:

Man dividirt die niedrigern Einheiten durch die Reductionszahl der nächſt höhern Ordnung. Der Reſt zeigt Einheiten der niedrigern, der Quotient Einheiten der nächſt höhern Ordnung an. Letztere werden dann auf die nemliche Art auf die enthaltenen höhern Ordnungen zurückgeführt.

Beyſpiele.

I. Wie viele fl., kr., pf. hl. ſtecken in 123005 hl.?

Operation. 123005 hl. : 2 = 61502 pf. 1 hl.
61502 pf. : 4 = 15375 kr. 2 pf.
15375 kr. : 60 = 256 fl. 15 kr.

Alſo 123005 hl. = 256 fl. 15 kr. 2 pf. 1 hl.

II. Wie viele Kubikruthen, Kubikfuß, Kubikzoll, Kubiklinien ſind in 13456'978.340 Kubiklinien (decim. Maß) enthalten?

Operation. Da die Reductionszahl durchaus 1000 iſt, ſo kann die Reduction durch ein bloßes Abſchneiden von je drey Nullen geſchehen; alſo

13/456/978/340 K.''' = 13 K.°, 456 K.', 978 K.'', 340 K.'''

* Auf gleiche Weiſe ſind:

3/67/49/08 □''' dec. = 3 □°, 67 □', 49 □'', 08''' □.

II. Addition.

§. 382.

Aufgabe. Benannte Zahlen, verſchiedner Ordnungen zu addiren.

Auflöſung. Man ſortirt die Summanden, d. h. ſetzt gleichartige Sorten unter gleichartige. Die Addition beginnt dann bey der niedrigſten Sorte. Enthält die Summe derſelben ſchon Einheiten der nächſt höhern Ordnung, ſo werden ſie durch die Reduction herausgefunden, und zur Summe der nächſten Sorte hinübergezählt. — So rückt

man

man nun bis zur höchſten oder letzten Sorte vor, bey welcher keine fernere Reduction nothwendig iſt.

Beyſpiele.

I. Die Summe folgender Geldpoſten zu finden.

	229 fl. +	35 kr. +	2 pf. +	1 hl.
	149	28	3	1
	520	49	3	1
	99	16	2	—
	997	128	10	3
Summe =	999 fl.	10 kr.	3 pf.	1 hl.

* Das Additionszeichen, wodurch die Glieder eines Summands verbunden ſind, wird gewöhnlich nicht angeſchrieben.

II.	15 Jahre	10 Monathe	20 Tage	10 Stunden
	28	11	27	23
	14	9	21	22
	12	5	18	19
Summe =	72 J.	1 M.	29 T.	2 St.

III. Subtraction.

§. 383.

Aufgabe. Benannte Zahlen zu ſubtrahiren.

Auflöſung. 1) Man ſortirt die Ordnungen des Minuends und Subtrahends, und zieht die des Letztern von jenen des Erſtern, von der niedrigſten Sorte angefangen, der Reihe nach ab.

2) Kann man bey einer Sorte im Minuend nicht abziehen, ſo borgt man bey der nächſt höhern Ordnung eine Einheit, und löſt ſie in Theile der niedrigern Sorte auf, welche man dann zu den ſchon vorhandenen addirt.

3) Manchmal fehlen im Minuende die niedrigern Ordnungen ganz; man borgt dann eine Einheit der höchſten Ordnung, und repartirt ſie ſo unter die fehlenden Sorten, daß man überall abziehen kann.

Bey-

Beyſpiele. I. Von 25 fl. 36 kr. 3 pf. 1 hl. wurden ausgegeben 12 fl. 48 kr. 2 pf. Was iſt der Reſt?

Operation.

	25 fl.	36 kr.	3 pf.	1 hl.
	—(12	48	2	—)
Reſt .. =	12 fl.	48 kr	1 pf.	1 hl.

Probe durch die Addition.

25 fl. 36 kr. 3 pf. 1 hl.

II. Von 16 Zentnern Kaffee wurden 13 Ztr. 49 Pfund, 30 Loth, 3 Quint. verkauft; wie viel iſt noch übrig?

Operation.

	16 Ztr.	$\overset{99}{—}$ Pfund	$\overset{31}{—}$ Loth	$\overset{4}{—}$ Qtl.
	—(13	49	30	3)
Reſt =	2 Ztr.	50 Pfund	1 Loth	1 Qtl.

* Die Addition wird durch die Subtraction geprüft a) bey zwey Summanden, indem man den einen von der Summe abzieht, worauf der andere als Reſt bleibt; b) bey mehr als zwey Summanden, indem man ſie auf zwey bringt; oder c) durch die auflöſende Subtraction (vergl. §. 24).

§. 384.

Bey Berechnung der Daten nach Jahr, Monath, Tag, Stunde ... hat man einige Eigenheiten zu merken. Es wird nemlich, wenn das Jahr, Monath, der Tag, die Stunde noch nicht verfloſſen iſt, allezeit das vorhergehende Jahr, Monath u. ſ. w. angeſchrieben. Die Monathe werden, ihrer Ordnung im Kalender gemäß, mit Ziffern ausgedrückt, wobey man zugleich bemerken muß, ob es ein Monath von 30 oder 31 Tagen ſey.

Das	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
	Jänner 31 Tage	Februar 28 (29)	März 31	April 30	May 31	Junius 30	Julius 31	Auguſt 31	September 30	October 31	November 30	December 31

Die

Die Stunden werden von Mitternacht, bis wieder zu Mitternacht gezählt; z. B. 1799 den 3. May Abends halb 8 Uhr, wird mathematiſch angeſchrieben: 1798 Jahr + 4 Monath + 2 Tag + 7 St. + 30 Minuten.

Im Gegentheile müſſen ſo geſchriebene Daten jederzeit ein Jahr, Monath, einen Tag u. ſ. w. höher geleſen werden; die niedrigſte Ordnung wird geleſen wie ſie ſteht.

Beyſpiele.

I. Ein Mann wurde geboren im Jahr 1712 den 18. Februar, und ſtarb 1809 den 19. März; wie alt iſt er geworden?

Operation. 1808 J. + 2 M. + 19 T.
— (1711 1 18)
Er wurde alſo alt: 97 J. 1 M. 1 Tag.

Da dieß kein Datum iſt, ſo wird geleſen, wie ſteht.

II. Ein Jüngling ſtarb den 30 Auguſt 1808 in einem Alter von 19 Jahren, 5 Mon. 14 Tagen. Wann war er geboren worden?

Operation. 1807 J. + 7 M. + 30 T.
— (19 5 14)
1788 J. + 2 M. + 16 Tag.

Alſo im Jahr 1789 den 16 März.

III. Karl der Große ward im Jahr 800 den 25. Dec. zum römiſchen Kaiſer gekrönt; wie viel ſchrieb man, als gerade noch einmal ſo viele Zeit nach Chriſti Geburt verfloſſen war, (als das Datum dieſer Begebenheit beträgt)?

Operation. 799 J. + 11 M. + 25 T.
799 + 11 + 25
1599 J. + 11 M. + 20 T.

Alſo 1600 den 20 December.

IV. Multiplikation.

§. 385.

Die Multiplikation kann auf zweyerley Art verrichtet werden; 1) mit Reſolvirung, oder 2) ohne dieſelbe.

1) Mit Reſolvirung multiplicirt man alſo: Man bringt alle Sorten des Multiplikands auf den Ausdruck der niedrigſten Ordnung, (§. 380), und multiplicirt das ſo reſolvirte Multiplikand mit dem (ebenfalls reſolvirten) Multiplikator, (wenn dieſer eine gleich benannte Zahl iſt); am Ende muß das Produkt durch die Reduction auf ſeine enthaltenen höhern Ordnungen gebracht werden.

Z. B. Was beträgt der Jahrlohn eines Dieners, welcher monatlich 16 fl. 49 kr. 3 pf. erhält? — Antwort. Das Zwölffache hievon.

Operation.

(16 fl. 49 kr. 3 pf.) × 12 = 4039 pf. × 12 = 48.468 pf.

48.468 pf. = 12.117 kr. = 201 fl. 57 kr. jährlicher Lohn.

2) Ohne Reſolvirung verfährt man auf folgende Weiſe. Man rückt mit dem Multiplikator von der niedrigſten Sorte des Multiplikands bis zur höchſten vor, und multiplicirt jede Sorte eigends; am Ende ſucht man die in dem Produkte einer niedrigern Sorte enthaltenen höhern Einheiten durch die Reduktion heraus. — Dieſe Art iſt die kürzere, und kann überall angewendet werden, wenn der Multiplikator eine ſtumme Zahl iſt.

Obiges Beyſpiel wird nach dieſer Art alſo berechnet:

16 fl.	49 kr.	3 pf.
		12
192 fl.	588 kr.	36 pf.
= 201 fl.	57 kr.	—

§. 386.

Eine beſondere Bemerkung verdienen jene Rechnungen, wo man aus Länge, Breite und Höhe (welche Dimenſionen in den verſchiedenen Unterabtheilungen des Längenmaßes gegeben ſind) den Flächen- oder Körperinhalt finden ſoll. Man bringt nemlich in den Factorn alles auf die kleinſte, gemeinſchaftliche Benennung. Aus zwey Dimenſionen ergiebt ſich dann der Quadrat, aus drey Dimenſionen der Kubikinhalt, welcher nach dem Decimal- oder Duodeci-

mal-

mal⸗ Quadrat⸗ oder Kubikmaß auf die enthaltenen höhern Einheiten zu reduciren iſt.

Beyſpiele.

I. Welches iſt der kubiſche Inhalt eines Zimmers, das 2 Ruthen 8 Fuß lang, 2 Ruthen breit, und 1 Ruthe 6 Fuß duodec. M. hoch iſt?

Operation. $2^{\circ}, 8' = 32'$ Länge
$2^{\circ},\quad = 24'$ Breite
$1^{\circ}, 6' = 18'$ Höhe.

$32' \times 24' = 768$ □ Fuß Grundfläche

768 □$' \times 18' = 13.724$ Kubikfuß — Kubiſcher Inhalt des Zimmers $= 7$ K.°, 1628 K.'.. Dd. Maß.

II. Welches iſt der Kubikinhalt eines Holzſtoßes, welcher $4^{\circ}, 3'$ lang, $2^{\circ}, 4'$ hoch iſt, und eine Scheiterlänge von $3', 5''$ dec. M. hat?

Auflöſung. $4^{\circ}, 3' = 430''$ und $3', 5'' = 35''$.
$2^{\circ}, 4' = 240''$

Alſo $430'' \times 240'' \times 35'' = 3612000$ K.'' $= 3$ K.°, 612' K.

V. Diviſion.

§. 387.

Die Diviſion kann ebenfalls auf zweyerley Art verrichtet werden.

1) Mit Reſolvirung des Dividends auf den Ausdruck der niedrigſten Sorte, (und auch des Diviſors, wenn dieſer eine benannte Zahl iſt). Die Diviſion geht dann, wie mit ganzen Zahlen. Iſt der Diviſor eine ſtumme Zahl, ſo wird der Quotus mit dem Dividend gleichnamig, und muß dann durch Reduction auf die allenfalls enthaltenen höhern Ordnungen gebracht werden. Iſt aber der Diviſor benannt, ſo wird der Quotus in der Regel eine ſtumme Zahl.

2) Ohne Reſolvirung dividirt man alſo: Man dividirt mit dem Diviſor, welcher hier allemal eine ſtumme Zahl ſeyn muß, zuerſt die höchſte Sorte; der allenfallſige Reſt wird in Theile der nächſt niedern Sorte aufgelöſ't, und zu den ſchon gegebenen Theilen addirt, und die Summe

auf

auf ein neues dividirt. So rückt man denn bis zur letzten oder niedrigſten Ordnung vor, und ſchreibt die Quotuſſe, mit der ihnen gehörigen Benennung, beyſeite.

* Iſt der Diviſor einmal benannt, ſo macht man vor allen Dividend und Diviſor gleichartig, und dividirt, wie mit ganzen Zahlen.

Beyſpiele. I. Es ſollen 5640 fl. 37 kr. unter 44 Perſonen gleich vertheilt werden: was trifft jede Perſon?

Operation.

a) mit Reſolvirung.

(5640 fl. 37 kr.) : 44 =
338437 kr. | 7691 kr. 3 pf.
(44) = 128 fl. 11 kr. 3 pf.
308
304
264
403
396
77
44
33 kr. = $\frac{132}{44}$ pf. = 3 pf.

b) ohne Reſolvirung.

$\frac{5640}{44}$ fl. = 128 fl.
Reſt 8 fl. + 37 kr. = 517 kr.
$\frac{517}{44}$ kr. = 11 kr.
Reſt 33 kr. = 132 pf.
$\frac{132}{44}$ = 3 pf.
Alſo Quotus: 128 fl. 11 kr. 3 pf.

Alſo iſt der Antheil einer Perſon: 128 fl. 11 kr. 3 pf.

II. Wie oft kann man von 3 Ztr. 60 Pfund Zuckers 9 Lothe verkaufen?

Auflöſung. (3 Ztr. 60 Pf.) : 9 Loth = 360 Pf. : 9 Loth = 11520 Loth : 9 Loth = 1280 Mal.

Anmerkung. Die Multiplikation wird durch die Diviſion, und dieſe durch jene geprüft.

a) 1280 × 9 Loth = 11520 Loth = 3 Ztr. 60 Pfund.

b) (§. 385. 1.)

201 fl. 57 kr.
12 | 16 fl.
81
72
9 fl. + 57 kr. = 597 kr.
$\frac{597}{12}$ kr. = 49.

§. 388.

§. 388.

In den Beyſpielen, wo man aus dem Flächeninhalte und der Breite — die Länge, und verkehrt; oder aus dem Kubikinhalt und einer Dimenſion, die Fläche; oder endlich aus dem Kubikinhalte und der Fläche die dritte Dimenſion finden ſoll, muß jederzeit die Diviſion mit der Reſolvirung angewendet werden. (vergl. §. 48. III.)

Beyſpiele.

I. Die Grundfläche eines Zimmers iſt 768 □ Fuß duodec. M.; die Breite 2 Ruthen. Welches iſt die Länge?

Operation. $2^{\circ} = 24$ Fuß.

$$\frac{768}{24'} \square' = 32' = 2^{\circ}, 8'.$$

II. Der Kubikinhalt eines Salletes iſt 47 Kubikruthen, 545 Kubikfuß, 830 Kub. Zoll dec. Maß; ſeine Höhe iſt $3^{\circ}, 0', 9''$; die Breite $3^{\circ}, 4', 5''$. Welches iſt die Länge?

Operation. Kubikinhalt = 47'545830 Kub. Zoll.

Grundfläche = $309'' \times 345'' = 106605$ □''.

```
47545830   | 446'' = 4°, 4', 6'' Länge.
(106605)   |
426420
------
 490383
 426420
 ------
  639630
  639630
  ------
       0
```

III. Wie viele baierſche Klafter hält ein Holzſtoß, welcher 21' (Duodec.) in der Länge, 12' in der Höhe, und 4 Fuß Scheiterlänge hat?

Operation. Der Diviſor iſt 126 Kub. Fuß (§. 371. 3.)

$12' \times 21' \times 4' = 1008$ Kub. Fuß. — Inhalt des Holzſtoßes.

$\frac{1008}{126} = 8$ baierſche Klafter.

Anmerkung. Hieher gehören auch die Aufgaben g und h. §. §. 107, 108.

Zwey:

Zweytes Hauptſtück.

Anwendung der Proportionslehre auf benannte Zahlen.

Erſter Artikel.

Anwendung der arithmetiſchen Proportion.

§. 389.

Zur arithmetiſchen Proportion werden ſolche benannte Zahlen erfordert, welche immer um eine gleiche Differenz fallen oder ſteigen. Im gemeinen Leben giebt es nicht gar viele Größen, worin ein ſolches arithmetiſches Fallen oder Steigen Statt findet. Nur verſchiedene Zeitdifferenzen ſtehen in einem arithmetiſchen Verhältniſſe; daher hat die arithmetiſche Proportion ihre meiſte Anwendung bey der Zeitrechnung.

Erklärungen.

I. Man zählt nach vier Hauptepochen.

1) Von Erſchaffung der Welt (a. M. C.)
2) Vom Anfange der Olympiſchen Spiele (Olympiadum).
3) Von Erbauung Roms (ab. V. C.)
4) Nach Chriſti Geburt (à Chr. N.)

Es fällt aber das Jahr (1) der chriſtlichen Zeitrechnung — nach der wahrſcheinlichern Rechnung — überein

mit dem Jahr 4000 M. C.
— — — 776 Olymp. (oder mit dem letzten Jahre der 194ſten Olympiade).
— — — 750 V. C.

II. Die Türken zählen von der Flucht Mahomeds, welche auf das Jahr 622, 16. Jul. der chriſtlichen Zeitrechnung fällt, ſo daß das erſte türkiſche Jahr = dem 622 Chr. N. Sie haben aber nur Mondenjahre von 354 Tagen, ſo daß

33 türk.

33 türk. = 32 gemeinen oder Sonnenjahren. — Um alſo türkiſche Jahre auf gemeine, und gegenſeitig, zu reduciren, muß man erſt das Verhältniß zu Hülfe nehmen: 33 türk. Jahre = 32 gemeinen Jahren. Bleibt bey der Diviſion mit 33 oder 32 ein Reſt, ſo kann man den Quotus um 1 höher anſetzen, weil auf jedes gemeine Jahr zwey türkiſche Jahre, d. i. das Ende des einen und der Anfang des andern, treffen.

§. 390.

Wie man aus dieſen Angaben die Jahre der einen Epoche in Jahre einer andern verwandeln könne, lehren folgende Beyſpiele.

I. Konſtantin der Große wurde im Jahr 306 Ch. N. zum römiſchen Kaiſer gewählt; das wievielte Jahr nach Erbauung Roms war dieſes?

Auflöſung.

A. Chr.		A. Chr.		V. C.		V. C.
1	—	306	=	750	—	x

$$x = 1056 - 1 = 1055 \text{ V.C.}$$

Anmerkung. Da das gegebene Datum: 306 nach der gemeinen chriſtlichen Aera gerechnet iſt, dieſe aber erweislich um 4 Jahre zu ſpät anfängt, ſo ſollte 306 — und ſo jedes gegebene chriſtliche Jahr noch um 4 — vermehrt werden. Konſtantin wurde alſo Kaiſer im Jahr V. C. 1059.

II. Im Jahr der gemeinen chriſtlichen Zeitrechnung 1453 eroberte Muhamed II. Konſtantinopel; in welchem Jahre der Türken geſchah dieſes?

Auflöſung. $622 - 1453 = 1 - x$

$$x = 1454 - 622 = 832 \text{ gem. Jahre.}$$

$$= \frac{832 \times 33}{32} = 858 \text{ türk. Jahre.}$$

Alſo im Jahre der Türken 858.

III. Vorausgeſetzt, daß, wenn es in Regensburg 10 Uhr 3 Minuten Vormittags iſt, London 9 Uhr 17 Min. habe: Wie viel iſt es in London, wenn Regensburg halb drey Uhr Nachmittag hat?

Auf-

Aufloſung.

$$\begin{array}{cccc} R. & R. & L. & L. \\ 10^{\circ}, 3' & - \; 14^{\circ}, 30' = & 9^{\circ}, 17' & - \; x. \end{array}$$

$$x = (23^{\circ}, 47') - (10^{\circ}, 3') = 13^{\circ}, 44'$$

alſo iſt es in London 44 Minuten über 1 Uhr Nachmittags.

IV. Als Kajus Hochzeit hielt, war er 25 Jahre, 7 Mon. 15 Tage; ſeine Braut aber 24 Jahr 2 Mon. alt. Wie viele Jahre zählte Kajus an ihrem Sterbetag, da ſie in einem Alter von 50 Jahr 5 Mon. 19 Tagen ſtarb?

Aufloſung.

$$\begin{array}{cccc} Br. & Br. & K. & K. \\ 24\,J.\,2\,M. & - \; 50\,J.\,5\,M.\,19\,T. = & 25\,J.\,7\,M.\,15\,T. & - \; x \end{array}$$

$$x = \begin{cases} 76\,J. & 1\,M.\;4\,T. \\ -24 & 2 \end{cases}$$

$x = 51\,J.\;11\,M.\;4$ Tage . . ſo alt war Kajus.

Zweyter Artikel.

Anwendung der geometriſchen Proportion.

§. 391.

Die geometriſche Proportion findet im gemeinen bürgerlichen ſowohl, als im wiſſenſchaftlichen Leben des Mathematikers überaus häufige Anwendung; denn es giebt eine Menge benannter Zahlen, welche in einem geometriſchen Verhältniſſe ſtehen, z. B. Waaren der nemlichen Art und ihre Preiſe, Kapitalien und Zinſen u. ſ. w. Man kann aber ein doppeltes Verhältniß benannter Zahlen, ein gerades und ein umgekehrtes, unterſcheiden.

I. Das Verhältniß zweyer Größen A und B iſt gerade, wenn mit dem Wachsthume von A auch der von B, und mit der Abnahme von A auch jene von B verbunden iſt.

*) Wo immer in Zukunft von Verhältniſſen und Proportionen die Rede ſeyn wird, ſind immer geometriſche zu verſtehen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angemerkt wird.

II. Das Verhältniß zweyer Größen C und D iſt umgekehrt, wenn mit dem Wachsthume von C das Abnehmen von D, und mit dem Abnehmen von C das Wachſen von D verbunden iſt.

§. 392.

Geſetze der geraden Verhältniſſe.

I. Wenn zwey Größen A und B in einem ſolchen (geraden) Verhältniſſe ſtehen, daß

a, aq Theile von A

b, bq Theilen von B entſprechen, (wo q das multiplikative Wachſen oder Abnehmen von a und b, oder den Verhältnißexponenten bezeichnet): ſo ſind im Allgemeinen, wenn $q = \frac{m}{n}$ geſetzt wird — wobey m, n alle möglichen Zahlen vorſtellen kann. —

$$\frac{m}{n} \text{ a Theile von A} = \frac{m}{n} \text{ b Theilen von B.}$$

II. Wenn in dem geraden Verhältniſſe zweyer Größen A und B

a, b Theile von A

α, β Theilen von B, der Ordnung nach, ſo entſprechen, daß $a = \alpha$ d. i. $\alpha = aq$ und $\frac{\alpha}{a} = q$

$$b = \beta \qquad \beta = bq \text{ — } \frac{\beta}{b} = q$$

ſo ſind die Theile von A mit den ihnen entſprechenden Theilen von B gerade proportionell; d. i.

$$a : \alpha = b : \beta.$$

Beweis. $\frac{\alpha}{a} = q$

$$\frac{\beta}{b} = q$$

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$$

$a . b = \alpha . \beta ..$ folglich nach §. 332. II.

$$\alpha : a = \beta : b$$

oder $a : \alpha = b : \beta$. §. 393.

§. 393.

Geſetze der umgekehrten Verhältniſſe.

I. Wenn zwey Größen, C und D, ſo im umgekehrten Verhältniſſe ſtehen, daß

d, dq Theilen von C

e, $\frac{e}{q}$ Theile von D entſprechen:

ſo geben auch $\frac{m}{n}$ d Theile von C.. $\frac{n}{m}$ e Theile von D.

Denn es ſey wieder $q = \frac{m}{n}$

ſo iſt $d.q = \frac{m}{n} d$

und $\frac{e}{q} = \frac{e}{\frac{m}{n}} = e \times \frac{n}{m} = \frac{n}{m} e.$

II. Wenn in dem umgekehrten Verhältniſſe zweyer Größen, C und D,

d, e Theilen von C

δ, ε Theile von D, ſo entſprechen,

daß $\delta = dq$, und $\varepsilon = \frac{e}{q}$ iſt:

ſo ſtehen die Theile von C mit den ihnen entſprechenden Theilen von D in umgekehrter Proportion;

d. i. : $d : \delta = \varepsilon : e$.

Beweis. $\delta = dq$ und $\varepsilon = \frac{e}{q}$ (nach der Vorausſetzung)

folglich $\frac{\delta}{d} = q$ und $\frac{e}{\varepsilon} = q$.

alſo $\frac{\delta}{d} = \frac{e}{\varepsilon}$

und $\delta\varepsilon = de$; folglich nach §. 332. II.

$\delta : d = e : \varepsilon$

oder: $d : \delta = \varepsilon : e$.

§. 394.

Alle benannten Größen, welche in einem geometriſchen Verhältniſſe ſtehen, laſſen ſich auf die allgemeine Benennung: Urſache und Wirkung, zurückführen.

Gg Ein

Ein Ding, welches ein zweytes hervorbringt, oder rückſichtlich ſeiner Quantität beſtimmt, heißt in der Mathematik die Urſache deſſelben. Das Hervorgebrachte oder ſo Beſtimmte heißt die Wirkung. Z. B. das größere oder kleinere Kapital iſt die Urſache des größern oder kleinern Zinsertrages. Die Arbeiter ſind die Urſache; das Werk, das ſie zu Stande bringen, iſt die Wirkung. Die Menge, Größe, Schwere der Waaren, oder die Anzahl der Stücke beſtimmt die Größe des Preiſes. Vergleicht man alſo gleichartige Urſachen nach ihren gleichartigen Wirkungen, ſo gilt allgemein der Satz: Gleichartige Urſachen verhalten ſich wie ihre Wirkungen, und umgekehrt. — d. i. Wenn die Urſache c die Wirkung e, und die Urſache C die Wirkung E giebt, ſo wird: $c : C = e : E$ (§. 392.), welches hiemit die allgemeine Form für alle geraden Proportionen iſt.

§. 395.

Das Verfahren, aus drey gegebenen Sätzen (tribus positionibus) einer geometriſchen Proportion das vierte Glied zu finden, heißt die Regel de Tri; und zwar

1) die gerade, wenn die verglichenen Größen der Proportion in einem geraden,

2) die verkehrte, wenn ſie in einem umgekehrten Verhältniſſe ſtehen. — Doch haben beyde eine und die nemliche Form; nur die Ordnung der Glieder iſt verſchieden.

Anmerkung. Man nennt die Regel de Tri wegen ihrer Vortrefflichkeit überhaupt die kaufmänniſche Rechnung, oder die goldene Regel (Regula aurea).

A) Regel de Tri.

§. 396.

Bey Behandlung der Regel de Tri-Aufgaben ſind, wie bey den Gleichungen überhaupt, die drey Momente zu berückſichtigen:

I. Die Formation oder der Anſatz.

II. Die

II. Die Reduction,

III. Die Solution, nebſt der Probe.

I. Formation. In jeder Regel de Tri kommen vier Glieder vor, wovon zwey und zwey gleichartig (homolog) ſind. Ein homologes Paar iſt gegeben, von dem andern Paare wird das zweyte Glied geſucht. Jenes Glied, dem die Frage angehängt wird, heißt das Frageglied; das abgängige aber heißt das unbekannte Glied, wofür x, y, z ſteht. Die Ordnung der Glieder iſt (bey geraden Proportionen), allezeit dieſe: Das Frageglied iſt das zweyte, das unbekannte aber das vierte Proportionsglied. Am erſten Platze ſteht das mit dem Fragegliede, am dritten das mit dem unbekannten gleichnamige Glied (welches zugleich die Beſtimmung zu dem erſten Gliede enthält). Z. B. Die Proportion: 2 Ellen koſten 5 fl., was (wie viele fl.) koſten 8 Ellen, wird angeſchrieben:

$$\begin{array}{ccccccc} E & & E & & fl. & & fl. \\ 2 & : & 8 & = & 5 & : & x. \end{array}$$

Das Frageglied iſt 8 Ellen — das Unbekannte, der Preis dieſer 8 Ellen.

II. Reduction. Für die Reduction der Regel de Tri-Aufgaben gilt die einzige Regel: Man ſtelle zwiſchen homologen Gliedern jene Gleichartigkeit her, welche die Diviſion oder Multiplikation benannter Zahlen (ganzer oder gebrochener) fodert. Sind die beyden erſten Glieder gleichartig, ſo wird ihr Quotus eine ſtumme Zahl, d. h. ihr Verhältniß iſt ein bloßes Zahlenverhältniß, und das unbekannte Glied erhält die Benennung des dritten Gliedes. Beſteht dieſes Glied aus mehrern Unterabtheilungen, ſo kann man die Multiplikation dieſes Gliedes durch den Verhältnißexponenten mit der Reſolvirung oder ohne dieſe verrichten. (§. 385).

Beyſpiele.

a) 1 ℔ : $\frac{7}{8}$ ℔ = 48 kr. : x kr.
$\frac{8}{8}$ ℔ : $\frac{7}{8}$ ℔ = 48 kr. : x kr.

b) 1 Loth : 17 Ztr. = 3 Pf. : x fl.
1 Loth : 17 × 100 × 32 Loth = $\frac{3}{240}$ fl. : x fl.
240 : 17 × 100 × 32 = 3 fl. : x fl.

c) 1 Schfl. : 149 Schfl. 5 Metz. 3 Vierl. 2 Sechz.
= 12 fl. : x fl.
96 Schztl. : 14398 Schztl. = 12 fl. : x fl.
96 : 14398 = 12 fl. : x fl.

III. Solution. Man bringe das erſte und zweyte Glied, wenn ſie nicht Primzahlen ſind, auf das kleinſte Verhältniß, d. h. dividire und verkleinere beyde durch den größten gemeinſchaftlichen Theiler; oder, da ſich das zweyte mit dem dritten Gliede verwechſeln läßt, ſo verkleinere man jedes innere Glied, bey dem es angeht, durch jedes äußere, und wende den Grundſatz an: das Produkt der äußern Glieder iſt dem Produkte der mittlern gleich, d. h. dividire, um x zu erhalten, das Produkt der mittlern Glieder durch das allein ſtehende äußere.

Beyſpiele.

a) 8 ℔ : 7 ℔ = 48 kr. : x kr.
:8) 1 : 7 = 6 kr. : x
x = 7 · 6 = 42 kr.

b) 24$\not{0}$: 17 · 10$\not{0}$ · 32 = 3 fl. : x fl.
:8) 3 : 170 · 4 = 3 fl. : x fl.
:3) 1 : 170 · 4 = 1 fl. : x fl.
x = 680 fl.

c) 96 : 14·398 = 12 fl. : x fl.
:12) 8 : 14·398 = 1 fl. : x fl.

$$x = \frac{14398}{8} = \frac{7199}{4} = 1799 \text{ fl. } 15 \text{ kr.}$$

Die

Die Probe wird dadurch gemacht, daß man entweder

1) zeigt, das Produkt der äußern Glieder ſey jenem der mittlern gleich; oder daß man

2) die ganze Proportion in die identiſche:

$$1 : 1 = 1 : 1$$ verwandelt; oder daß man

3) die Proportion umkehrt, und mit Hülfe des gefundenen vierten Gliedes ein anderes ſucht, das man als unbekannt annehmen will; gewöhnlich nimmt man dazu das mit dem vorhin unbekannten homologe Glied.

Beyſpiele.

a) 8 ℔ : 7 ℔ = 48 kr. : 42 kr.

$$\begin{array}{lllll} :8) & 1 & : 7 & = 6 & : 42 \\ :7) & 1 & : 1 & = 6 & : 6 \\ :6) & 1 & : 1 & = 1 & : 1. \end{array}$$

b) 8 ℔ : 7 ℔ = 48 kr. : 42 kr.

$$8 \cdot 42 = 7 \cdot 48$$
$$336 = 336.$$

c) 7 ℔ : 8 ℔ = 42 kr. : x kr.

$$x = \frac{8 \cdot 42}{7} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ kr.}$$

Anmerkung.

Die Regel de Tri-Aufgaben, worin das erſte Glied 1 iſt, ſind bloße Multiplikations-, jene, worin das zweyte Glied = 1 iſt, bloße Diviſions-Beyſpiele.

§. 397.

Regel de Tri-Aufgaben.

I. Wenn 65 Ztr. 130 fl. koſten, was 8 Ztr.?

Auflöſung. 65 Ztr. : 8 Ztr. = 130 fl. : x fl.

$$x = \frac{130 \times 80}{65} = \frac{10 \times 80}{5} = 160 \text{ fl.}$$

II. Wenn ich mir in $3\frac{1}{2}$ Tag $3\frac{3}{4}$ fl. erwerben kann, was in 14 Tagen?

Auf-

Auflöſung. $3\frac{1}{2}$ T. : 14 T. = $3\frac{3}{4}$ fl. : x fl.

$$\not{7} \cdot \not{4} : x\not{4} \cdot \not{2} = 15$$

$$x = 15 \text{ fl.}$$

III. Wenn 3 Loth Kaffee 7 kr. 2 pf. koſten, was 28 Zt. 27 Pf., 24 Loth, 3 Qtl.?

Auflöſung. 28 Ztr., 27 Pf., 24 Loth, 3 Qtl. = 361955 Qtl. . . . 3 Loth = 12 Qtl.

12 Qtl. : 361955 Qtl. = $\frac{15}{2}$ kr. : x kr.

$$x = \frac{361955 \times 5}{8} = 3770 \text{ fl. } 21 \text{ kr. } 3 \text{ pf. } 1 \text{ hl.}$$

IV. Wie viele Gulden Zins tragen 8420 fl. Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Procent (d. i. wenn 100 fl. Kap. $4\frac{1}{2}$ fl. Zinſen tragen)?

100 fl. K. : 8420 fl. K. = $4\frac{1}{2}$ fl. Z. : x fl. Z.

$$2\not{0}\not{0} : 842\not{0} = 9 : x$$

$$10 : 421 = 9 : x$$

$$x = 378{,}9 \text{ fl.} = 378 \text{ fl. } 54 \text{ kr.}$$

B) Wälſche Praktik.

§. 398.

Da die Regel Detri die eigentliche Rechnung des bürgerlichen und kaufmänniſchen Lebens iſt, ſo wird es leicht begreiflich, daß Uebung und Nachdenken ſo manche Rechnungsvortheile erfunden hat, wodurch die Auflöſung der Regel Detri-Beyſpiele leichter und kürzer wird. Der Inbegriff dieſer Rechnungsvortheile, nebſt der Art ſie anzuwenden, heißt insgemein: **die wälſche oder italieniſche Praktik.**

Die Hauptregel der wälſchen Praktik iſt: „**Suche die Regel Detri in eine einfache Multiplikation und Diviſion zu verwandeln, ſo daß die Summe der einzelnen Produkte oder Quotuſſe, welche ſich größtentheils im Sinne berechnen laſſen, das Facit oder den Werth für die unbekannte Größe giebt.**“

Anmerkung 1) Regel Detri-Aufgaben, worin das erſte Glied eine Primzahl enthält, welche in keinem der bey-

beyden übrigen Glieder als Factor enthalten iſt; oder ſolche, worin die Glieder viele Unterabtheilungen ungleich benannter Zahlen enthalten, gehören in der Regel nicht zur wälſchen Praktik.

Anmerkung 2) Die Schule kann nur auf einige ſolche Rechnungsvortheile aufmerkſam machen; mehrere wird, und muß die Uebung lehren.

§. 399.

Beſondere Regeln der wälſchen Praktik.

I. **Anſtatt mit einer mehrgliederigen Zahl (z. B. 12, 24, 25), welche keine Primzahl iſt, zu multipliciren oder dividiren, multiplicirt oder dividirt man mit den einzelnen Factorn derſelben.**

Beyſpiele. a) Funfzehn Maß Wein 24 fl. 15 kr., was 1 Maß?

Operation. 15 M. : 1 M. = 24 fl. 15 kr. : x
3) 5 = 8 5
5) 1 = 1 37
alſo x = 1 fl. 37 kr.

b) Der Zentner Kaffee 228 fl., was 35 Ztr.?

Operation. 228 fl.
5
1140
7
x = 7980 fl.

II. **Iſt der Multiplikator eine gemiſchte Zahl, ſo ſucht man erſt das Produkt aus dem Ganzen, dann aus der Fraction.**

Beyſpiel. Die Elle Tuch 7 fl., was $20\frac{1}{6}$ Ellen?

Operation. 1 Elle : $20\frac{1}{6}$ E. = 7 fl. : x
140 fl.
1 10 kr.
x = 141 fl. 10 kr.

III. Frac-

III. Fractionen, welche zum Zähler eine größere Zahl als 1, zum Nenner aber keine Primzahl haben, ſucht man in mehrere kleinere zu zerſtreuen, ſo daß ſich eine aus der andern berechnen läßt, und alle zum Zähler 1 erhalten.

Erklärung.

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$
$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{11}{60} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$
$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$	$\frac{23}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$
$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	$\frac{41}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60}$ u. ſ. f.
$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	

Beyſpiele. a) Die Elle Tuchs 8 fl. 45 kr., was $7\frac{5}{8}$ Ellen?

Operation. $1 : 7\frac{5}{8} = 8$ fl. 45 kr.

61 fl. 15 kr. Preis von 7 Ellen.
4 fl. $22\frac{1}{2}$ kr. — — $\frac{1}{2}$ Elle.
1 fl. $5\frac{1}{2}$ kr. 1 hl. — — $\frac{1}{8}$ Elle.

x = 66 fl. 43 kr. 1 hl.

b) Der Zentner Zucker 197 fl.; was $\frac{13}{16}$ Ztr.?

Operation. 197 fl.

$\frac{1}{2}$	98 fl.	30 kr.	
$\frac{1}{4}$	49	15	
$\frac{1}{16}$	12	17	3 pf.

x = 160 fl, 2 kr. 3 pf.

IV. Wenn verſchiedene Unterabtheilungen Geldes oder Gewichtes u. ſ. w. durch ganze Zahlen zu multipliciren ſind, ſo verwandelt man die niedrigern Ordnungen in Theilbrüche der höhern.

Erklärung.

15 kr. = $\frac{1}{4}$ fl.	25 ℔ = $\frac{1}{4}$ Ztr.
30 kr. = $\frac{1}{2}$ fl.	50 ℔ = $\frac{1}{2}$ Ztr.
45 kr. = $\frac{3}{4}$ fl.	75 ℔ = $\frac{3}{4}$ Ztr.
7 kr. 2 pf. = $\frac{1}{8}$ fl.	8 Loth = $\frac{1}{4}$ ℔
22 kr. 2 pf. = $\frac{3}{8}$ fl.	16 Loth = $\frac{1}{2}$ ℔
	24 Loth = $\frac{3}{4}$ ℔ u. ſ. w.

Anmer-

Anmerkung. Am bequemſten iſt die Sechſerrechnung; denn da 6 kr. = 0,1 fl., ſo darf man, um eine Anzahl Sechſer (z. B. 345) in Gulden zu verwandeln, nur den letzten Ziffer zur Rechten abſchneiden; dieſer bedeutet Sechſer, die übrigen ganze Gulden; alſo 345 Sechſ. = 34 fl. 30 kr.

12 kr., 18 kr., 24 kr., 36 kr., 42 kr., 48 kr., 54 kr.
= 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9 Sechſer.

Beyſpiele. a) Ein ſeidnes Halstuch einen Baierthaler; was derer 14 Dutzend?

Operation. 14 · 12 = 28 · 6 = 168.

1 Halst. : 168 H. = 2 fl. 4 Sechſ.

| 336 fl.
| 67 fl. 12 kr.

x = 403 fl. 12 kr.

b) Das Pfund Roſinen 40 kr., was 4 Ztr. 25 Pf.

Operation. 40 kr. = $\frac{2}{3}$ fl.

4 Ztr. 25 Pf. = 425 Pf.

× $\frac{1}{3}$ fl. | 141 fl. 40 kr.
× $\frac{1}{3}$ fl. | 141 40

x = 283 fl. 20 kr.

V. Fractionen, welche die Form $\frac{a-1}{a}$ haben, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{19}{20}$ u. ſ. w. (wo aber a eine ganze poſitive Zahl ſeyn muß) laſſen ſich als 1 betrachten, weniger $\frac{1}{a}$; folglich $N \times \left(\frac{a-1}{a}\right) = N - \frac{N}{a}$.

Beyſpiele. a) 1 Ztr. Indigo 832 fl.; was $\frac{19}{20}$ Ztr.

Operation. 832 fl. — kr. | 1 Ztr.
— 41 36 | — $\frac{1}{20}$ Ztr.

x = 790 fl. 24 kr.

b) Eine Elle 10 fl. 24 kr.; was $\frac{7}{8}$ Ellen?

Operation. 10 fl. 24 kr. | 1 Elle
— 1 18 | — $\frac{1}{8}$ —

9 fl. 6 kr.

VI. Man

VI. Man verwechſelt die Benennung der mittlern Proportionsglieder, je nach dem ſich das eine derſelben ſchicklicher in einen Bruchtheil höherer Ordnung verwandeln läßt, als das andere.

Beyſpiele. a) Die Strene Garns 17 kr., was 60 Strenen?

Operation. Umgekehrt: was 17 Strenen, wenn eine 60 kr. oder 1 fl. koſtet; alſo x = 17 fl.

b) Das Pfund Anis 49 kr. 2 pf.; was 66¾ Pf.

Operation. Der Factor 66 giebt 1 fl. 1 Sechſ.

1 ℔ : 49½ ℔ = 66¾ kr. : x

49 fl.	1 fl. × 49
4 fl. 54 kr. . . .	1 Sechſ. × 49
33 kr. . . .	½ × 66
24 kr. 3 pf. .	49½ × ½
12 kr. 1 pf. 1 hl.	— × ¼
55 fl. 4 kr. — pf. 1 hl.	

VII. In eigentlichen Proportionsaufgaben (worin kein Glied die Zahl 1 hat) ſucht man mit dem erſten Gliede in eines der beyden übrigen (oder in beyde, mittelſt einer Zerfällung) zu dividiren, und alſo aus der Aufgabe eine bloße Multiplikation zu machen.

Beyſpiele.

a) 25 Ellen : 15 Ellen = 18 fl. 15 kr. : x
5 :) 5 — : 3 — = 18 fl. 15 kr. : x
5 :) 1 — : 3 — = 3 fl. 39 kr. : x
x = 10 fl. 57 kr.

b) 34 Stücke : 17 St. = 45 fl. 18 kr. : x
2 — : 1 — = 45 fl. 18 kr. : x
x = 22 fl. 39 kr.

c) Acht Stücke Schießgewehre 77 fl.; was 27 Stücke?

Opera-

Operation.

8 St. : 27 St. $= 77$ fl. : x
1 — : $3\frac{3}{8}$ — $= 77$ fl. : x

3	231 fl.
$\frac{1}{4}$	19 fl. 15 kr.
$\frac{1}{8}$	9 fl. 37 kr. 2 pf.

$x = 259$ fl. 52 kr. 2 pf.

d) Wenn $12\frac{1}{2}$ Eimer 70 fl. koſten, was $26\frac{1}{5}$ Eimer?

Operation. Man ſchafft vor allem die Fractionen weg, indem man das mittlere Glied durch den Nenner des erſten Gliedes multiplicirt, durch den Nenner des dritten Gliedes aber dividirt.

$12\frac{1}{2}$ E. : $26\frac{1}{5}$ E. $= 70$ fl. : x
$25 : 131 = \frac{140}{5}$ fl. : x
$1 : 5\frac{6}{25} = 28$ fl. : x

5	140 fl.	— kr.
$\frac{1}{5}$	5	36
$\frac{1}{25}$	1	$7\frac{1}{5}$

$x = 146$ fl. $43\frac{1}{5}$ kr.

C) Ueber den Gebrauch der Reductions-Tabellen.

§. 400.

Am Ende des Buches ſind zwey Abtheilungen metrologiſcher Tafeln angehängt, wovon die erſte Abtheilung die neuern Maße, Gewichte und Münzen verſchiedener auswärtiger Staaten, die zweyte aber die Maße, Gewichte und Münzen der alten Römer, Griechen und Hebräer, mit dem neuen königl. baierſchen Maße verglichen, enthält. Was den Gebrauch dieſer Tafeln für die einfache Proportion betrifft, ſo gilt im allgemeinen die Form: Wenn M Maße des Landes A ... N Maße des Landes B fodern, wie viele (x) Maße des Landes B fodern n Maße des Landes A? — Die Größen M und N ſind in den Tabellen nachzuſchlagen; die Größe n als die zu verwandeln-

wandeln-

wandelnde, wird gegeben, die Größe x iſt zu finden. In den Tabellen der erſten Abtheilung I. II. IV. V. VI., und zwar in der letzten Spalte, ſind die auswärtigen Maße mit je 1000 Stücken des gleichartigen königl. baierſchen Maßes verglichen. In der Tabelle des Meilenmaßes III. geſchah, in der zweiten Spalte die Vergleichung der einfachen Meilen mit 15 geographiſchen, in der dritten Spalte aber, die Vergleichung der □ Meilen mit 1000 geogr. □ Meilen. Wobey zu merken iſt, daß alle mit einer gemeinſchaftlichen Größe verglichenen Maße auch zugleich unter ſich verglichen und gleich ſind, z. B. 1000 bair. Fuß = 1031,08 Amſterdamer
1000 — — = 1030,91 Dresdner

Alſo auch: 1031,08 Amſterd. = 1030,91 Dresd.

Die Tafeln der zweyten Abtheilung, ſo wie die VII. und VIII. der erſten Abtheilung enthalten blos die Vergleichung mit dem baierſchen Maße oder Gewichte oder Gelde, und ſind für ſich verſtändlich.

Beyſpiele.

I. **Wie viele baierſche Ellen geben 500 böhmiſche?**

Auflöſung. (I. Abtheil. II. Tabelle.)

Böhm. Böhm. Bair. Bair.
$1402{,}47 : 500 = 1000 : x$

$$x = \frac{500 \times 1000{,}00}{1402{,}47} = 356{,}514 \text{ bair.}$$

II. **Wie vielen baierſchen Chauſſee-Meilen gleichen 100 franzöſiſche neue Lieues?**

Auflöſung. (I. Abtheil. III. Tabelle.)

fr.L. fr.L. B.Ch.M. B.Ch.M.
$\not{2}\not{5} : \not{1}\not{0}\not{0} = 14{,}9847 : x$
$1 : 4$

$x = 59{,}9388$ bair. Ch. Meil.

III. **Wie viele Gulden (bairiſch) betragen 300.000 Franks.**

Auflöſung. (I. Abth. VII. Tab.) 1 Franc. = 27 kr. 3 pf. $\frac{3}{4}$ hl.

Man

Man ſetze 1 Franc $= \frac{28}{60}$ fl. — $\frac{1}{4}$ hl.

$$\frac{300.000 \times 28}{60} = 140.000 \text{ fl.} - \frac{300.000 \times 5}{480 \cdot 4} \text{ fl.}$$

$$= 140.000 \text{ fl.}$$

$$- 781 \text{ fl. } 15 \text{ kr.}$$

$$139.218 \text{ fl. } 45 \text{ kr.} = x$$

IV. Caesar dictator aere alieno oppressus dixit: bis millies et quingenties centena millia (numûm seu sestertiorum) sibi esse oportere, ut nihil haberet.

Appianus.

Auflöſung. Nach Tabelle A. f. II. Abtheilung ſind 2500'000.000 kl. Seſtertien = 2500 Mill. Sechſer.

= 250'000.000 fl.

Genauer aber nach 4°: 247'645.833 fl.

D) Zuſammengeſetzte Proportionen, Regel de Quinque, Septem, Novem.

§. 401.

Wenn in einer Proportion das Verhältniß der Urſachen, oder jenes der Wirkungen, oder beyde zugleich zuſammengeſetzt ſind, ſo heißt die aus ſolchen Verhältniſſen beſtehende Proportion zuſammengeſetzt.

Erklärung. Man habe die Urſachen: C, T, K, und c, t, k; ihre Wirkungen ſeyen E, e.

Bey einerley T und K ſey: $C : c = E : \varepsilon$

— — C — K — $T : t = \varepsilon : \varphi$

— — C — T — $K : k = \varphi : e$

ſo wird (nach §. 335.) $CTK : ctk = E : e$.

Wenn aber auch $E = \lambda\mu\nu$

und $e = lmn$

d. i. $E : e = \lambda\mu\nu : lmn$

ſo ergiebt ſich die allgemeine Formel zuſammengeſetzter Proportionen:

$$CTK : ctk = \lambda\mu\nu : lmn;$$
$$= E : e.$$

§. 402.

Nennt man die Urſachen allgemein beſtimmende Größen, die Wirkungen aber beſtimmte, ſo ſind die jeder Wirkung entſprechenden Urſachen, für die Fälle des praktiſchen Lebens, in folgender Tabelle dargeſtellt.

Beſtimmende	Beſtimmte Größen.	Beſtimmende	Beſtimmte Größen.
I. Menge, Größe, Schwere } der Waare Preis eines Stückes.	Preis der Waare	VI. Meilenweite. Anzahl der Ztr. Lohn für einen Ztr. eine Meile.	Der ganze Frachtlohn.
II. Kapital. Zeit der Auslage. Procent.	Zinsertrag.	VII. Brodgewicht. Getreidpreis.	Preis des Brodes.
III. Arbeitende Perſonen. Zeit oder Dauer der ganzen Arbeit. Stundenzahl eines Tages.	Das Werk nach Stücken, oder Länge, Breite, Höhe.	VIII. Länge. Breite.	Fläche, (z. B. das zu einem Kleide nöthige Tuch.)
		IX. Länge, Breite, (Dicke) Höhe (Tiefe).	Körpermaß.
IV. Arbeiter. Taglohn. Zeit.	Wochen- oder Jahrlohn.	X. Anzahl der Stücke. Elemente eines Stückes.	Maß eines beſtimmten Landes. Z. B. (Längen- Körper-Maß, Gewicht.)
V. Verzehrende Dinge. Mundportion. Zeit.	Vorrath von Lebensmitteln.	XI. Höhe. Länge. Scheiterlänge.	Das Holzmaß oder Holzquantum.

§. 402.

Alle dieſe zuſammengeſetzten Urſachen und Wirkungen ſtehen in einem gegenſeitigen geraden Verhältniſſe, d. i. mit dem multiplikativen Wachſen oder Fallen der Urſachen iſt auch ein multiplikatives Wachſen oder Fallen der Wirkungen verbunden.

Z. B. Wenn 100 fl. Kapital in 1 Jahre 5 fl. Zins geben; ſo geben 7mal 100 fl. in 8.1 Jahr $5 \times 7 \times 8 = 280$ fl. Zins.

Wenn

Wenn 12 Ztr. 7 Meilen weit zu führen, 8 fl. bezahlt werden, ſo wird man um 24 Ztr. 28 Meilen weit zu führen $2 \times 4 \times 8$ fl. bezahlen; denn $24 \times 28 = 12 \times 2 . 7 \times 4$.

§. 403.

Im Gegentheile ſtehen bey einerley Wirkung, (welche $= 1$ geſetzt wird), die Urſachen unter ſich; und bey einerley Urſache die Wirkungen ebenfalls unter ſich im umgekehrten Verhältniſſe; das iſt:

Wenn : $CT = e$

$ct = e$; d. h. $CT = ct$

ſo wird $C : c = t : T$.

Z. B. 1000 fl. Kapital tragen in 4 Jahren (oder auch zu 4 Procent) eben ſo viel Zins, als 800 fl. Kapital in 5 Jahren (oder zu 5 Procent). — Mithin

1000 fl. Cap. : 800 fl. C. = 5 Proc. : 4 Proc.

Um 4 Ztr. 9 Meilen weit zu führen, zahlt man (bey übrigens gleichen Umſtänden, welche die Proportion immer vorausſetzt, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich gegeben iſt) eben ſo viel, als für 18 Ztr., welche 2 Meilen weit geführt werden ſollen.

d. h. 4 Ztr. : 18 Ztr. = 2 Meil. : 9 Meil.

Anmerkung. Jede umgekehrte Proportion läßt ſich in eine zuſammengeſetzte gerade verwandeln, wenn man den Urſachen ihre zugehörige Wirkung beygiebt. In dieſer Hinſicht werden die ſogenannten verkehrten Regel Detri, quinque, ſeptem, für das praktiſche Leben ganz entbehrlich. Deßwegen iſt in der Folge unter zuſammengeſetzten Proportionen nur die gerade zu verſtehen.

§. 404.

Jedes zuſammengeſetzte Verhältniß läßt ſich, wenn man die zuſammengehörigen Factorn eines Gliedes wirklich multiplicirt und das Produkt als ein einziges Glied betrachtet, in ein einfaches Zahlenverhältniß verwandeln.

Z. B. 4 Ztr. auf 10 Meilen : 15 Ztr. auf 7 Meilen

$= 4 \times 10 : 15 \times 7 = 40 : 105 = 8 : 21$.

Auf

Auf ſolche Art läßt ſich jede zuſammengeſetzte Proportion auf eine einfache Regel Detri zurückführen. Man nennt aber eine zuſammengeſetzte Proportion von 5, 7, 9, 11 Gliedern, wozu das ſechste, achte, zehnte, zwölfte gefunden werden ſoll (oder vielmehr die Art ſolche Proportions-Beyſpiele aufzulöſen): Regel (de) quinque, septem, novem, undecim (positionibus).

§. 405.

Beyſpiele.

I. Eine Regel Quinque.

Wie viele Gulden Zins trägt ein Kapital von 1600 fl. zu 5 Procent in 15 Jahren?

Auflöſung.

K. K. Z. Z.

$$100\text{ fl. } 1\text{ J.} : 1600\text{ fl. } 15\text{ J.} = 5\text{ fl.} : x\text{ fl.}$$

$$1 : 16 \cdot 15 = 5 : x$$

$$x = 1200\text{ fl. Zins.}$$

II. Eine Regel Septem.

Zwey Mäher mähen eine Wieſe von 2000 □ Ruthen in 4 Tagen ab, wenn ſie des Tages 4 Stunden lang arbeiten; wie lange werden 12 Mäher an einer andern Wieſe von 36000 □ Ruthen zu arbeiten haben, wenn ſie des Tages 8 Stunden mähen?

Auflöſung.

$$2000\,\square\text{ R.} : 36.000\,\square\text{ R.} = 2\text{ M. } 4\text{ T. } 4\text{ St.} : 12\text{ M. } 8\text{ St. } x\text{ T.}$$

$$1 : 18 =$$

$$x = \frac{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{12 \cdot 8} = 6\text{ Tage.}$$

III. Eine Regel Novem.

Für die Garniſon einer Feſtung, beſtehend aus 2000 Mann, reicht der Proviantvorrath von 24.000 Fäßern Mehles, jedes Faß zu 4 Ztr., wenn ein Mann des Tages 40 Lothe Mundportion erhält, auf 8 Monate hin. Auf wie viele Monate wird die Garniſon einer andern Feſtung, worin 10.000 Mann liegen, bey täglicher Mundportion von

von 30 Loth, mit 60.000 Fäßern Mehles, jedes zu 7 Zentnern, ausreichen?

Auflöſung.

F. Z. F. Z. M. L. M. M. L. M.

24000 . 4 : 60000 . 7 = 2000 . 40 . 8 : 10000 . 30 . x

3.

$x = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ Monath.

IV. Eine Regel Undecim.

Zwölf Maurer, welche des Tages 12 Stunden arbeiten, und täglich 1260 Ziegelſteine ſetzen, können eine Gartenmauer, welche 1 Fuß dick und 120 Fuß lang iſt, in 8 Tagen aufführen. Wie viele Tage werden zu einer andern Mauer, welche 2 Fuß dick und 360 Fuß Länge hat, 48 Maurer brauchen, welche täglich nur 8 Stunden arbeiten, und täglich 420 Ziegelſteine ſetzen?

Auflöſung.

D. L. D. L. M. St. Z. T. M. St. Z. T.

1 F. 120 F. : 2 . 360 = 12 . 12 . 1260 . 8 : 48 . 8 . 420 . x

1 3 . 1 . 3 . 21 . 3 4 . 7 . 1

$x = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ Tage.

§. 406.

Jede Regel Quinque läßt ſich in zwey, jede Regel Septem in drey, jede Regel Novem in vier einfache Regel-Detri-Aufgaben auflöſen. (vergl. §. 401.)

Die Proportionsbeyſpiele des vorhergehenden §. werden alſo aufgelöſt:

I. 100 fl. K. : 1600 fl. K. = 5 fl. Z. : x fl. Z.
1 Jahr : 15 Jahr = x fl. Z. : y fl. Z.

Hier iſt x = 80. folglich y = 15 . 80 = 1200.

II. 2000 □ R. : 36.000 □ R. = 4 Tag. : x Tag
8 St. : 4 St. = x — : y — *
12 Mäh. : 2 Mäh. = y — : z — *

Hier iſt: x = 72. y = 36. z = 6 Tag.

III. 24000 Fäß.	: 60.000 Fäß.	= 8 Mon.	: u Mon.	
4 Ztr.	: 7 Ztr.	= u —	: x —	
10000 Mann	: 2000 Mann	= x —	: y —	*
30 Loth	: 40 Loth	= y —	: z —	*

Hier iſt u = 20. x = 35. y = 7. z = $9\frac{1}{3}$ Monath.

Anmerkuug 1. Die mit * bezeichneten Proportionen ſind umgekehrte, die übrigen — gerade.

Anmerk. 2. Jede zuſammengeſetzte Proportion von n Gliedern oder Sätzen, wozu das (n + 1)te Glied geſucht werden ſoll, kann in $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ einfache Proportionen (Detri) aufgelöſet werden.

§. 407.

Wenn mehrere Proportionen ſo mit einander in Verbindung geſetzt werden, daß der Nachſatz der vorhergehenden Proportion jedesmal der Vorderſatz der nächſtfolgenden wird, ſo entſteht der ſogenannte Kettenſatz, oder die Kettenregel, welche nichts anders, als eine zuſammengeſetzte Proportion iſt, die in ihre einfachen aufgelöſt worden. Die Kettenrechnung iſt beſonders bey dem Reduciren niedrigerer Einheiten auf höhere, und bey dem Reſolviren höherer in niedrigere anwendbar. (vergl. §. §. 380. 381.)

Man habe die Aufgabe: Wie viele Baierthaler koſtet 1 Ballen Schreibpapier, wenn 1 Bogen 1 Häller koſtet?

So wird der Kettenſatz dieſer ſeyn:

10	: 1	= Ballen	: Rieß	
20	: 1	= Rieß	: Buch	
24	: 1	= Buch	: Bogen	
3	: 1	= Bogen	: Heller	
1	: 8	= Heller	: Kreutzer	
1	: 60	= Kreutz.	: Gulden	
1	: $2\frac{2}{5}$	= Gulden	: Baierthaler	(x)

$10 \cdot \cancel{20} \cdot \cancel{24} \cdot 3 : 8 \cdot \cancel{60} \cdot \frac{\cancel{12}}{5}$ = Ball. : Baierth. (x)

$\cancel{50} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} : 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{12}$

25 : 2 · $\cancel{4}$ = Ball. : Baierth. (x)

2 Ball. = 25 Baierthaler

1 Ball. = $\frac{25}{2}$ = $12\frac{1}{2}$ Baierthaler.

E) Re-

E) Regula Falsi.

§. 408.

Wenn man ein allgemeines Zahlenverhältniß durch beſtimmte Zahlen ausdrückt, ſo heißt von den letztern jene Zahl, welche als Antecedens des Verhältniſſes angenommen wird, der Numerus falsus (willkührliche Zahl); das ganze Verfahren aber nannten die Rechenmeiſter Regula falsi. Man könnte eine doppelte Regulam falsi, für arithmetiſche und geometriſche Proportionen, unterſcheiden; doch wollen wir uns hier auf letztere beſchränken, um ſo mehr, da die ganze Regula falsi durch die Lehre von den Gleichungen faſt durchaus entbehrlich wird.

Beyſpiele.

I. In wie viel Jahren werden die Intereſſen eines Kapitals zu $4\frac{1}{2}$ Procent der Hälfte des Kapitals gleich werden?

Auflöſung. Nennt man die innerhalb x Jahren treffenden Intereſſen = 1, ſo iſt das Kapital = 2.

$$4\tfrac{1}{2}\,\text{Z.} : 1\,\text{Z.} = 100\,\text{fl. K. } 1\,\text{J.} : 2\,\text{fl. K. } x\,\text{J.}$$

$$x = \frac{100 \cdot 2}{9 \cdot 2} = 11\tfrac{1}{9}\,\text{Jahr.}$$

II. Ein Landmann führte 702 Garben in ſeine Scheune, das Uebrige hatte er als Zehend abgegeben. — Wie viele Garben hatte derſelbe gebunden, und was hatte der Zehend betragen?

Auflöſung. 10 Garben Ertrag geben nach Abzug des Zehends 9 Garben Einfuhr; alſo

$$9 : 10 = 702\,\text{Garb.} : x$$

$$x = \frac{702 \cdot 10}{9} = 780\,\text{Garben Ertrag}$$

und der Zehend betrug 78 Garben.

III. Es würde ein Garten gekauft und wieder verkauft; aber letzteres mit einem Verluſte von 18 Procent; nemlich er wurde mit 7298 fl. bezahlt. Welches war der erſte Kaufpreis des Gartens?

Auflöſung.

Der Garten wurde gekauft um 100 fl. } Num. falsi.
verkauft um 100 — 18 = 82 fl. }

Verk.	Verk.	Ank.	Ank.
82 :	7298 =	100 :	x fl.

$$x = \frac{729800}{82} = 8900$$ fl. — der Werth des Gartens beym erſten Ankauf.

IV. Wie groß muß ein Kapital ſeyn, welches mit Einſchluß ſeiner dreyjährigen $4\frac{1}{3}$ procent. Zinſen 7797 fl. beträgt?

Auflöſung. Das Kapital ſey = 100 fl., ſo ſind die dreyjährigen Zinſen $\frac{13}{3} \times 3 = 13$ fl.; folglich Kapital und Zins = 113 fl.

K u.Z.	K.u.Z.	K.	K.
113 :	7797 =	100 :	x

$$x = \frac{779700}{113} = 6900$$ fl. Kapital.

F) Proportion nach dem Reeſiſchen Anſatze.

§. 409.

Die reeſiſche Regel, deren Erfindung dem Herrn von Rees, einem Holländer zugeſchrieben wird, iſt eine aus den Gliedern einer Proportion gebildete Gleichung; die Stelle des Gleichheits-Zeichens (=) vertritt ein ſenkrechter Strich, welcher die beyden Seiten der Gleichung trennt.

Man habe die allgemeinen Formeln für einfache und zuſammengeſetzte Proportionen.

1) $C : c = E : e$

ſo iſt $C . e = c . E$ oder $\begin{array}{c|c} C & E \\ e & c \\ \hline \end{array}$

2) $CTK : ctk = \lambda\mu\nu : lmn$

ſo iſt $CTK\ lmn = ctk\ \lambda\mu\nu$ oder $\begin{array}{c|c} C & c \\ T & t \\ K & k \\ l & \lambda \\ m & \mu \\ n & \nu \\ \hline \end{array}$

§. 410.

§. 410.

Hier laſſen ſich nun wieder die bekannten drey Momente unterſcheiden.

I. Die Formation oder der Anſatz.

Das unbekannte Glied x ſteht allezeit auf der linken Hälfte zu oberſt; dieſem gegenüber auf der rechten Hälfte ſteht das Frageglied. Auf der linken Hälfte ſteht das mit dem Frageglied, auf der rechten das mit dem unbekannten gleichnamige Glied.

Z. B. Wie viele Gulden koſten 12 Ellen, wenn 5 Ellen 20 fl. koſten.

fl. x	12 Ellen
E. 5	20 fl.

Man ſieht hier, daß der großen Urſache die große Wirkung, der kleinen Urſache die kleine Wirkung entgegengeſetzt ſey. Bey zuſammengeſetzten Proportionen müſſen die zuſammengehörigen Wirkungen und Urſachen, nach der Tabelle §. 402. jedesmal auch als Factorn eines Productes zuſammengeſchrieben werden. Z. B. Einen Graben herzuſtellen, welcher 9 Ellen tief, 20 breit, und 80 lang iſt, brauchen 30 Taglöhner, wenn ſie des Tages 9 Stunden arbeiten, 60 Tage. Wie viele Taglöhner werden erfodert, um einen Graben von 12 Ellen Tiefe, 50 Breite, 400 Länge, wenn ſie des Tages 12 Stunden arbeiten, in 24 Tagen fertig machen?

Arb. x	12 Tiefe
Tag. 24	50 Breite
St. 12	400 Länge
Tiefe 9	30 Arb.
Breite 20	60 Tage
Länge 80	9 St.

Anmerkung. Die eine Hälfte muß alſo genau eben ſo viele und zwar gleichartige Glieder enthalten, als die andere Hälfte.

II. Re-

II. Reduction.

Man ſtelle vor allem zwiſchen den homologen Gliedern der beyden Hälften die ſtrengſte Gleichartigkeit her, welches am füglichſten durch den Kettenſatz geſchehen kann, indem man nach Erforderniß der Umſtände, Ergänzungs-Verhältniſſe aus den Tabellen §. §. 369. 378. zu Hülfe nimmt.

Z. B. Man habe die Aufgabe (§. 407.): Wie viele Baierthaler koſten 6 Ballen Schreibpapier, wovon der Bogen 3 Heller gilt?

So iſt der Anſatz, nebſt der Reduction

Baierth. x	6 Ballen
Ball. 1	10 Rieß
Rieß 1	20 Buch
Buch 1	24 Bogen
Bog. 1	3 Heller
Heller 8	1 kr.
kr. 60	1 fl.
fl. $2\frac{2}{5}$	1 Baierthaler

III. Solution.

Da die linke Hälfte, wo x ſteht, das Produkt der äußern, die rechte Hälfte aber das Produkt der innern Glieder enthält, folglich jene den Diviſor, dieſe das Dividend vorſtellt: ſo multiplicire man ſowohl alle Zahlen auf des Diviſors, als auch auf des Dividends Seite in zwey eigne Produkte, und dividire das der letzteren Seite durch jenes der erſten.

Im letzten Beyſpiele erhält man: $1152x = 8640$

$$x = \frac{8640}{1152} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2},$$

Um die Probe zu machen kann man entweder

1) anſtatt der unbekannten Größe ihr Aequivalent ſetzen und zeigen, daß das Produkt der äußern Glieder (auf der Diviſor-Seite) dem Produkte der innern Glieder (auf der Dividend-Seite) gleiche; oder man kann

2) durch gegenſeitiges Aufdividiren die identiſche Proportion 1 : 1 = 1 : 1 herſtellen; oder endlich

3) mit

3) mit Hülfe des gefundenen, abgängigen Gliedes ein anderes finden, das man als unbekannt annehmen will.

§. 411.

Abkürzung der Rechnung.

I. Man dividire oder verkleinere jeden ſchicklichen Factor der einen Hälfte, durch den der andern; oder ſuche für je zwey Factorn einen gemeinſchaftlichen Theiler.

II. Kommen auf einer Seite, oder auf beyden, Fractionen vor, ſo verſetze man die Nenner, von der Diviſor- auf die Dividend-Seite, und umgekehrt. Gemiſchte Zahlen müſſen zuerſt in einen uneigentlichen Bruch verwandelt werden.

III. Sind auch Decimalbrüche als Factorn gegeben, ſo mache man im Dividend und Diviſor, durch Anhängung von Nullen, die Decimalſtellen gleich.

Beweis. Man ſetze die Factorn auf der Seite von $x = d$; und die auf der entgegengeſetzten $= D$,

ſo daß $x = \frac{D}{d}$.

Nun wird offenbar der Werth von $\frac{D}{d}$ nicht geſtört, wenn man Zähler und Nenner entweder mit der nemlichen Zahl dividirt, oder multiplicirt. Es beſtehen aber alle Abkürzungen der Rechnung darin, daß der Zähler und Nenner dieſes Bruches durch die nemliche dritte Zahl multiplicirt oder dividirt wird.

α) Es ſey $d = af$ und $D = cf^2$

ſo wird $x = \frac{cf \cdot f}{a \cdot f} = \frac{cf}{a}$.

β) Es ſey $d = \frac{m}{n}$ und $D = \frac{b}{c}$

ſo wird $x = \frac{b}{c} : \frac{m}{n} = \frac{b \cdot n}{c \cdot m}$ u. ſ. w.

§. 412.

§. 412.

Beyſpiele. (vergl. Tabelle §. 402.)

I. Eine Lieferung von 100 Zuckerhüten, wovon einer 8 Pfund wog, koſtete 880 fl.; was wird eine andere Lieferung von 50 koſten, jeden zu 11 Pfund?

Operation.

fl. x	~~5~~0 Z. h.
Z. h. 1~~00~~	11 Pf.
Pf. 8	88~~0~~ fl.
1	11

x = 605 fl.

II. In wie viel Jahren kann ein Kapital von 9640 fl. zu $4\frac{3}{4}$ Procent 1831 fl. 36 kr. Zins tragen?

Antwort. In 4 Jahren.

III. Wie groß muß ein Kapital ſeyn, deſſen 7 procent. Intereſſen jede Sekunde eines gemeinen Jahres $1\frac{31}{219}$ hl. abwerfen ſollen?

Antwort. 7500000 fl.

IV. Zwey Schnitterinnen verdienen ſich in 6 Tagen 4 fl. 48 kr.; wie viele Gulden können ſich 15 Schnitterinnen in 30 Tagen verdienen?

Antwort. 180 fl.

V. Mit einem gewiſſen Vorrath von Futter können 5 Pferde $1\frac{1}{2}$ Monath unterhalten werden; wie lange wird ein nochmal ſo großer Vorrath für den Unterhalt von 12 Pferden erklecklich ſeyn?

Operation.

Mon. x	~~2~~ Vorr.
Pf. ~~12~~	$1\frac{1}{2}$ Mon.
Vorr. 1	5 Pf.
4 · ~~2~~	~~3~~

$x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ Monath.

VI. Ein Fuhrmann begehrte, um 30 Eimer 20 Meilen weit zu führen 100 fl. Ein anderes Mal ſollte er 70 Eimer

Eimer 30 Meilen weit liefern; weil aber die Wege ſehr ſchlecht waren, erhöhte er das Frachtlohn um den 4ten Theil des vorigen Betrags (für den Eimer). Wie viel mußte ihm bezahlt werden?

Operation.

fl. x	7~~0~~ Eimer
Eim. ~~30~~	~~30~~ Meil.
Meil. ~~20~~	$\frac{5}{4}$ Frachtl.
Frachtl. 1	100 fl.
4	

$x = \frac{875}{2} = 437$ fl. 30 kr.

VII. Wenn das Viertel Korn 2 fl. 24 kr. gilt, ſoll ein 9 Kreuzer Laib 5 Pfund ſchwer ſeyn: welches Gewicht muß ein Brod der nemlichen Qualität um 20 kr. haben, wenn das Viertel Korn 7 fl. koſtet?

Operation.

Pf. x	20 kr.
fl. 7	5 Pf.
kr. 9	~~2~~$\frac{2}{5}$ fl.
3.5	12.4

$x = \frac{80}{21} = 3$ Pf. 10 Loth 3 Quent. beinahe.

VIII. Ein Weber lieferte von 260 Strenen Garns 190 Ellen Leinwand, $\frac{5}{4}$ breit; ein anderes Mal von 520 Strenen 570 Ellen. Wie breit war dieſe Leinwand?

Antwort $\frac{5}{6}$ Ellen breit.

IX. Ein Getreidkaſten, welcher 48 Fuß lang, 30 breit iſt, faßt 120 Schäffel Getreid, wenn man dieſes 9 Zolle (Duodec. Maß) hoch aufſchüttet. Wie viele Schäffel würde ein anderer Getreidkaſten faßen, welcher 52 Fuß lang, 36 breit iſt, und worin das Getreid $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch liegt?

Antwort 312 Schäffel.

X. Wie viele baierſche Klafter giebt (bey geſetzlicher Scheiterlänge) ein Holzſtoß, welcher 96 Fuß lang, und 12 Fuß hoch iſt?

Antwort. 32 Klafter.

G) Ge-

G) Gebrauch der Reductions-Tabellen.

§. 413.

Hat man Maße und Gewichte eines Landes auf die eines andern zu reduciren, und ſind dieſelben nicht nach Stücken, ſondern nach gleichartigen Elementen mit einander verglichen, wie z. B. in der erſten Abtheilung die Fuß- und Ellenmaße nach natürlichen Millimètres, die Meilenmaße nach alt franz. Pariſer Fuß, die Getränk- und Getreidmaße nach natürlichen Décilitres, die Gewichte nach natürlichen Milligrammes oder köllniſchen Richtpfenningen u. ſ. w., ſo gilt im Allgemeinen für ſolche Reductionen die Proportion:

Wenn 1 Maß des Landes A = M Elementen
— 1 Maß des Landes B = N Elementen

ſo verhält ſich 1 Maß von A : 1 Maß von B = M : N
N Maß von A = M Maß von B.

Z. B. 1 bair. Elle = 833,011 Millimètres
1 Leipz. Elle = 565,311 Millimètres

Alſo 565,311 bair. Ell. = 833,011 Leipz. Ellen.

d. h.: Dieſe Maße verhalten ſich nach Stücken verkehrt, wie die Elemente, aus denen ſie beſtehen.

Anmerkung. Da dieſe Reductionen des langwierigen Multiplicirens oder Dividirens wegen ſehr beſchwerlich und doch unſicher würden, ſo iſt es bequemer und ſicherer die Rechnung logarithmiſch zu machen. Deßwegen wurden in den Tabellen der erſten Abtheilung I. II. IV. V. VI. in der zweiten Spalte die Vergleichungslogarithmen beigefügt. Die Operation wird durch folgende Beyſpiele klar werden.

Beyſpiele. I. Wie viele baierſche Maßkannen geben 1000 Wiener Maß?

Operation.	b. M. x	1000 W. M.
	W. 1	14,15015 Décilitres
	Décilit. 10,6903	1 bair. M.

Log. x = Log. 1000 + Log. 14,15 . . . — Log. 10,6903
Log. x

Log. x = 4.1507612
−1.0289892

Log. x = 3.1217720
x = 1323,646 bair. Maßkannen.

II. Wie viele baierſche Schäffel geben 1000 Würtemberger Schäffel?

Operation.

b. Sch. x	1000 W. Sch.
W. Sch. 1	1772,272 Décil.
Décil. 2223,582	1 b. Schfl.
Log. x =	6.2485302
	−3.3470535

Log. x = 2.9014767
x = 797,0336 bair. Schäffel.

III. Wenn das Kilogramme Zucker 8 Francs koſtet. Wie viele Gulden ſoll das baierſche (neue) Pfund gelten?

Operation. 1 Franc. = 0,4640625 fl.
davon iſt der Log. = 0.6665764 (−1)

fl. x	1 bair. Pf.
1'000.000	560.000 Millg.
Kilog. 1	8 × 0,4640625 fl.

Log. x = 0.9030900
+ 0.6665764 (−1)
5.7481880

6.3178644
−6.0000000

Log. x = 0.3178644
x = 2,079047 fl. = 2 fl. 0 kr. 1$\frac{2}{10}$ pf.

§. 414.

Aufgabe. Duodecimalmaß in Decimalmaß, und umgekehrt, zu verwandeln.

Auflöſung. I. Wenn von dem Decimal- und Duodecimal-Maß des nemlichen Landes die Rede iſt, ſo nehme man die Verhältniſſe zu Hülfe

1) Für

1) Für das Längenmaß iſt bey einerley Fußmaß

1 Fuß Ddec. = 1 Fuß Dec.
12 Zolle Dd. = 10 Zolle D.
144 Lin. Dd. = 100 Lin. D.

2) Für das Flächenmaß.

1 □ Fuß Dd. = 1 □ Fuß Dec.
144 □ Zoll Dd. = 100 □ Zoll D.
20.736 □ Lin. Dd. = 10000 □ Lin D.

Anmerkung. Wenn nur einerley Ruthenmaß vorausgeſetzt wird, gelten die Verhältnißzahlen §. 370. 7. 8.

3) Für das Körpermaß.

1 Kubf. Dd. = 1 Kbf. D.
1728 Kubz. Dd. = 1000 Kbz. D.

Beyſpiel. Die baierſche Maßkanne hält genau 43 baierſche Decimal-Kubikzoll. Wie viel Duodec. Kubikzoll des baierſchen Maßes beträgt dieſes?

Operation.

Dd. x	43 D.
D. 1000	1728 Dd.
x =	74,304 DdKbz.

II. Iſt aber das Decimalmaß des einen Landes in das Duodecimalmaß des andern Landes zu verwandeln, ſo muß man außer obigen Verhältniſſen, auch noch das Verhältniß des Längen-, Quadrat- oder Kubikfußes dieſer Länder zu Hülfe nehmen, je nach dem eines von dieſen drey Maßen zu reduciren iſt. Eine Norm hiezu ſey Folgendes. Wenn (nach §. 413 und Tab. I. Erſte Abth.)

a) 1000 bair. Fuß = 291,859 Métres, ſo ſind auch

b) $(1000)^2$ bair. □ F. = $(291,859)^2$ □ Métres, und

c) $(1000)^3$ bair. Kbf. = $(291,859)^3$ Kub. Métres.

Dafür ſind die Logarithmen:	3.0000000	2.4651732
	2 × 3.0000000	2 × 2.4651732
	3 × 3.0000000	3 × 2.4651732 (§. 358.)

Bey-

Beyſpiel. Der baierſche Viſirreimer hält 2752 bair. Decimalkubikzolle: wie viel beträgt dieß alt franzöſiſche Duodecimalkubikzolle?

Operation.

franz. Dbz. x	2752 bair. Dec.Kbz.
Dzbz. 1000	1728 Dbzkbz.
$(324{,}839)^3$	$(291{,}859)^3$

$$\text{Log. } x = \text{Log. } 2752 + \text{Log. } 1728 + 3\,\text{Log. } 291{,}859 - (\text{Log. } 1000 + 3\,\text{Log. } 324{,}839)$$

$= +3.4396484$	-3.0000000
$+3.2375437$	-7.5350046
$+7.3955196$	

$\text{Log. } x = 3.5377071$

$x = 3449{,}1100$ franz. Dbzkbz.

§. 415.

Da in den meiſten Rechenbüchern die Längen- und Körpermaße nach Linien und Kubikzollen des alten Pariſerfußes, die Gewichte aber nach holländiſchen Aßen beſtimmt werden, ſo ſcheint es nicht überflüſſig zu ſeyn, die Reductionszahlen nebſt ihren Logarithmen herzuſetzen, wodurch das alte Pariſer Maß auf den neuen Métre, und die holl. Aß in köllniſche Richtpfenninge verwandelt werden.

1) Um alt franz. Dd. Linien in neue Millimétres zu verwandeln, multiplicire jene mit 2,255830

Hievon iſt der Log. = 0.3533063

2) Um alt franz. Dd. Kubikzolle in neue Décilitres zu verwandeln, multiplicire jene mit 0,1983638

Hiervon iſt der Log. = 0.2974625 (—1.0)

3) Um die holl. Aß in köllniſche Richtpfenninge zu verwandeln, multiplicire jene durch: 13,47365

Hiervon iſt der Log. = 1.1294847.

4) Um holländiſche Aß in natürliche Milligrammes zu verwandeln, multiplicire jene durch: 48,07855

Hiervon iſt der Log. = 1.6819514.

5) Um köllniſche Richtpfenninge in natürliche Milligrammes zu verwandeln, multiplicire erſtere durch 3,568344 Hiervon iſt der Log. = 0.5524668.

Im Gegentheile um aus Millimétres alt franz. Db. Linien zu erhalten, dividire erſtere durch 2,255830 u. ſ. w.

§. 416.

Aufgabe. Das kleinſte Verhältniß zweyer Münzen oder Gewichte oder anderer Maße in ganzen Zahlen zu finden.

Auflöſung. Man beſtimme jede Einheit der zu vergleichenden Münzen oder Maße in gleichartigen Elementen, bilde daraus ein Zahlenverhältniß (§. 413), und ſuche für dieſe Zahlen den größten gemeinſchaftlichen Theiler.

Beyſpiele.

I. Welches iſt das kleinſte Verhältniß des Baierthalers zum ſächſiſchen Thaler (à 1 fl. 48 kr.) und zum Napoleonsthaler (à 5 Francs)?

Operation. a) 1 B. Th. = $2\frac{2}{5}$ fl. = $\frac{12}{5}$ fl.

1 S. Th. = $1\frac{4}{5}$ fl. = $\frac{9}{5}$ fl.

Alſo $\frac{9}{5}$ Baierth. = $\frac{12}{5}$ Sächſ. Th.

9 Bthl. = 12 Sächſ. Th.

3 Bthl. = 4 Sächſ. Th.

b) 1 Napolthl. = $556\frac{7}{8}$ pf. = $\frac{4555}{8}$ pf.

1 Baierth. = 576 pf. = $\frac{4608}{8}$ pf.

Alſo 4608 Napolthl. = 4555 Baierthl.

* Da dieſe beyden Zahlen keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, ſo iſt auch ein kleineres Verhältniß nicht möglich.

II. Welches iſt das kleinſte Verhältniß der baierſchen Elle zum franzöſiſchen Métre?

Operation. Die Auflöſung kann verſchieden geſchehen, doch dürfte nach Tab. VIII. * α) das kleinſte Verhältniß, an das man ſich im bürgerlichen Leben halten kann, ſo ziemlich das ſeyn:

10[illegible]

1000 Mètres = 1200 bair. Ellen
5 Mètres = 6 bair. Ellen.

III. Welches iſt das kleinſte Verhältniß des bair. Pfundes zum franzöſiſchen Kilogramm?

Operation. 1 Kilogramm = 1000 Grammes
1 bair. Pfund = 560 Grammes

Alſo 1000 bair. Pfund = 560 Kilogramm
25 bair. Pfund = 14 Kilogramm.

II) Gewinn-, Verluſt-, Tararechnungen.

§. 417.

Um Gewinn oder Verluſt zu berechnen, muß man vor allem die Auslage ſowohl, als die Einnahme, d. i. Kauf und Verkauf beſtimmen. Gewinn iſt dann der Ueberſchuß der Einnahme über die Auslage; Verluſt aber der Ueberſchuß der Auslage über die Einnahme. Man kann Verluſt und Gewinn entweder für das Ganze, oder für ein Stück, oder nach Procent beſtimmen.

§. 418.

I. Gewinn und Verluſt für das Ganze.

Es werden S Stücke in allem eingekauft, und je n Stücke koſten p fl. . . folglich S Stücke $= \frac{pS}{n}.$

Ferner werden dieſe S Stücke wieder verkauft, ſo daß je N Stücke P fl. koſten . . . folglich S Stücke $= \frac{PS}{N}.$

Wenn nun $\frac{p}{n} < \frac{P}{N}$; ſo iſt

$\frac{PS}{N} - \frac{pS}{n} = L$ d. h. Gewinn; iſt aber $\frac{p}{n} > \frac{P}{N}$, ſo wird $\frac{pS}{n} - \frac{PS}{n} = D$, d. h. Verluſt für das Ganze.

In beiden Formeln kann jede Größe die unbekannte ſeyn.

Beyſpiel. Ein Krämer kaufte einige Ballen Tuchs, je 4 Ellen um 17 fl.; er verkaufte die nemliche Quantität,

5 Ellen

5 Ellen um 29 fl., und gewann in Allem 186 fl. Wie viele Ellen hatte er in Allem eingekauft?

Aufloſung. Hier iſt $N = 5.$ $P = 29.$ $S = x$
$n = 4.$ $p = 17.$ $L = 186.$

$$\frac{29x}{5} - \frac{17x}{4} = 186$$

$$31\,x = 3720$$

$$x = 120 \text{ Ellen.}$$

§. 419.

II. Gewinn und Verluſt für 1 Stück.

Wenn n Stücke um p fl. gekauft werden, ſo koſtet 1 Stück $\frac{p}{n}$ fl. Wenn N Stücke um P fl. verkauft werden, ſo gilt 1 Stück $\frac{P}{N}$ fl.

Iſt nun $\frac{P}{N}$ größer als $\frac{p}{n}$, ſo wird

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P}{N} - \frac{p}{n} = \frac{Pn - Np}{Nn} = \lambda \text{ Gewinn} \\ \text{Widrigenfalls aber: } \frac{Np - Pn}{Nn} = \delta \text{ Verluſt} \end{array}\right\} \text{für ein Stück.}$$

Beyſpiel. Es wurde eine Quantität Zucker eingekauft, je 4 Pfund um 7 fl.; beym Verſchleiße mußten aber 3 Pfund um 5 fl. gegeben werden; wie viel gieng bey dem Pfunde verloren?

Auflöſung. $n = 4.$ $p = 7.$ $N = 3.$ $P = 5.$

$$\frac{3\cdot7 - 5\cdot4}{3\cdot4} = \frac{21 - 20}{12} = \tfrac{1}{12} \text{ fl.} = 5 \text{ kr.} = \delta.$$

§. 420.

III. Gewinn und Verluſt nach Procent.

Hier iſt vorzüglich die Zeit zu berückſichtigen, innerhalb welcher ſich ein auf den Ankauf einer Waare verwendetes Kapital verintereſſiren ſoll. Dabey muß auch bemerkt werden, ob der Einkauf und Verkauf immer nach dem nemlichen Maßſtab, d. h. in einerley, oder verſchiedenem Ellen- Gewichtmaß gemacht wurde, oder nicht.

Erſter

Erſter Fall. Wie theuer müſſen N Stücke verkauft werden, um l Procent zu gewinnen, wenn n Stücke p fl. koſten, und überdieß 1 Stück von N : 1 Stück von n ſich verhält wie E : e, d. h. e Stücke von N = E Stücken von n?

Nach dieſen Vorausſetzungen gilt der Kettenſatz;

Einnahme fl. x	N Stücke
Stücke n	e
E	p fl. Auslage
Auslage fl. C	(c + l) Einnahme. Hier iſt c immer = 100.

Beyſpiel. Wie theuer muß ein baierſcher Kaufmann die baierſche Elle Tuchs verkaufen, wenn er 100 Regensburger Ellen um 750 fl. kaufte, und 8 Procent gewinnen will?

Auflöſung. Man nehme das Verhältniß zu Hülfe:

1000 bair. Ellen = 1028,36 Regensburger

$$x = \frac{1 \times 1028{,}36 \times 750 \times 108}{1000.000} = 8 \text{ fl. } 20 \text{ kr. beinahe.}$$

Zweyter Fall. Soll Gewinn und Verluſt nach Procent beſtimmt werden, und iſt überdieß die Zeit des Verſchleißes gegeben, welche in Monaten ausgedrückt t heißen kann, ſo gilt die einfache Formel:

Gewinn fl. x	c fl. Auslage
{Ausl. fl. p.	12 Mon.
} Mon. t.	m fl. Gewinn

Beyſpiel. Ein Kaufmann zahlte 18 Ztr. Kaffee mit 1200 fl.; er verſchließ ſie aber in 6 Monaten, das Pfund um 50 kr. Wie viel kann er auf ſolche Weiſe am Hundert gewinnen?

Auflöſung. Er verkaufte alſo 18 Ztr. um 1500 fl.

Gewinn 1500 — 1200 = 300 fl.

Gew. fl. x	100 Ausl.
Ausl. 1200	12 Mon.
Mon. 6	300 fl.

x = 50 Proc. jährl.

§. 421.

Tara heißt bey Kaufleuten das Gewicht der Fäßer, Kiſten und anderer Umſchläge, welche ſammt der Waare gewogen werden müſſen.

Erſter Fall. Wenn die Waare aus dem Umſchlage herausgenommen werden kann, ſo wird dieſer allein gewogen. Das Gewicht der Waare nach abgezogenem Tara, (oder dem Gewichte der Emballage) heißt Netto, (reine Waare); das Gewicht der Waare ſammt Emballage aber sporco, brutto, (unlautere Waare).

Der Nettopreis nach abgezogenem Tara wird alſo ſeyn: (N Pf. brutto — n Pf. Tara) × m fl. (Preis 1 Pfd.)

Beyſpiel. Ein Kaufmann erhielt vier Kiſten Wismuth, den Zentner netto um 25 fl. Das Gewicht der Waare brutto iſt 15¾ Ztr. Nachdem die Kiſten ausgeleert waren fand man, daß die erſte 6¾, die zweyte 7½, die dritte 8, die vierte 9¾ Pfund weg. Wie viel hat der Kaufmann netto zu zahlen?

Auflöſung. Tara = 32 Pfund.

Brutto-Waare = 1500 + 75 Pfd. = 1575 Pfd.

Netto 1575 — 32 = 1543 Pfd.

fl. x	1543 Pfd. Netto
Netto Pfd. 100	25 fl.

x = 385 fl. 45 kr. Netto.

Zweyter Fall. Läßt ſich die Waare nicht wohl aus der Kiſte oder dem Umſchlage herausnehmen, ſondern muß ſie mit dieſem gewogen und alſo sporco bezahlt werden: ſo giebt der Verkäufer einige Pfunde auf den Zentner daran, und dieſes heißt Tara auf den Zentner. Hier wird die Waare nur sporco gewogen, aber nicht mehr netto beſtimmt; es kommen dann (100 Pfd. + Tara) eben ſo hoch, als der Zentner oder 100 Pfd. netto.

Zur Beſtimmung des Nettopreiſes gilt dieſe Formel:

fl. Netto x	N. Ztr. brutto
Brutto (100 + T.)	100 Pfd.
Ztr. 1	m fl.

Bey-

Beyſpiel. Ein Kaufmann erhält eine Tonne Häringe zu 9 Ztr., den Ztr. à 28 fl. 36 kr. Wie viel muß er bezahlen, da auf den Ztr. $10\frac{1}{2}$ Pfd. Tara ausbedungen worden?

Auflöſung. $x = \frac{900 \times 28{,}6}{110{,}5} = 232$ fl. 56 kr.

Dritter Fall. Anſtatt des Tara auf den Zentner, kann man auch Tara von dem Zentner nehmen und geben. Es muß ſich nemlich der Verkäufer einige Pfunde vom Zentner abbrechen laſſen, und ſeine Waare wird ihm nicht ganz bezahlt. Hier vergleichen ſich alſo 100 Pfd. sporco mit (100 — Tara) Pfd. netto; der Nettopreis wird auf folgende Art beſtimmt:

Netto fl. x	N. Ztr. Brutto
Ztr. 1	m fl.
Brutto 100	(100 — T.) Netto.

Beyſpiel. Was iſt der Nettobetrag von 9 Ztr. Wolle Brutto, Tara vom Zentner 10 Pfd.; und das Pfund um 15 kr.?

Auflöſung. $x = \frac{900 \times 90}{100 \times 4} = 202$ fl. 30 kr.

Anmerkung. Da die Fraction $\frac{100}{100+t}$ größer iſt, als $\frac{(100-t)}{100}$, ſo folgt, daß es, bey übrigens gleichen Bedingniſſen, für den Käufer vortheilhafter ſey, Tara vom Zentner zu nehmen.

I) Von der Diviſion in proportionale Theile.

§. 422.

Die Diviſion eines Ganzen (S) in proportionale Theile kann nur durch eine Proportion geſchehen. Die Operation dabey iſt folgende: Man addirt die Verhältnißzahlen (a, b, c, d); dann verhält ſich die Summe derſelben s, zu dem zu vertheilenden Ganzen S, wie jede einzelne Verhältnißzahl zu dem ihr entſprechenden Theile. (Vergl. §. 339.)

$$\text{d. h. } s : S = \begin{cases} a : v \\ b : x \\ c : y \\ d : z. \end{cases}$$

Z. B. Man theile die Zahl 1000 in vier Theile, welche ſich verhalten wie: 2, 5, 6, 7.

Operation. $2 + 5 + 6 + 7 = 20 = s.\quad S = 100.$

$$\text{Alſo}: \cancel{20} : \cancel{1000} = \begin{cases} 2 : v \\ 5 : x \\ 6 : y \\ 7 : z \end{cases} \quad \begin{array}{|l} v = 100 \\ x = 250 \\ y = 300 \\ z = 350. \end{array}$$
$$\qquad 1 : 50$$

Es muß alſo die Proportion ſo oftmal wiederholt werden, als Verhältnißzahlen gegeben ſind. Bringt man das Glied s auf 1, ſo verwandelt ſich die Rechnung in eine bloße Multiplikation. Offenbar gewinnt dadurch der Calcul, ſelbſt in dem Falle, wo s in S nicht ohne Fraction enthalten iſt, wenn man nur mit dem Quotus, welcher gewöhnlich eine gemiſchte Zahl wird, die Multiplikation durch die Verhältnißzahlen ſo vornimmt, daß die Ganzen, und die Fractionen eigends multiplicirt werden.

Z. B. Es ſey das zu theilende Ganze 1259; die Verhältnißzahlen: 2, 5, 6.

Operation. $2 + 5 + 6 = 13 = s.\quad S = 1259.$

$$\begin{array}{l} \cancel{13} : \cancel{1259} = \\ 1 : 96\tfrac{11}{13} = \end{array} \begin{cases} 2 : x \\ 5 : y \\ 6 : z \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x = 192\tfrac{22}{13} = 193\tfrac{9}{13} \\ y = 480\tfrac{55}{13} = 484\tfrac{3}{13} \\ z = 576\tfrac{66}{13} = 581\tfrac{1}{13}. \end{array}$$

§. 423.

Um die Probe zu machen, muß man zeigen, daß die einzelnen Verhältnißzahlen zu den ihnen entſprechenden Theilen das nemliche Verhältniß haben, als die Summe der erſtern zur Summe der letztern, z. B. in der erſtern Aufgabe:

$$\frac{100 : 250 : 300 : 350}{2 : 5 : 6 : 7} = \frac{1000}{20} = 50 \text{ (vergl. §. 331. II.)}$$

Im gemeinen Leben begnügt man ſich zu zeigen, daß die Summe der gefundenen Theile dem Ganzen S gleiche; wobey

wobey aber als richtig vorausgeſetzt wird, daß man die wahren Verhältnißzahlen gewählt habe.

§. 424.

Die Diviſion in verhältnißmäßige Theile hat im bürgerlichen Leben ſehr viele Anwendung, wo immer ein Ganzes in ungleiche, aber verhältnißmäßige Theile getheilt werden ſoll, nach dem verſchiedenen Einfluß oder Anſpruch, welchen Dinge oder Perſonen auf das Ganze ſelbſt haben. Z. B. Kaufleute, welche in Kompagnie ſtehen, müſſen Gewinn und Verluſt nach Maß der Einlagen theilen. Man nennt daher dieſe Rechnung auch insgemein: *Geſellſchafts-, Bergwerks-, Repartitions-Rechnung.*

Die hier vorkommenden Rechnungsbeyſpiele heißen *einfach* oder *zuſammengeſetzt*, je nach dem die Verhältnißzahlen ſelbſt einfach oder zuſammengeſetzt ſind.

Einfache Beyſpiele.

I. Es ſollen 919 fl. 20 kr. unter vier alte Perſonen, nach dem Verhältniſſe ihres Alters vertheilt werden. A zählt 92, B 97, C 100, D 105 Jahre. Wie muß die Vertheilung geſchehen?

Antwort. A erhält $214\frac{2}{3}$. B $226\frac{1}{3}$. C $233\frac{1}{3}$. D 245 fl.

II. Vier Bauern, wovon A $\frac{1}{2}$, B $\frac{3}{4}$, C 1, D $1\frac{1}{4}$ Hof hat, ſollen nach Verhältniß ihrer Güter 560 fl. zahlen. Wie viel trifft einen Jeden aus ihnen?

Auflöſung. Die Bruch-Verhältnißzahlen werden bequemer in ganze Zahlen aufgelöſt.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : 1 : 1\frac{1}{4} = \frac{2 : 3 : 4 : 5}{4} \text{ Summe } 14.$$

Und alſo zahlt A 80, B 120, C 160, D 200 fl.

III. Ein Fuhrmann führte einem Kaufmann einmal 80, das anderemal 104, das drittemal 156 Ztr. den nemlichen Weg. Dafür erhielt er in Allem 566 fl. 40 kr. — Wie viel trifft davon auf jede Fuhr?

IV. Wenn

IV. Wenn bey einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel gehören: wie viele Pfunde ſind von dieſen Ingredienzen zu 60 Ztr. 30 Pfd. Pulver nothwendig?

V. Ein Eiſenhammer lieferte an vier Kaufleute 48 Ztr. Eiſen für 1010 fl. Davon nahm Kaufmann A 9, B 15, C 17, D 7 Ztr. Was hat jeder zu bezahlen?

VI. Vier Perſonen gewannen in der Lotterie 21 fl. A hatte 14, B 17, C 25, D 28 fl. eingelegt. — Wie müſſen ſie den Gewinn nach ihren Einlagen theilen?

Die Probe zur Uebung.

§. 425.

Werden die Verhältnißzahlen ſelbſt, durch das multiplikative Zuſammenwirken mehrerer Urſachen beſtimmt, ſo multiplicirt man die zuſammengehörigen Urſachen durcheinander, und betrachtet die Summe aller Produkte als das mit dem Ganzen S homologe Glied (s).

Zuſammengeſetzte Beyſpiele.

I. Zu einer gemeinſchaftlichen Unternehmung hatte Kaufmann A 500 fl. auf 3 Jahre, B 600 fl. auf 2 Jahre, C 1000 fl. auf 1 Jahr gegeben. Wie müſſen ſie den errungenen Gewinn von 1110 fl. unter ſich rechtmäßig vertheilen?

Auflöſung. A 500 fl. × 3 Jahr = 1500 fl.
B 600 × 2 — = 1200
C 1000 × 1 — = 1000.
Summe = 3700

$$\begin{array}{c} \not{3}\not{7}\not{0}\not{0} : \not{x}\not{x}\not{x}\not{0} \\ 1 : 3 \end{array} = \begin{cases} 150\not{0} : x \\ 120\not{0} : y \\ 100\not{0} : z \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x = 450 \text{ fl. Gewinn} \\ y = 360 \text{ fl. } — \\ z = 300 \text{ fl. } — \end{array}$$

II. Zu einer Straßen-Reparation hatte das Dorf A 7 Stücke Zugvieh auf 14 . . B 4 Stücke auf 20 . . C 9 Stücke auf 9 Tage geſtellet. Wie müſſen ſie den gemeinſchaftlichen Scharwerkslohn von 77 fl. 42 kr. unter ſich vertheilen?

III.

III. Bauer A hatte bey einem Truppendurchzuge 2 Mann auf 7 . . B 5 Mann auf 4 . . C 9 Mann auf 3 . . D 12 Mann auf 6 Tage im Quartier. — Wie müſſen ſie den gemeinſchaftlichen Erſatz von 39 fl. 54 kr. unter ſich theilen?

IV. Ein Fuhrmann führte einem Kaufmann einmal 80 Ztr. 10 Meilen; ein anderesmal 45 Ztr. 15 Meilen; ein drittesmal 20 Ztr. 45 Meilen weit, und begehrte für dieſe drey Fuhren 427 fl. 30 kr. — Wie hoch rechnete er eine jede an?

Zur Uebung!

K) Von der Vermiſchungs- oder Verbindungs-Regel.

§. 426.

Die Vermiſchungsregel (Regula Alligationis) iſt eine Anleitung (wenn Waaren eines verſchiedenen Preiſes und in verſchiedener Quantität in eine Maſſe zu vermiſchen ſind),

1) entweder den Miſchungspreis, oder
2) das ganze Miſchungsverhältniß; oder
3) die einzelnen Quantitäten aus einer Quantität, oder endlich
4) dieſelben aus dem ganzen Miſchungsquantum durch Rechnung zu beſtimmen.

Den erſten Fall nannten die Rechenmeiſter **mittlere**, die übrigen drey Fälle wechſelnde Verbindungsregel.

§. 427.

I. Mittlere Verbindungsregel.

a) **Aufgabe. Aus mehrern und verſchiedenen Beſtimmungen einer und der nemlichen Sache (x) die mittlere Beſtimmung, oder das arithmetiſche Mittel zu finden.**

Auflöſung. Man addire die verſchiedenen Beſtimmungen, und dividire die Summe durch die Anzahl der Beſtimmungen ſelbſt.

Bey-

Beyſpiele. 1) Welches iſt das arithmetiſche Mittel von den Zahlen: 18, 26, 30, 44?

Operation.

$$\begin{aligned} x &= 18 \\ x &= 26 \\ x &= 30 \\ x &= 44 \\ \hline 4x &= 118 \\ x &= \tfrac{118}{4} = 29\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Drey Geometer meſſen einen Thurm; ſie geben die Höhe deſſelben A auf 428,5. B auf 432,5. C auf 430,6 Fuß an. — Welches iſt die mittlere Beſtimmung?

b) Aufgabe. Aus den Quantitäten der zu vermiſchenden Dinge, und aus ihren Preiſen, den Preis nach der Miſchung zu finden.

Auflöſung. Man addire die einzelnen Preiſe der zu vermiſchenden Quantitäten, und dividire dieſe Summe durch die Summe aller Quantitäten: ſo findet man den Miſchungspreis für eine beſtimmte Quantität.

Beyſpiele. 1) Jemand vermiſcht 8 Schäffel Korn, à 12 fl., mit 12 Schäffeln à 15 fl. 30 kr. — Wie theuer wird ein Schäffel des gemiſchten Kornes ſeyn?

Operation. 8 Schfl. × 12 fl. = 96 fl.
12 Schfl. × 15/5 = 186
20 Schfl. = 282 fl.

fl x	1 Schfl.
20	282 fl.
10	141

x = 14 fl. 6 kr. Preis eines Schäffels.

2) Ein Krämer vermiſcht 12 Pfd. Taback à 54 kr. mit 20 Pfunden eines andern zu 40 kr. — Was koſtet ein Pfund des gemiſchten Tabacks?

3) Ein Wirth miſcht 2 Eimer, die Maß zu 1 fl., mit 30 Maßen eines andern Weins zu 48 kr., und mit 12 Maß

Waſſer

Waſſer. — Wie theuer wird eine Maß des ſo gemiſchten Weines ſeyn?

* Der Werth des Waſſers wird = 0 geſetzt.

Die Probe zur Uebung!

§. 428.

II. Wechſelnde Verbindungsregel.

a) Aufgabe. Aus dem mittlern Werthe (oder dem Miſchungspreiſe) und aus den einzelnen Preiſen der zu vermiſchenden Waaren das Verhältniß der zu vermiſchenden Quantitäten zu finden.

Aufloſung. Man ſuche vor allen die Differenzen.

1) Zwiſchen dem Miſchungspreiſe und der beſſern Sorte, und

2) zwiſchen dem Miſchungspreiſe und der ſchlechtern Sorte.

Dieſe Differenzen ſchreibe man aber verkehrt an, d. h. die erſte Differenz zur ſchlechtern, die zweyte zur beſſern Sorte. Die Summe der Differenzen iſt der gemeinſchaftliche Nenner für die Differenzen ſelbſt; folglich wird das ganze Miſchungsquantum = 1 geſetzt.

Beyſpiel. Ein Goldſchmidt hat ein 10 und ein 15 löthiges Silber. Er möchte daraus ein 13 löthiges erhalten. Wie viel muß er von jedem Silber in die Miſchung nehmen?

Operation. $\left.\begin{array}{r}15\\10\end{array}\right|13\begin{array}{l}=3 \;..\; \text{alſo } \frac{3}{5} \text{ vom } 15\\=\frac{2}{5} \;..\; - \; \frac{2}{5} \text{ vom } 10 \text{ löthigen.}\end{array}$

Beweis. Das ganze Verfahren gründet ſich auf eine aus der Lehre von den unbeſtimmten Gleichungen abgezogene Regel. Geſetzt der Goldſchmidt müſſe von dem 15 löthigen x, und von dem 10 löthigen y Theile nehmen, ſo wird:

$$15x + 10y = (x+y) \cdot 13$$
$$15x + 10y = 13x + 13y$$
$$-13x - 10y = -13x + 10y$$
$$\overline{2x \quad = 3y}\text{, folglich } 2 : 3 = y : x.$$
$$\text{und } x : y = 3 : 2.$$

d. i. die Differenzen oder Quantitäten ſtehen im verkehrten Verhältniſſe mit den Werthen der zu vermiſchenden Sorten; folglich muß von der beſſern Sorte um ſo weniger oder mehr, und von der ſchlechtern um ſo mehr oder weniger genommen werden, je näher der Miſchungspreis entweder dem Preiſe der ſchlechtern, oder jenem der beſſern Waare kommt.

Anmerkung. 1) Da ſich Fractionen eines gleichen Nenners wie die Zähler verhalten, ſo kann man den Nenner hinweglaſſen, und die Summe der Zähler als das ganze Miſchungsquantum anſehen.

Daher iſt in dem letzten Beyſpiele:

$x = \frac{3}{5},\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15$ u. ſ. f.
$y = \frac{2}{5},\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

Miſchungsquantum = 1, 5, 10, 15, 20, 25.

Anmerkung 2) Sind mehr als zwey Dinge untereinander zu vermiſchen, ſo müſſen alle Werthe derſelben, jedesmal ein größerer und ein kleinerer, mit dem Miſchungspreiſe verglichen werden, ſo daß dieſer zwiſchen jenen ein mittlerer iſt. Die Differenzen der öfter verglichenen Sorte werden am Ende in eine Summe addirt, und dieſe wird als eine einzige Verhältnißzahl angeſehen.

Beyſpiel. Jemand hat dreyerley Sorten Kaffee, a) das Pfund zu 2 fl., b) das Pfd. zu 2,5 fl., und c) das Pfd. zu 1,5 fl. Nun möchte er davon eine ſolche Miſchung treffen, daß das Pfund des Gemiſches auf 1,8 fl. zu ſtehen käme. — Wie muß die Miſchung geſchehen?

Operation. 25 | 18 = 3   20 | 18 = 3
15 | 18 = 7   15 | 18 = 2.

Es müſſen alſo genommen werden:

Von a) $\frac{3}{15}$, 1, 2, 4 Theile
b) $\frac{3}{15}$, 1, 2, 4 —
c) $\frac{9}{15}$, 3, 6, 12 —

Miſchungsquantum = 1, 5, 10, 20 u. ſ. w.

Anmerkung 3) Die Probe wird über die mittlere Verbindungsregel gemacht.

Z. B.

Z. B. 1 Pfd. à 2 fl. = 2
1 Pfd. à 2,5 fl. = 2,5
3 Pfd. à 1,5 fl. = 4,5
5 Pfd. = 9,0

fl. x	1 Pfd.
Pfd. 5	9 fl.
x	= 1,8 fl.

§. 429.

b) **Aufgabe.** Aus dem Miſchungspreiſe, den Preiſen der zu vermiſchenden Dinge, und der gegebenen Quantität eines Dinges die Quantitäten der übrigen zu finden.

Aufloͤſung. Man ſuche die Differenzen oder Verhältnißzahlen (§. praec.); dann ſind dieſe Verhältnißzahlen unter ſich eben ſo proportional, wie die ihnen entſprechenden Quantitäten unter ſich.

Beyſpiel. Es werden dreyerley Weine untereinander gemiſcht; von a koſtet die Maß 1 fl. 10 kr.; von b 54 kr.; von c 48 kr. Von der beſten Sorte nimmt man 30 Maß in die Miſchung. — Wie viel Waſſer muß darunter geſchüttet und wie viel von jedem der übrigen Weine genommen werden, daß die Maß auf 45 kr. zu ſtehen komme?

Operation. Der Werth des Waſſers = 0.

a) 70 kr	45	45.	b) 54	45	45.	c) 48	45	45.
Waſſer 0		25.	W. 0		9.	W. 0		3.

Alſo vom Waſſer 37 Theile.

Nun gilt die Proportion: $\overset{\text{von a)}}{\underset{3}{\cancel{45}}} : 37 = \overset{\text{Waſſer}}{\underset{2}{\cancel{30}}} : x$

$$x = \frac{74}{3} = 24\tfrac{2}{3} \text{ Maß Waſſer.}$$

Von jeder der übrigen Weinſorten ſind ebenfalls 30 Maß zu nehmen.

§. 430.

c) **Aufgabe.** Aus den Preiſen der zu vermiſchenden Dinge, dem Miſchungspreiſe und dem ganzen Miſchungsquantum die einzelnen Quantitäten zu finden.

Auf-

Auflöſung. Man beſtimme die Verhältnißzahlen; dann verhält ſich die Summe der Verhältnißzahlen zum Miſchungsquantum wie jede einzelne Verhältnißzahl zu der ihr entſprechenden Quantität.

Beyſpiel. Ein Goldſchmidt ſoll ein ſilbernes Kirchengeſchirr, 1 Pfund 28 Loth ſchwer von 10löthigem Silber verfertigen. Nun hat er nur 13 und 11 löthiges. — Wie viel muß er Kupfer darzu nehmen?

Operation. a) 13 | 10 = 10. b) 11 | 10 = 10.
Kupfer 0 | = 3. K. 0 | = 1.

Alſo vom 13löthigen 10 — 1 Pfd. + 28 Loth = 60 Loth.
— 11 — 10
vom Kupfer 4

Summe 24.

$$24 : 60 = \left\{\begin{array}{l} 10 : x \\ 10 : y \\ 4 : z. \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} x = 25 \text{ Loth von a} \\ y = 25 \text{ Loth von b} \\ z = 10 \text{ Loth vom Kupfer.} \end{array}$$

Anmerkung. Die drey Fälle der wechſelnden Verbindungsregel können nach der Regula Cocci aufgelöſt werden. (§. 302.) Die Verbindungsregel §. 427. heißt die mittlere, weil man darin den Mittlern- oder Miſchungspreis ſucht; die Verbindungsregel §. §. 428. 429. 430 heißt die wechſelnde, theils weil darin dreyerley Fälle wechſeln können, theils weil die Differenzen verkehrt angeſchrieben oder verwechſelt werden.

Drittes Hauptſtück.

Anwendung der Lehre von den Progreſſionen und Logarithmen.

§. 431.

Die Lehre von den Progreſſionen und Logarithmen hat, im bürgerlichen Leben, ihre vorzügliche Anwendung

bey

bey Zins-, Zieler-, Diskonto- und Rentenrechnungen, von denen aber nur das Nothwendigſte erklärt werden kann.

Erklärungen.

1) Kapital heißt im Allgemeinen eine Summe Geldes, welche einem Andern zur Benutzung auf eine beſtimmte Zeit überlaſſen wird.

2) Zins- oder Intereſſe nennt man das Geld, welches für die Benutzung eines fremden Kapitals nach einer feſtgeſetzten Zeit, gewöhnlich nach Verlauf eines Jahres, bezahlt wird. — Man unterſcheidet aber einfache und zuſammengeſetzte oder Zins-Zinſen.

a) Einfache Zinſen heißen diejenigen, welche jährlich abgetragen, oder einige Jahre hindurch, ohne ſie als Kapital zu nutzen, blos geſammelt werden.

b) Zuſammengeſetzte, oder Zins-Zinſen ſind diejenigen, welche jährlich zum Kapital geſchlagen, und zugleich mit ihm verzinst werden.

Es ſind Zins-Zinſen in der Regel nicht erlaubt; aber die Entſcheidung über Rechtmäßigkeit oder Unrechtmäßigkeit gehört nicht der Arithmetik zu; übrigens fodert das wiſſenſchaftliche Intereſſe, zu zeigen, wie beyderley Zinſen, mit oder ohne Kapital, mathematiſch beſtimmt werden können.

Erſter Artikel.

Zinsrechnungen.

A) Nach dem einfachen Zins.

§. 432.

I. Wenn man den Zins von 100 (c) fl. in einem Jahre = p; das Kapital = K; die Anzahl der Jahre = t ſetzt, ſo ſind die innerhalb der Zeit t fallenden Zinſen (F).

$$F = \frac{ktp}{c}.$$

II. Die

II. Die Summe des Kapitals und der einfachen Zinſen zu p Procent wird nach t Jahren ſeyn

$$S = K + F = K + \frac{Ktp}{c} = \left(\frac{c+tp}{c}\right) K.$$

(vergl. §. 237. X.)

III. Die Zeit (t), innerhalb welcher die einfachen Zinſen dem Kapitale gleich werden, iſt $= \frac{100}{p}$ (wo p wieder das Procent bedeutet).

IV. Das Procent, zu dem ein gegebenes Kapital ausliegen muß, damit die Zinſen innerhalb der Zeit t dem Kapitale gleich werden, iſt $= \frac{100}{t}$, wobey aber die Zeit t die Anzahl der Jahre ausdrückt, folglich jederzeit in Theilen des Jahres beſtimmt werden muß.

Anmerkung. Die alten Römer, bey denen monathliche Zinſen üblich waren, benannten den Zins von der Anzahl der Monate, innerhalb welchen die einfachen Zinſen dem Kapitale gleich wurden. Usura centesima wars ihnen, wenn dieß in hundert; usura semiscentesima, wenn dieß in zweyhundert Monaten geſchah. — Um das entſprechende Procent zu finden, ſetze man $t = \frac{m}{12}$, wo m die Anzahl der Monate anzeigt, alſo $p = \frac{100 \times 12}{m}$

Usura centesima $= \frac{100 \times 12}{100} = 12$ Procent

Deunx centesima $= \frac{100 \times 12}{\frac{12}{11} \cdot 100} = 11$ —

Sextans centesima $= \frac{100 \times 12}{\frac{6}{5} \cdot 100} = 10$ —

Dodrans centesima $= \frac{100 \times 12}{\frac{4}{3} \cdot 100} = 9$ —

Bescentesima $= \frac{100 \times 12}{\frac{3}{2} \cdot 100} = 8$ —

und ſo septunxcentes. $= 7$	trienscentes. $= 4$
semiscentes. $= 6$	quadranscentes. $= 3$
quincunx.centes. $= 5$	sextanscentes. $= 2$ Procent.

V. Bey

V. Bey einerley Kapital ſtehen die Procente mit den Zeiten; bey einerley Procent die Kapitalien mit den Zeiten; bey einerley Zeit die Kapitalien mit den Procenten im umgekehrten Verhältniſſe.

d. h. wenn $K.p.t = \varkappa.\pi.\tau$

ſo iſt 1) $p : \pi = \tau : t$

2) $K : \varkappa = \tau : t$

3) $k : \varkappa = \pi : p.$

Dieſe Sätze ſind ſchon aus der Lehre von den zuſammengeſetzten Proportionen bekannt, und bedürfen keines Beweiſes mehr.

B) Nach Zinszinſen.

§. 433.

Satz. Wenn ein Kapital K, ſo auf Zinſen ausgelegt wird, daß die jährlichen Zinſen, p vom Hundert, immer zum Kapital geſchlagen und verzinſet werden, ſo iſt der Werth des Kapitals und der Zinſen (S).

1) Nach Verlauf des erſten Jahres $= K\left[\frac{c+p}{c}\right]$

2) — — — zweiten — $= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^2$

3) — — — dritten — $= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^3$

4) Ueberhaupt nach n Jahren . . . $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n$

Beweis. 1) Im erſten Jahre wird verzinſet das Kapital K. Davon iſt der Zins: $\frac{K \times p}{c}$. Mithin Kapital und Zins $= K + \frac{Kp}{c} = \frac{cK + Kp}{c} = K\left(\frac{c+p}{c}\right)$. Dieſe Summe ſey $= \alpha$.

2) Im zweyten Jahre iſt zu verzinſen α; davon ſind die Zinſen $\frac{\alpha \times p}{c}$; folglich Zins und Kapital $= \alpha + \frac{\alpha p}{c}$

$$= \frac{\alpha c + \alpha p}{c} = \alpha\left[\frac{c+p}{c}\right] = \beta.$$

Da

Da aber $z = K\left[\frac{c+p}{c}\right]$, ſo wird $\mathfrak{z} = K\left[\frac{c+p}{c}\right]^2$

3) Im dritten Jahre iſt zu verzinſen $\mathfrak{z}$. Daven iſt der Zins $\frac{\mathfrak{z}p}{c}$, folglich Zins und Kapital $\mathfrak{z}\left(\frac{c+p}{c}\right)$

$$= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^3$$

Nach Verlauf von drey Jahren iſt alſo das Kapital angewachſen auf $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^3 = r$

Nach Verlauf von vier Jahren wird es $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^4 = s$.

folglich nach Verlauf von n Jahren $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n = S$.

Anmerkung. Aus dem nemlichen Grunde iſt der Werth des Kapitals K nach einem halben Jahre

$$= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{\left[\frac{c+p}{c}\right]}$$

nach $\frac{1}{4}$ Jahre $= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^{\frac{1}{4}}$

nach einem Monath $= K\left[\frac{c+p}{c}\right]^{\frac{1}{12}}$

Die Auflöſung geſchieht am leichteſten durch die Logarithmen.

§. 434.

In der Formel $S = K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n$ kann jede der vier Größen S, K, p, n die unbekannte ſeyn.

I. Iſt K unbekannt, und alſo S gegeben, ſo erhält man:

$$K = S : \left[\frac{c+p}{c}\right]^n$$

II. Iſt p unbekannt, ſo ergiebt ſich die Formel:

$$p = c \times \left\{-1 + \sqrt[n]{\frac{S}{K}}\right\}$$

denn

denn $\left[\frac{c+p}{c}\right]^n = \frac{S}{K}$

$$\frac{c+p}{c} = \sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$c+p = c\sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$p = -c + c\sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$p = c \times \left[-1 + \sqrt[n]{\frac{S}{K}}\right]$$

Wenn die Wurzel den dritten Grad überſteigt, und mit Logarithmen gerechnet werden muß, ſo iſt vermöge der Gleichung $\left[\frac{c+p}{c}\right]^n = \frac{S}{K}$

$$\text{Log. }(c+p) = \frac{\text{Log. }S - \text{Log. }K}{n} + \text{Log. }c.$$

Aus Log. $c+p$ wird die entſprechende Zahl $c+p$, und weil c bekannt iſt, hieraus p geſucht. Nennt man die Wurzel aus $\frac{S}{K} = R$, ſo iſt: $p = cR - c = c\,[R - 1.]$

III. Iſt endlich n unbekannt, ſo erhält man durch Logarithmiſirung

$$n \times \text{Log. }\left[\frac{c+p}{c}\right] = \text{Log. }S - \text{Log. }K.$$

$$n = \frac{\text{Log. }S - \text{Log. }K}{\text{Log. }\left[\frac{c+p}{c}\right]}$$

§. 435.

Aufgaben.

I. Welches iſt der Werth eines Kapitals von 10.000 fl. zu 4 Procent nach 10 Jahren, wenn jährlich die Zinſen zum Kapital geſchlagen, und wieder verzinſet werden?

Aufløſung.

$$S = K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n = \text{Log. } K + n \text{ Log. } \left[\frac{c+p}{c}\right] =$$

$$\text{Log. } S = \text{Log. } 10.000 + 10 \text{ Log. } \tfrac{26}{25}.$$

$$\text{Log. } S = 4.1703330 = \text{Log. } 14802,442 \text{ fl.}$$

Alſo S der Werth des Kapitals nach 10 Jahren = 14802 fl. 26 kr. 2 pf. 1 hl.

II. Welches Kapital beträgt, mit Einſchluß ſeiner ſechsjährigen Zinszinſen, 5 vom hundert, 10720 fl. 45 kr. 7,26 hl.?

Aufløſung. $S = \frac{5145967,26}{480,00}$ fl.

$$\text{Log. } K = \text{Log. } S - 6 \text{ Log. } \tfrac{21}{20} = 4.0302258 - 0.1271358$$

$$\text{Log. } K = 3.9030900 = \text{Log. } 8000.$$

Alſo ein Kapital von 8000 fl.

III. Zu wie viel Procent muß ein Kapital von 5000 fl. verzinszinſet werden, daß der Werth deſſelben in 20 Jahren 12058,572 fl. werde?

Aufløſung.

$$\text{Log. } (100 + x) = \text{Log. } \frac{12058,572 - \text{Log. } 5000}{20} + \text{Log. } 100$$

$$\text{Log. } (100 + x) = \frac{4.0812960 - 3.6989700}{20} + 2.00\ldots$$

$$\text{Log. } (100 + x) = 2.0191163 = \text{Log. } 104,5.$$

$x = 4\frac{1}{2}$; alſo zu $4\frac{1}{2}$ Procent.

IV. Wie viele Jahre müſſen vergehen, bis die 5 procentigen Zinszinſen dem Kapitale gleich werden?

Aufløſung. Man nehme ein beliebiges Kapital, z. B. 1000 fl., ſo werden Kapital und Zinszinſen = 2000 fl. = S.

$$x = \frac{\text{Log. } S - \text{Log. } K}{\text{Log. } \left[\frac{c+p}{c}\right]} = \frac{0.3010300}{0,0211893} = 14,2 \text{ Jahre.}$$

V. Die Menſchenzahl eines gewiſſen Landes iſt nach einem verheerenden Kriege 400.000. Nun weiß man aus Erfahrung, daß die jährliche Vermehrung 3 auf das Hundert betrage: wie ſtark wird die Volkszahl nach 8 Jahren ſeyn?

Aufløſung. Beynahe 506.708.

VI. Eine

VI. Eine Waldung verbeſſert ſich, angeſtellten Verſuchen zu Folge, jährlich mit drey Klaftern Procent. Nun wird ſie gegenwärtig auf 10.000 Klafter geſchätzt. Wie viele Klafter wird ſie nach 5 Jahren abwerfen, vorausgeſetzt, daß ſie dieſe Zeit hindurch geſchont werde?

Aufloſung. 11592,74 Klafter.

§. 436.

Die allgemeine Formel für die Summe des Kapitals und der Zinszinſen nach n Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n$ läßt ſich nach dem Binomium auch ſo darſtellen:

$$S = K \times \left[1 + \frac{p}{c}\right]^n = K\left[1 + \frac{n.p}{c} + \frac{n.n-1.p^2}{1.2.c^2} + \frac{n.n-1.n-2p^3}{1.2.3.c^3} + \ldots + \frac{n.n-1\ldots \times n-(n-1).p^n}{1.2\ldots n-1.n.c^n}\right]$$

Hieraus leitet ſich folgende einfache Methode ab, den Werth eines Kapitals z. B. von 200.000 fl. nach Verlauf mehrerer Jahre (z. B. 10) zu finden. Man ſchreibe alle Jahre, von dem letzten angefangen, der Reihe nach rückwärts an,

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

multiplicire die Reihe mit dem Procente, z. B. hier 4, und ſchreibe unter die Produkte der Reihe nach die Nenner 100, 200, 300 ...... $n \times 100$; d. i. $\frac{40}{100}$, $\frac{36}{200}$, $\frac{32}{300}$, $\frac{28}{400}$, $\frac{24}{500}$, $\frac{20}{600}$, $\frac{16}{700}$, $\frac{12}{800}$, $\frac{8}{900}$, $\frac{4}{1000}$. Nun multiplicire man mit dem Kapital 200000 den erſten Bruch $\frac{40}{100}$. Produkt 80.000. Damit multiplicire man die zweyte Fraction. Mit dem Produkt die dritte, und ſo mit dem zuletzt gefundenen Produkte die nächſte Fraction, und dieß ſo lange, bis das Produkt nicht mehr den tauſendſten Theil eines Gulden beträgt. Die einzelnen Produkte werden nun zum Kapitale addirt. Die Summe giebt den Werth des Kapitals mit den Zinszinſen nach 10 Jahren.

Operation. Kapital 200.000 fl.
Zins 80.000
Zzins . . 14.400
Zzzins . . 1.536
Zzzzins . . . 107.52
Zzzzzins 5.16096
Zzzzzzins 0.172032
Zzzzzzzins 0.0039216

Summe = 296.048,857 fl.

Anmerkung 1) Will man blos die Summe der 10 jährigen Zinszinſen haben, ſo darf man nur das Kapital nicht als Summand anſchreiben.

2) Bey Berechnung der Zinszinſen für kleinere Kapitalien kann man den größten Theil der letzten Fractionen hinweglaſſen, weil nur die erſten zur Beſtimmung des Facites weſentlich beytragen.

§. 437.

Wenn man zu dem Kapitale, außer den jährlichen Zinſen auch noch eine neue Summe A ſchlägt, und auch dieſe mit verzinſet, ſo wächſt nach §. 433. das Kapital K alſo an:

Nach 1 Jahr: $K\left[\frac{c+p}{c}\right] + A$

— 2 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^2 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 + A$

— 3 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^3 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 + A$

— 4 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^4 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^3 +$
$A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 + A$

— n Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1} +$
$A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-2} + \ldots + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 + A = \Sigma.$

Dieſe

Dieſe Reihe beſteht aus zwey Theilen, wovon der eine $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n$, der andere aber, rückwärts geſchrieben, die geometriſche Progreſſion iſt:

$$A + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2 + A\left[\frac{c+p}{c}\right]^3 + \ldots\ldots +$$

$$A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1}.$$ Davon iſt die Summe:

$$= \left[A\left(\frac{c+p}{c}\right)^n - A\right] : \left[\frac{c+p}{c} - 1\right] = \frac{cA \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n - cA}{p}$$

Dazu den erſten Theil addirt, giebt zur ganzen Summe obiger Reihe:

$$\Sigma = \left[\frac{pK + cA}{p}\right] \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n - \frac{cA}{p}.$$

Der erſte Theil dieſer Formel muß logarithmiſch berechnet werden, und iſt

$$= \mathrm{Log.}\left[\frac{pK + cA}{p}\right] + n\,.\,\mathrm{Log.}\left[\frac{c+p}{c}\right].$$

§. 438.

Wenn man aber, anſtatt zum Kapitale, das auf Zinszinſen liegt, jährlich eine Summe zu legen, jährlich eine Summe B hinwegnimmt: ſo vermindert ſich das Kapital in dem nemlichen Verhältniſſe, als es vorhin (§. praec.) angewachſen iſt; nemlich nach n Jahren wird die Summe s.

$$s = K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1} - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-2} -$$

$$B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-3} - \ldots\ldots - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 - B.$$

$$s = \left[\frac{pK - cB}{p}\right] \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n + \frac{cB}{p}.$$

Wenn nun $\frac{cB}{p} > K$ iſt, ſo muß das Kapital immer kleiner werden, und zuletzt ganz verſchwinden.

Aufgaben.

Aufgaben. I. Jemand legt 1200 fl. auf Zinszinſen zu $4\frac{1}{2}$ Procent; zugleich vermehrt er das Kapital ſelbſt jährlich um 100 fl. Wie groß wird dieſes nach Verlauf von 10 Jahren ſeyn?

Auflöſung. $\Sigma = \frac{15400}{45} \times \left(\frac{104,5}{100}\right)^{10} - 2222,2$

$$\text{Log. } \Sigma = 3.5343082 + 0.1911630 = 3.7254712$$
$$= \text{Log. } 5314,6$$
und $5314,6 - 2222,2 = 3092,4$ fl.

II. Ein Edelmann hat 40.000 fl. zu 5 Procent anliegend. Da ihm aber die Intereſſen nicht zureichen, ſo zieht er vom Kapital ſelbſt jährlich 2500 fl. ab. Wann wird das Kapital rein aufgezehrt ſeyn?

Auflöſung.

Hier iſt $s = 0$. $K = 40.000$. $B = 2500$. $p = s$.

Daher $10000 \times (\frac{21}{20})^n = 50,000$; folglich $(\frac{21}{20})^n = s$.

$$n = \frac{\text{Log. } 5}{\text{Log. } \frac{21}{20}} = \frac{0.6989700}{0.0211893} = 32,9 \text{ Jahr.}$$

Alſo in 32,9 Jahren.

§. 439.

Wenn von einem auf Zinszinſen angelegten Kapitale eine beſtimmte jährliche Summe, welche die jährlichen Zinſen des Kapitals überſteigt, abgezogen wird, ſo heißt

1) das Kapital die Miſe,

2) die jährliche Summe eine Rente, und zwar

α) Jahr- oder Zeitrente (Annuität), wenn ſie ſo lange dauert, bis das angelegte Kapital ganz aufgezehrt iſt;

β) Leib- oder Lebensrente aber, wenn ſie bis zum Tode des Empfängers fortgeht.

Iſt hierüber ein Vertrag errichtet, ſo heißt

3) derjenige, welcher die Miſe empfängt, und die Rente auszahlt: Entrepreneur;

4) der, welcher die Miſe giebt, und die Rente empfängt, der Rentirer.

Die

Die **Berechnung der Zeitrenten** geht ganz nach der §. praec. aufgeſtellten Form, wo K die Miſe, B die bedungene Rente, n die Dauer derſelben, oder die Anzahl der Jahre, p das Procent ausdrückt. Da nun nach Verlauf von n Jahren das Kapital heimbezahlt ſeyn muß, ſo iſt s allezeit = o.

Die **Leibrente** iſt als eine Zeitrente zu betrachten, für welche eine ſolche Anzahl von Jahren angenommen wird, als der Rentirer noch zu leben Wahrſcheinlichkeit hat. Die Dauer der Leibrente wird aus **Mortalitäts-Tabellen** nach der Wahrſcheinlichkeits-Rechnung beſtimmt. Bey den Rentenrechnungen ſind **folgende drey Aufgaben** zu löſen.

§. 440.

I. **Aufgabe. Aus der Miſe K, der Rente B, dem Procente p die jährliche Dauer der Rente, oder die Größe n zu finden.**

Auflöſung. $\left[\frac{cB - pK}{p}\right] \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n = \frac{cB}{p}.$

Setzt man für die zuſammengeſetzten Größen einfache, ſo wird: $\alpha \times \beta^n = \gamma$

$$n = \frac{\text{Log.}\,\gamma - \text{Log.}\,\alpha}{\text{Log.}\,\beta.}$$

Beyſpiel. Wie lange dauert eine Rente von jährlich 1000 fl., wenn die Miſe 10.000 fl. zu 4 Procent iſt?

Antwort. 13,022 Jahre, oder 13 Jahre 6 Tage.

II. **Aus den Größen K, p, n die Rente B zu finden.**

Auflöſung. $\frac{cB}{p} \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n - \frac{cB}{p} = \frac{pK\left[\frac{c+p}{c}\right]^n}{p}$

$$B = pK\left[\frac{c+p}{c}\right]^n : c\left[\left(\frac{c+p}{c}\right)^n - 1\right]$$

Bey-

Beyſpiel. Vom Kapitale 100.000 zu 5 Procent floſſen die jährlichen Renten 36 Jahre, 8 Mon. 22,8 Tage. Wie viel hatte die jährliche Rente betragen?

Antwort. 6000 fl.

III. Aus den Größen B, n, p die Miſe K zu finden.

Auflöſung. Nach Aufgabe II. wird:

$$K = \frac{cB \times \left[\left(\frac{c+p}{c}\right)^n - 1\right]}{p \times \left(\frac{c+p}{c}\right)^n}$$

Beyſpiel. Wie groß muß die Miſe ſeyn, welche zu 4 Procent eine zehnjährige Rente von jährlich 600 fl. abwirft?

Antwort. 6.488,716 fl.

Zweyter Artikel.
Diskonto Rechnungen.

A) Nach dem einfachen Zins.

§. 441.

Erklärungen.

Den Werth einer Summe Geldes, welche erſt nach einer gewiſſen Zeit verfällig iſt, für Vorausbezahlung beſtimmen, heißt dieſe Summe diskontiren. Da nemlich die Vorausbezahlung einer, nach einer beſtimmten Zeit verfälligen, Summe von Seiten des Schuldners nur dann ohne Nachtheil geſchehen kann, wenn dieſer ſo viel von der Summe abzieht, als der andere, dem die Summe vorausbezahlt wird, bis zur Verfallzeit an Zins gewinnen kann, wenn er das vorausbezahlte Geld ſogleich ausleiht: ſo muß ſich der Gläubiger, oder der, welchem die Summe vorausbezahlt wird, einen Abzug gefallen laſſen, welcher bey einfachen Zinſen Diskonto oder Rabatt,

Rabatt, bey Zinsʒinſen aber gewöhnlich Interuſurium heißt. — Man kann nemlich nach einfachen oder zuſammengeſetzten Zinſen discontiren. — Allerdings leidet der Vorausbezahlende nach dem erſten Diskonto einen kleinen Verluſt, indem ſich der Gläubiger einen Zins zueignet, welcher erſt nach der gänzlichen Verfallzeit des Kapitals ſein würde. Da aber bey einſeitigen Foderungen Zinszinſen ohnehin nicht geſtattet werden, indem Privatperſonen, beſonders kleine Portionen eines einfachen Zinſes nicht ſogleich wieder auslegen können, ſo verachtet man dieſe kleine Unrichtigkeit, indem der Schuldner nach einfachen Zinſen keinen Verluſt hat, und die Diskontirung nach Zinszinſen um vieles langwieriger und beſchwerlicher iſt.

§. 442.

Nennt man nun das Kapital, welches anticipirt werden ſoll K, das jährliche Procent p, die Zahl der Jahre bis zur Verfallzeit n, und 100 = c: ſo iſt der baare oder jetzige Werth (P) des nach einer beſtimmten Zeit verfälligen Kapitals K.

1 Jahr früher $= K \times \frac{100}{100 + p \cdot 1}$

2 Jahre früher $= K \times \frac{100}{100 + 2 \cdot p}$

3 Jahre früher $= K \times \frac{100}{100 + 3 \cdot p}$

$\frac{1}{2}$ Jahr früher $= K \times \frac{100}{100 + \frac{1}{2} p}$

$\frac{1}{4}$ Jahr früher $= K \times \frac{100}{100 + \frac{1}{4} p}$

n Jahre früher $= K \times \frac{100}{100 + n p}$

Anmerk. Die Procente des Diskonto müſſen bedungen werden, ſonſt dürfte man ſich an das landesübliche z. B. 5 fl. halten.

Beyſpiel. I. Welches iſt der baare Werth von 1000 fl., die nach 6 Jahren verfällig ſind, wenn ſie zu 4 vom hundert discontirt werden?

Operation. $P = 1000 \times \frac{100}{124} = 806$ fl. 27 kr. $\frac{24}{31}$ hl.

Das

Das Diskonto findet man, wenn man den baaren von dem künftigen Werthe abzieht: 1000 fl. — 806 fl. 27 kr. $\frac{24}{31}$ hl. = 193 fl. 32 kr. $7\frac{7}{31}$ hl.

Wenn nun der Gläubiger die ihm vorausbezahlte Summe ſogleich nach dem Empfange mit dem nemlichen Procente, als diskontirt wurde, wieder auf Zinſen leiht, ſo erhält er in 6 Jahren eben ſo viel Zins, als das abgezogene Diskonto beträgt.

II. Welches iſt der baare Werth einer nach $3\frac{1}{2}$ Jahr verfälligen Summe von 12000 fl. mit 5 procentigem Diskonto?

Antwort. 10212 fl. 46 kr. beynahe.

§. 443.

Bey einfachen Diskontorechnungen ſteht die nach einer beſtimmten Zeit verfällige Summe ohne Zinſen, und ſo wurde es in den bisherigen Beyſpielen vorausgeſetzt. Sollte aber, was ausdrücklich angemerkt werden muß, dieſe Summe während der gegebenen Zeit zu geringern Procenten verzinſet, und zu höhern diskontirt werden: ſo muß man erſt die Zinſen berechnen, welche das Kapital bis zur Verfallzeit tragen würde, und dann die ganze Summe, d. i. Kapital und Zinſen nach der gezeigten Art diskontiren.

Beyſpiel. Es liegen 5000 fl. auf 2 procent. Zinſen; die eine Hälfte des Kapitals iſt nach 2, die andere nach 5 Jahren zahlbar. Welches iſt der baare Werth des ganzen Kapitals gegen 5 Proc. Diskonto?

Operation.

I. Hälfte = 2500 fl.	II. Hälfte = 2500 fl.
Zins v. 2 Jahren $= \frac{2500 \times 2 \times 2}{100}$	Zins v. 5 Jahren $= \frac{2500 \times 2 \times 5}{100}$
= 100 fl.	= 250 fl.
Kapital und Zins = 2600 fl.	Kapital und Zins = 2750 fl.
$P = 2600 \times \frac{100}{110} = 2363\frac{7}{11}$ fl.	$P = 2750 \times \frac{100}{125} = 2200$ fl.

Der baare Werth des ganzen Kapitals iſt alſo: 4563 fl. 38 kr.

B) Dis-

B) Diskonto nach Zinszinſen, oder Interuſurium.

§. 444.

Satz. Eine Summe Geldes K, welche ohne Zins aufliegt, und erſt nach einem Jahr verfällig iſt, gilt zu Zinszinſen diskontirt, für die Vorausbezahlung 1 Jahr früher:

$$K \times \left\{\frac{c}{c+p}\right\}.$$

Beweis. Wenn der Gläubiger die Summe $K \times \left\{\frac{c}{c+p}\right\}$ ſogleich nach dem Empfange auf Zinſen auslegt, ſo wächſt ſie in einem Jahre auf K an; denn $K\left\{\frac{c}{c+p}\right\} \times \left\{\frac{c+p}{c}\right\} = K.$

Anmerkung. Man kann dieſen Satz auch ſo beweiſen. Es ſey $\pi = \frac{c}{p}$.

1) Der Schuldner erlege jetzt $K - \frac{K}{\pi}$, d. i. die Summe nach Abzug des Intereſſe, welches dieſelbe in einem Jahre abwerfen würde. Offenbar hat er ſich auf dieſe Art etwas zugeeignet, worauf er erſt am Ende des Jahres ein Recht hat, nemlich das Intereſſe von $\frac{K}{\pi}$.

2) Dieſes hat er alſo am Ende des Jahres zu verzinſen mit $\frac{K}{\pi^2}$

3) Er erlege dieſe kleine Summe ſogleich mit Abzug des Intereſſe, d. i. er zahle $\frac{K}{\pi^2} - \frac{K}{\pi^3}$

4) Das Intereſſe $\frac{K}{\pi^3}$ gebührt ihm ebenfalls erſt am Ende des Jahres, und er hat es bis dahin zu verzinſen mit $\frac{K}{\pi^4}$.

5) Wenn er dieſen Zins ſogleich erlegt, darf er einen Abzug machen, und er ziehe das Intereſſe $\frac{K}{\pi^5}$ ab, d. i. er erlege $\frac{K}{\pi^4} - \frac{K}{\pi^5}$

6) Die

6) Die ſogleich zu erlegende Summe läßt ſich alſo durch eine unendliche Reihe vorſtellen, deren Anfang iſt:

$$K - \frac{K}{\pi} + \frac{K}{\pi^2} - \frac{K}{\pi^3} + \frac{K}{\pi^4} - \frac{K}{\pi^5}$$

7) Weil in dieſer Reihe das erſte Glied K, und der Exponent $-\frac{1}{\pi}$ iſt, ſo wird $P = \frac{K}{1+\frac{1}{\pi}}$.

8) Da aber $\pi = \frac{c}{p}$, ſo ergiebt ſich durch die Subſtitution:

$$P = \frac{K}{1+\frac{p}{c}} = K\left[\frac{c}{c+p}\right]$$

Beyſpiel. Die Summe von 10000 fl. liegt unverzinslich auf ein Jahr an. Was iſt ihr gegenwärtiger Werth nach einem Abzug von 5 Procent?

Auflöſung. $P = 10000 \times \frac{100}{105} = 9523{,}809$ fl.

§. 445.

Satz. Der gegenwärtige Werth einer Summe K, welche auf n Jahre unverzinslich anliegt, iſt $K\left[\frac{c}{c+p}\right]^n$

Beweis. Dieſe Summe wird in n Jahren mit Zins und Zinszinſen auf K anwachſen; denn

$$K\left[\frac{c}{c+p}\right]^n \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n = K.$$

Anmerkung. Der Beweis dieſes Satzes kann auch ſo geführt werden:

1) Es liege eine Summe K z. B. auf drey Jahre unverzinslich an. Wollte man nun dieſelbe ein Jahr früher, d. i. nach dem zweyten Jahre heimbezahlen: ſo iſt ihr Werth

$$P = K\left[\frac{c}{c+p}\right] \text{ nach §. praec.}$$

2) Wollte man dieſe Schuld wieder ein Jahr früher, d. i. die Summe K zwey Jahre vor der Verfallzeit, erlegen, ſo wäre gleichfalls

P =

$$P = K\left[\frac{c}{c+p}\right] \times \left[\frac{c}{c+p}\right] = K\left[\frac{c}{c+p}\right]^2$$

3) Auf die nemliche Weiſe ergiebt ſich für die dreyjährige Vorausbezahlung: $P = K\left[\frac{c}{c+p}\right]^3$; und allgemein

4) für die n jährige: $P = K\left[\frac{c}{c+p}\right]^n$.

Beyſpiele. I. Welches iſt der baare Werth einer Summe von 100.000 fl., welche unverzinslich aufliegt, und nach 10 Jahren zahlbar iſt; wenn nur 4 Procente Diskonto erlaubt werden?

Auflöſung. $P = 100.000 \times [\frac{25}{26}]^{10}$

$$\text{Log. P.} = \text{Log. } 100.000 + 10 \text{ Log. } \tfrac{25}{26}$$
$$\text{Log. P.} = 5.0000000 + 0.8296670.\,(-1)$$
$$\text{Log. P.} = 4.8296670 = \text{Log. } 67.556{,}47$$
$$P = 67556{,}47 \text{ fl.}$$

II. Jemand genießt eine jährliche Rente von 1000 fl., die ſchon jetzt anfängt, und 20 Jahr dauert. Er will ſie aber jetzt für baares Geld zu 5 Procent verkaufen. Wie viel kann er mit Recht verlangen?

Auflöſung. Der Werth dieſer Rente wird durch folgende Progreſſion beſtimmt, wenn 1000 = m geſetzt wird:

$$m + m.\tfrac{20}{21} + m\,(\tfrac{20}{21})^2 + m\,(\tfrac{20}{21})^3 \ldots\ldots + m\,(\tfrac{20}{21})^{19}$$

Hier iſt $q = \frac{20}{21}$; folglich die Summe der Progreſſion, oder der Werth der vorauszubezahlenden Rente:

$$P = \frac{m - m \times [\frac{20}{21}]^{20}}{\frac{1}{21}} = 21\,[m - m\,(\tfrac{20}{21})^{20}]$$

$$\text{Log. m } (\tfrac{20}{21})^{20} = \text{Log. } 1000 + 20 \text{ Log. } \tfrac{20}{21} = 3.00\ldots + 20 \times [0.9788107.\,(-1)]$$

$$\text{Log. m } (\tfrac{20}{21})^{20} = 2.5762140 = \text{Log. } 376{,}889.$$

Folglich $P = 21\,[1000 - 376{,}889] = 13.085{,}331$ fl.

Anmerkung. Sucht man nach §. 440. III. die Miſe, welche eine 19jährige Rente von 1000 fl. abwirft, und addirt man dazu 1000 fl., ſo kommt man auf das nemliche Reſultat.

III. Eine

III. Eine Waldung wird zu 36000 Klaftern abgeſchätzt. Wie viele Klafter mag ſie vor 10 Jahren enthalten haben, wenn ſie ſich jährlich um 3 Procent verbeſſerte?

Zur Uebung!

Dritter Artikel.

Zieler- oder Terminrechnungen.

A) Nach dem einfachen Zins.

§. 446.

Wenn eine Summe Geldes unverzinslich, nach und nach, d. h. auf Ziele oder in Terminen zahlbar iſt, ſo läßt ſich ein Zeitpunkt ausfindig machen, wo die Summe auf einmal zu bezahlen iſt, oder es laſſen ſich die Termine verändern. Auch kann eine Summe Geldes, welche unverzinslich nach einer beſtimmten Zeit auf einmal zu zahlen iſt, in Terminen bezahlt werden, verſteht ſich mit Einwilligung der Betheiligten. Wie nun dieſes ohne Nachtheil ſowohl des Schuldners, als auch des Gläubigers geſchehen könne, lehrt die Terminrechnung. Dieſe Rechnungsbeyſpiele leiden aber ſo mannigfaltige Wendungen und Bedingungen, daß ſie nicht wohl unter beſtimmte Rubriken gebracht werden können.

Man habe die allgemeine Aufgabe:

Eine Summe Geldes (Σ) liegt unverzinslich an, ſo daß α in λ, β in μ, γ in π Jahren verfällig iſt. Wann kann die Summe, des Vertrags unbeſchadet, auf einmal erlegt werden?

Nach dem einfachen Zinſe iſt dieſe Frage identiſch mit der: In wieviel Jahren können Σ fl. zu gleichen Procenten eben ſo viel Zins geben, als α fl. in λ, β fl. in μ, γ fl. in π Jahren?

Iſt

Iſt die Zeit $= x$, ſo wird nach der Proportion:

$$\begin{array}{r|l} \text{Jahr } x & 1 \text{ Zins} \\ \text{fl. Kap. } \Sigma & \left.\begin{array}{l} \alpha\times\lambda \\ +\beta\times\mu \\ +\gamma\times\pi \end{array}\right\} \text{Kapital und Zeit.} \\ \text{Zins } 1 & \end{array}$$

$$\Sigma x = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\pi$$

$$x = \frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\pi}{\Sigma}$$

Sollten aber die Procente bey **verzinslichen** Summen, welches ausdrücklich geſetzt werden muß, verſchieden ſeyn, und z. B. Σ zu p, α zu b, β zu c, γ zu d vom Hundert verzinſet werden, ſo würde ſich die Formel alſo modificiren:

$$\Sigma p x = \alpha . b . \lambda + \beta . c . \mu + \gamma . d . \pi$$

§. 447.

Beyſpiele.

I. A iſt dem B nach 3 Monaten 1000 fl., nach 5 Monaten 800 fl., nach 10 Monaten 1200 fl. zu zahlen ſchuldig. Wann kann B die ganze Summe auf einmal fodern?

Operation.

Hier iſt $\Sigma = 1000 + 800 + 1200 = 3000$

$$x = \frac{3000 + 4000 + 12000}{3000} = \frac{19}{3} = 6\tfrac{1}{3} \text{ Monat.}$$

II. Eine Summe von 1600 fl. iſt auf Termine zahlbar, und zwar 400 fl. nach einem, 500 fl. nach 3, das übrige nach 4 Jahren. Man beobachtete aber dieſe Termine nicht, und zahlte ſchon nach dem erſten halben Jahre 900 fl. Wann muß das Uebrige auf einmal bezahlt werden?

Operation. Nach Heimbezahlung von 900 fl. reſtiren noch 700 fl.,

alſo: $700 \times x = 400 \times 1 + 3 \times 500 + 4 \times 700 - \frac{1}{2} \times 900$

$$700\,x = 400 + 1500 + 2800 - 450 = 4250$$

$$x = \tfrac{4250}{700} = 6 \text{ Monate } 26 \text{ Tage.}$$

III. Ein Sohn muß ſeinem Vater 1000 fl. in zehnjährigen Terminen, und zwar am Ende jedes Jahres 100 fl.

zahlen,

zahlen, und dieſelben bis zu ihrer Verfallzeit mit 3 Procent verzinſen. Der Vater wünſcht aber die ganze Summe auf einmal zu erhalten. Wann kann ſie ihm der Sohn ohne ſeinen Nachtheil bezahlen, wenn 5 das landesübliche Procent iſt?

Operation. Da die Termine in einer arithmetiſchen Progreſſion fortlaufen, ſo läßt ſich der mittlere Termin $\frac{100+1000}{2} = \frac{1100}{2} = 550$ beſtimmen, welcher mit der Gliederzahl 10 multiplicirt einem Kapitale gleicht, das in 10 Jahren eben ſo viel Zins giebt, als die einzelnen Poſten. Es entſteht alſo die Frage: in wie vielen Jahren 1000 fl. zu 5 Procent eben ſo viele Intereſſe abwerfen, als 550 fl. zu 3 Procent in 10 Jahren; d. i.

$$1000 \times 5 \times x = 550 \times 4 \times 10$$
$$x = 3\tfrac{3}{10}\ \text{Jahr.}$$

Da nun der Vater mit 1000 fl. Kapital zu 5 Procent in $3\frac{3}{10}$ Jahren eben ſo viel Zins erhalten kann, als die einzelnen ihm zu zahlenden Poſten in 10 Jahren abwerfen, ſo kann ihm der Sohn das Kapital nur nach $10 - 3\frac{3}{10}$, d. i. 6,7 Jahren auf einmal zahlen.

B) Terminrechnung nach Zinszinſen.

§. 448.

Bey den Terminrechnungen nach Zinszinſen liegt die Interuſuriumsrechnung zu Grunde; d. h. Es muß ſowohl der baare Werth der in Terminen zu zahlenden Partialſummen, als auch der baare Werth der ganzen Summe für die Vorausbezahlung beſtimmt, und beyde müſſen nach den Bedingungen der Aufgabe mit einander verglichen werden.

Beyſpiele.

I. A iſt dem B 1000 fl. nach 2 Jahren, 2000 fl. nach 4 Jahren, und 7000 fl. nach 6 Jahren zu zahlen ſchuldig. Er wünſcht dieſe Schuld von 10.000 fl. ohne ſeinen und ſeines Gläubigers Schaden auf einmal abzutragen: Wann kann dieſes geſchehen, wenn 5 das landesübliche Procent iſt?

Opera-

Operation.

$$10.000\times\left[\tfrac{20}{21}\right]^x = 1000\times\left[\tfrac{20}{21}\right]^2 + 2000\times\left[\tfrac{20}{21}\right]^4 + 7000\times\left[\tfrac{20}{21}\right]^6$$

$$\text{Log. } 1000 + 2\,\text{Log. } \tfrac{20}{21} = 2.9576214 = \text{Log. } 907{,}0294$$

$$\text{Log. } 2000 + 4\,\text{Log. } \tfrac{20}{21} = 3.2162728 = \text{Log. } 1645{,}405$$

$$\text{Log. } 7000 + 6\,\text{Log. } \tfrac{20}{21} = 3.7179622 = \text{Log. } 5223{,}508$$

$$x = \frac{\text{Log. } 7775{,}9424 - \text{Log. } 10.000}{\text{Log. } \tfrac{20}{21}}$$

$$= \frac{0{\cdot}1092469}{0.0211893} = 5{,}155 \text{ Jahre} = 5 \text{ Jahr } 1 \text{ Mon. } 26 \text{ Tage.}$$

II. Jemand iſt für ein gekauftes Gut 40.000 fl. ſogleich zu zahlen ſchuldig; er wünſcht aber dieſe Schuld in 12 jährlichen Terminen abzutragen. Wieviel muß er jährlich zahlen, wenn 5 das landesübliche Procent iſt?

Operation. Er zahle jährlich x fl. ſo wird

$$40.000\text{ fl.} = x\left[\tfrac{20}{21} + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\tfrac{20}{21}\right)^{12}\right]$$

$$40.000 = x\,\frac{\left[\tfrac{20}{21} - \left(\tfrac{20}{21}\right)^{13}\right]}{1 - \tfrac{20}{21}} = \left[20 - \frac{20^{13}}{21^{12}}\right] x$$

$$x = \frac{40.000}{8{,}86326} = 4.513{,}013 \text{ fl.}$$

ſo viel muß jährlich bezahlt werden.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe iſt identiſch mit folgender: Wie groß iſt die zwölfjährige Rente, welche zu 5 Procent verzinſet, die Summe von 40.000 abwirft?

III. A hat an B nach 3 Jahren 3000, und nach 8 Jahren 4000 fl. zu zahlen, und überdieß beyde Summen bis zur Verfallzeit mit 3 Procent zu verzinſen. Da aber B eben Geld vonnöthen hat, ſo macht ſich A anheiſchig 2000 fl. ſogleich baar, das Uebrige aber nach einem Jahre, und mit 2 Procent discontirt zu zahlen. Wieviel wird A nach einem Jahre zu zahlen haben?

Operation. Hier muß der baare Werth ſowohl der Zinſen, als auch der Kapitalien beſonders beſtimmt werden.

Die jährigen Zinſen von 3000 fl. zu 3 Proc. = 90 fl.

Die Zinſen von 4000 fl. . . . . = 120 fl.

Der baare Werth der dreyjährigen Zinſen:

$$= 90\left[\tfrac{20}{21} + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3\right] = 244{,}7224 \text{ fl.}$$

Der baare Werth des Kapitals:

$$3000 \times (\tfrac{20}{21})^3 = 2591{,}49.$$

Der baare Werth der 8 jährigen Zinſen:

$$= 120\,[\tfrac{20}{21} + (\tfrac{20}{21})^2 + \ldots + (\tfrac{20}{21})^8] = 775{,}68 \text{ fl.}$$

Summe der vier Poſten 6319,2324.

Zieht man davon ab, was gleich baar bezahlt wird, ſo bleibt: 4319,2324 fl.

$$\text{Alſo } x \times \tfrac{100}{102} = 4319{,}2324$$

$$x = 4405{,}615 \text{ fl.}$$

ſoviel hat A nach einem Jahre zu zahlen.

IV. Ein Fürſt hatte einem verdienten Officiere eine jährliche Rente auf zehn Jahre ausgeſprochen, ſo zwar, daß dieſer im erſten Jahre 100, im zweyten 200, im dritten 300, und ſo in jedem folgenden Jahre um 100 fl. mehr erhalten ſollte. Weil aber dieſer baares Geld vonnöthen hat, ſo läßt er ſich die zehnjährige Rente gegen 6 procentiges Disconto (auf Zinszinſen) vorausbezahlen. Welches iſt der baare Werth der Rente?

Operation. Der Werth dieſer zehnjährigen Rente, P iſt

$$= 100 \times [\tfrac{100}{106}] + 200\,[\tfrac{100}{106}]^2 + 300\,[\tfrac{100}{106}]^3 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 1000\,[\tfrac{100}{106}]^{10}$$

Man kann dieſe Reihe in folgende zerfällen:

$$\text{I.}\quad 100 \times \tfrac{100}{106} + 100\,[\tfrac{100}{106}]^2 + 100\,[\tfrac{100}{106}]^3 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 100\,[\tfrac{100}{106}]^{10}$$

$$\text{II.}\quad 100\,[\tfrac{100}{106}]^2 + 100\,[\tfrac{100}{106}]^3 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 100\,[\tfrac{100}{106}]^{10}$$

$$\text{III.}\quad 100\,[\tfrac{100}{106}]^3 + 100\,[\tfrac{100}{106}]^4 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 100\,[\tfrac{100}{106}]^{10}$$

+ IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.

Nun iſt die Summe der erſten Reihe $= \left[100^2 - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$

— — der zweyten — $= \left[100^3 - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$

— — der dritten — $= \left[100^4 - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$ u. ſ. w.

Die

Die poſitiven Theile dieſer Summen bilden eine geometriſche Reihe, in welcher das erſte Glied oder $a = 100^2$ $q = \frac{100}{106} \ldots n = 10$ iſt. Daher iſt die Summe derſelben, oder

$$S = \frac{100^2\left[1 - \left(\frac{100}{106}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{100}{106}} = \frac{1'060.000\left[1 - \left(\frac{100}{106}\right)^{10}\right]}{6}$$

$$= 78.016,989.$$

Der negative Theil $\frac{100^{12}}{106^{10}} = 5583,944$ iſt in allen Summen derſelbe. Zieht man deſſen Zehnfaches von dem poſitiven 78.016,989 ab, ſo erhält man als Reſt: 22177,55, deſſen ſechster Theil 3696,26 beträgt. — Dieß iſt alſo der baare Werth der Rente.

Verbeſſerungen.

Seite	Zeile	ſtatt	lies
10	15 v. U.	ſichren	ſichern
11	8 v. U.	als die andern	als die andere
—	3 v. U.	als die größern	als die größere
23	7 v. U.	welche bey ihrer	welche ſich bey ihrer
—	5 v. U.	Vereinigung ſo vermindern	Vereinigung ſich ſo vermindern.
25	12 v. O.	aus dem Begrif	aus dem Begriff
30	durchaus	der Minuend	das Minuend
34	7 v. U.	giebt alsdann das Dividend	giebt alsdann das Minuend
41	7 v. O.	$+A \times +B = +B$	$+A \times +B = +AB$
45	13 v. U.	einer = Nulle iſt	einer = 0 iſt
48	2 v. U.	$3m = (2m - 1)$	$3m \times (2m - 1)$
54	14 v. O.	in eine Stelle	in einer Stelle
60	8 v. O.	$q + \frac{q}{D}$	$q + \frac{q}{D-1}$
61	14 v. U.	Flächeninhalt =	Grundfläche =
—	6 v. U.	Diviſ. ſtumme Zahl	Diviſor eine ſtumme Zahl
62	4 v. U.	quatrinomiſche	quadrinomiſche

Seite	Zeile	ſtatt	lies
91	4 v. U.	b) $\frac{2,00}{4}$	b) $\frac{3,00}{4}$
97	15 v. U.	Man bringe $\frac{1}{2}$, [illegible]	Man bringe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$
99	1 v. O.	5.2.2.2.3.3	5.2.2.2.3.3.7
105	14 v. U.	$\frac{5-11}{12}$	$\frac{5-11}{8 \quad 12}$
107	VI.	$\frac{a.c.d}{a.a.c} = \frac{d}{}$	$\frac{a.c.d}{a.a.c} = \frac{d}{a}$
—	2 v. U.	ſind $\frac{c}{a}$ Theile	$\frac{c}{d}$ Theile
136	1 v. O.	$+0^{-3}$	40^{-3}
—	5 v. O.	48	48^{-4}
140	12 v. U.	$\beta, \gamma, \delta \ldots$	$\beta, \beta, \gamma, \delta \ldots$
148	17 v. U.	DieTauſend.Stelle $= 10$	Die Tauſend. Stelle $= 10^3$
154	3 v. O.	§. 180.	§. 160.
—	15 v. O.	irrational	irrational
172	6 v. U.	III. $\sqrt[3]{\frac{27x^3}{64}}\ 1\frac{1}{8}x^2y$	III. $\sqrt[3]{\frac{27x^3}{64}} - 1\frac{1}{8}x^2y$
—	5 v. U.	$\frac{8y^3}{7}$	$\frac{8y^3}{27}$
183	11 v. U.	S	∞
217	8 v. O.	$-\frac{10b^3}{a^6} + \frac{21b^4}{a^7} \ldots$	$-\frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \frac{21b^5}{a^8} + \frac{28b^6}{a^9}$
219	9 v. U.	$5(1 + 0{,}02 - 0{,}0002 + 0{,}000002 \ldots)$	$5(1 + 0{,}02 - 0{,}0002 + 0{,}000004 - 0{,}0000001) = 5\,(1.0198039) = 5.0990195$ bis auf die ſiebente Zifferſtelle ganz genau.
221	7 v. O.	$(1 - Ap \ldots\ldots)y^n$	$(1 - Ap \ldots\ldots)y^{-m}$
—	8 v. U.	$-0{,}021913$	$-0{,}021605$ u. ſ. w.
224	12 v. U.	$+75y$	$+75y^2$
227	9 v. O.	e	e^2
270	10 v. U.	läßt ſich e Quadratwurzel	läßt ſich die Quadratwurzel
279	12 v. O.	$9 - 18 - 9$	$9 - 18 = -9$
299	8 v. O.	das letzte Glied p und ſeine	das letzte Glied p in ſeine
304	14 v. O.	ein Theil	ein Theiler
308	4 v. U.	$(y = 28)^3$	$(y - 28)^3$
315	2 v. O.	$3y^2$	$3x^2$
317	9 v. O.	$\frac{94864}{27}$	$-\frac{94864}{27}$
319	10 v. U.	999000y	9990,00y
327	9 v. O.	$\ldots - 5x + 1$	$- 5x + 1 = 0$
329	11 v. O.	$-7x + 1$	$-7x + 1 = 0$
434	15 v. O.	Log. 7901	Log 79,01
450	19 v. O.	979	912
464	3 v. U.	$a.b = \alpha.\beta$	$\alpha.b = a.\beta$

Metrologiſche Tafeln.

Erſte Abtheilung.

Neuere Maße, Gewichte, Münzen auswärtiger Staaten mit den vaterländiſchen verglichen.

Quellen, woraus die Angaben geſchöpft ſind:

1) J. G. Böbel's Vergleichung der Wirtembergiſchen Maße und Gewichte. Stuttgard 1810.

2) Placidus Heinrich's Beſtimmung der Maße und Gewichte des Fürſtenthums Regensburg.

3) Franz Huberti's Vergleichung der Würzburgiſchen Fruchtmaße.

4) Maurus Magold's mathematiſches Lehrbuch.

5) Georg Freyherrn von Vega natürliches Maß-, Gewichts- und Münzſyſtem. Wien 1803.

6) Die Beſtimmung des neuen baierſchen Pfundes, und des franzöſiſchen Kilogramme theilte mir der königl. baierſche Vice-Münzwardein von Mehe gütigſt mit.

7) Das Amberger Getreidmaß hat Herr Anſelm Moritz, Profeſſor der Phyſik am hieſigen Lyceum, unterſucht.

8) Die geſetzlichen Beſtimmungen über das neue baierſche Maß wurden durch das vaterländiſche Regierungsblatt bekannt gemacht.

9) Die Beſtimmungen der Münzen ſind zum Theil aus Nelkenbrechers Taſchenbuch.

I. Tabelle.

Fußmaße.

Namen der Länder und Städte.	1 Fuß hat natürliche Millimetres.	Hiervon der Vergleichungs-Logarithmus.	1000 baierſche Fuß erfodern.
Amſterdam	283,0615	2.4518808	1031,08
Ansbach	299,845	2.4768969	973,367
Augsburg	296,168	2.4715382	985,367
Baiern	291,859	2.4651732	1000
Baireuth	297,7705	2.4738802	980,15
Berlin und Preußen überhaupt	313,854	2.4967276	929,92
Böhmen. Pragerfuß	296,416	2.4719017	984,63
Breßlau	289,286	2.4603274	1011,22
Brüſſel	284,2345	2.4536768	1026,82
Dresden	283,107	2.4519507	1030,91
Eichſtätt	304,050	2.4829450	959,906
England	304,8005	2.4840581	957,448
Frankfurt am Main	286,403	2.4571100	1018,74
Frankreich, alter Fuß	324,839	2.5116682	898,472
Neuer Mètre.	1000	3.0000000	291,859
Hamburg	286,4903	2.4571100	1018,74
Leipzig, Baufuß	282,723	2.4513615	1032,31
gemeiner Fuß	282,205	2.4505636	1034,21
Mähren	295,965	2.4712404	986,128
Nürnberg	304,266	2.4832539	959,223
Portugall	338,600	2.5296870	861,958
Regensburg	313,5603	2.4963211	930,791
Rheinländ. Fuß	313,831	2.4966959	929,988
Rom. Palmo degli Architetti .	223,327	2.3489417	1306,87
alter Fuß	294,762	2.4694715	990,152
Rußland	538,241	2.7309768	542,246
Schweden	296,867	2.4725620	983,131
Spanien	282,655	2.4512574	1032,56
Tyrol	334,111	2.5238908	873,540
Warſchau	356,421	2.5519633	818,860
Wien	316,1032	2.4998277	923,306
Wirtemberg	286,4903	2.4571100	1018,74
Wirzburg	292,6260	2.4663132	997,379
Zürch	300,928	2.4784627	969,865

II. Ta,

II. Tabelle.

Ellenmaße.

Namen der Länder und Städte.	1 Elle hat natürliche Millimetres.	Hiervon der Vergleichungs-Logarithmus.	1000 baierische Ellen erfodern.
Amſterdam	690,284	2.8390279	1206,76
Ansbach	624,369	2.7954413	1334,16
Augsburg, große	606,367	2.7827356	1373,77
kleine	592,381	2.7726011	1406,20
Baiern	833,0110	2.9206503	1000
Baireuth	658,025	2.8182424	1265,92
Berlin und Preußen überhaupt	667,726	2.8245982	1247,53
Böhmen. Prager Elle	503,960	2.7737572	1402,47
Brabanter Elle in Deutschland	691,412	2.8397368	1204,76
Breßlau	571,9133	2.7603571	1446,41
Brüſſel, große	694,3443	2.8415749	1199,70
kleine	684,4188	2.8353219	1217,10
Dänemark	627,7072	2.7977571	1327,06
Dresden	566,2132	2.7528066	1471,78
Eichſtädt	772,847	2.8880937	1077,84
England, kleine	914,740	2.9612977	910,65
große	1143,48	3.0582287	728,487
Frankfurt am Main	539,595	2.7320675	1543,77
Frankreich, alte Aune	1188,37	3.0749523	700,968
Mètre	1000	3.0000000	833,015
Hamburg	572,986	2.7581401	1453,81
Leipzig	565,311	2.7522875	1473,54
Mailand, Seide	536,436	2.7295182	1552,86
Wolle	675,396	2.8295584	1233,36
Manheim	557,867	2.7465306	1493,2
Mähren	790,6682	2.8979943	1053,55
Nordamerika, Yards	914,740	2.9612977	910,65
Nürnberg	656,627	2.8173187	1268,62
Portugall	2185,90	3.3396303	381,083
Regensburg	810,030	2.9085011	1028,36
Rom, Braccio	634,790	2.8026301	1312,26
Canne	1989,64	3.2987749	418,674

Ruß-

Namen der Länder und Städte.	1 Elle hat natürliche Millimetres.	Hiervon der Vergleichungs-Logarithmus.	1000 baierſche Ellen erfodern.
Rußland	711,490	2.8521668	1170,8
Salzburg. Seide . . .	800,820	2.9035349	1040,19
Leinwand.	1005,65	3.0024469	828,33
Schleſiſche Elle . . .	579,0104	2.7626864	1438,68
Schweden	593,7344	2.7735922	1403,00
Spanien	847,9662	2.9283786	982,362
Trieſt. Wolle.	676,7489	2.8304276	1230,9
Seide	642,1444	2.8076327	1297,23
Türkey, große Pik . . .	669,079	2.8254774	1245,01
kleine Pik.	648,100	2.8116419	1285,31
Tyrol	804,1356	2.9053293	1035,90
Venedig	636,8207	2.8040172	1308,07
Wien	779,2089	2.8916538	1069,04
Wirtemberg	614,235	2.7883346	1356,16
Wirzburg	586,2901	2.7681126	1420,815
Zürch	601,8550	2.7794921	1384,07

III. Tabelle.
Meilenmaß.

Namen der Länder.	Eine Meile hält alte Pariſer Fuß	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß ſolcher Q. M., die geograph.=1000 geſetzt.
Arabiſche	6053,5	56,5044	1418,99
Baierſche Chauſſee Meile	22826,6	14,9847	997,959
Böhmiſche	212,70	16,0813	1149,37
Deutſche geographiſche	22803,29	15	1000
Engliſche, neue zu 1760			
Yards	4963,23	68,9167	21108,4
Seemeilen	5717,13	59,82881	15.908,85
Leagues	17150,4	19,9441	1767,86
Franzöſiſche Lieues $\frac{1}{25}$			
Grad	13681,97	25	2777,77
neue Seemeilen zu $\frac{1}{20}$			
Grad	17102,47	20	1777,77
Holländiſche . . .	18055,12	18,9447	1595,12

Namen der Länder	Eine Meile hält alte Pariſer Fuß	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß ſolcher Q. M., die geograph.=1000 geſetzt.
Italieniſche	5717,13	59,82881	15.908,85
Jüdiſche, Sabbatherweg zu 2000 bibl. Ellen .	3422,4	99,9443	44.395,08
Oeſterreichiſche Poſtmeilen	23355	14,6456	953,32
Portugieſiſche . . .	19057,44	17,9483	1431,75
Preußiſche	23873,76	14,3272	912,333
Römiſche, alte zu 8 olymp. Stadien . .	4537	75,391	25261,4
Ruſſiſche Meile oder Werſte	3288,2	104,0265	48.095,6
Sächſiſche Polizey-Meil.	27912	12,25500	667,490
Schwäbiſche . . .	28587	11,9652	636,294
Schwediſche	32953,5	10,38008	478,8707
Schweizeriſche . . .	25795,25	13,2602	781,482
Spaniſche	12882	26,5546	3133,98
Türkiſche gewöhnl. oder Berri	5144,94	66,4827	19644,20
Seemeilen	4039,21	84,6822	31871,4
Ungariſche	25734,35	13,2912	785,179

IV. Tabelle.
Getränkmaße.

Namen der Länder und Städte.	Namen der Getränkmaße.	1 ſolches hat naturl. Decilitres	Hiervon der Vergleich. Logarithm.	1000 bair. Getränk-Maßkannen erfordern.
Ansbach . .	Maß	13,55818	1.1322010	788,476
— — . . .	Eimer zu 66 M.	894,8390	2.9517449	11,94662
Augsburg. .	Schenkmaß	10,45933	1.0195139	1021,82
— — . . .	Viſirmaß	11,77214	1.0708554	908,100
Baiern. . .	Maß	10,6903	1.0289892	1000
— — . . .	Viſireimer	684,1792	2.8351692	11,625
— — . . .	Schenkeimer	641,418	2.8071405	$16\frac{2}{3}$
Baireuth . .	Maß	11,5051	1.0608905	929,178
Bamberg . .	Stadtmaß	13,49755	1.1302550	792,016
— — . . .	Küniſche Maß	14,70876	1.1675761	726,797
Berlin . . .	Quart	11,70374	1.0683145	913,429
— — . . .	Bieröhmchen zu 24 Quart	280,8831	2.4485257	38,05953
— — . . .	Weineimer zu 64 Quart	760,7254	2.8812279	14,05275

Böh-

Namen der Länder und Städte.	Namen der Getränkmaße.	1 ſolches hat natürl. Decilitres	Hiervon der Vergleich. Logarithm.	1000 bair. Getränk-Maßkannen erfordern.
Böhmen . .	Pinte	19,11271	1.2810950	559,622
— — . . .	Eimer zu 32 P.	611,2870	2.7862450	17,48816
Brabant . .	Stoop	37,73822	1.5015825	336,827
Breslau . .	Quart	6,942733	0,8415305	1539,78
Dänemark .	Pott	9,660320	0.9849915	1106,62
Eichſtätt . .	Weinmaß	11,08853	1.0448743	964,084
— — . . .	Biermaß	12,12681	1.0837467	881,541
England . .	Pints	4,734956	0.6753159	2177,736
— — . . .	Gallon zu 8 P.	37,88751	1.5784059	282,217
Frankfurt a. M.	Weinmaß	2,45839	0.3906506	4338,49
Frankreich .	alte Pinte	9,52146	0.9787036	1122,76
— — . . .	Neues M. Litre	10,0000	1.0000000	1069,04
Hamburg . .	Quartier	9,050350	0.9566654	1181,2
Leipzig . . .	Kanne	12,04069	1.0806512	887,847
Manheim . .	Maß	17,10452	1.2331108	624,997
Mähriſche . .	Maß	10,69752	1.0292830	999,321
Nürnberg . .	Maß	10,4927	1.0208873	1018,83
Portugal . .	Canhado	13,95159	1.1446237	766,241
— — . . .	Almuda zu 12 C.	167,419	2.2238049	63,8534
— — . . .	Tonelado zu 52 Alm.	8705,790	3.9398082	1,22872
Regensburg .	Köpfl.	8,33128	0.9207118	1283,15
— — . . .	Biereimer zu 64	533,202	2.7268918	20,04922
— — . . .	Vergeimer zu 68	566,5272	2.7532207	18,86986
— — . . .	Weineimer zu 88 Köpfl.	733,1530	2.8651945	14,58127
Rußland . .	Osmuschka	15,86909	1.2005525	673,654
Salzburg . .	Pfiff	1,964935	0.2931271	5443,388
— — . . .	Kandl. zu 4 Pf	7,855754	0.8951871	1360,822
— — . . .	Viertl. zu 2 K.	15,71151	1.1962179	680,411
— — . . .	Eimer zu 40 V.	628,4604	2.7982779	17,10275
Schweden . .	Kanne	26,18402	1.4180364	408,275
— — . . .	Eimer zu 30 K.	785,5206	2.8951577	13,6091666
Schleſien . .	Quart	7,018478	0.8462429	1523,16
Spanien . .	Cantaro Castigl.	157,5009	2.1972830	678,744
Trieſt . . .	Orne	656,5845	2.8172905	16,2813
Tyrol . . .	Maß	8,108042	0.9089158	1312,42
Venedig . .	Bigoncia	1580,563	3.2988118	5,37251
— — . . .	Amphora zu 4 B.	6322,252	3.9008718	1,3431275
Wien . . .	Maß	14,15015	1.1507612	755,48900
— — . . .	Eimer zu 40 M.	566,006	2.7528212	18,887225
Wirtemberg .	Maß	18,37047	1.2641204	581,927
— — . . .	Imi zu 10 M.	183,7047	2.2641204	58,1927
— — . . .	Eimer zu 16 J.	2939,276	3.4682404	3,637043
— — . . .	Fuder zu 6 E.	17635,66	4.2463917	0,6061740
Wirzburg . .	Maß	10,74453	1.0311873	994,9515
Zürch . . .	Maß	18,24947	1.2612503	585,786

V. Tabelle.

Getreidmaß.

Namen der Länder und Städte.	Namen der Maße.	1 ſolches hat natürl. Decilitres	Hierven der Vergleich. Logarithm.	1000 bair. Metzen erfodern.
Amberg . .	Metzen	114,36076	2.0582769	3240,6
Amſterdam .	Scheepel	270,2376	2.4317458	1371,375
— — . . .	Sack zu 3 Sch.	810,7130	2.9088617	457,125
Ansbach . .	Metzen	211,2972	2.3248937	1753,91
— — . . .	Sim̃er zu 16 M.	3380,744	3.5290127	109,619
Aſchaffenburg .	Maß Korn	174,935	2.2428769	2118,48
— — . . .	Maß Haber	218,5467	2.3397427	1694,96
— — . . .	Malter zu 8 Maß Korn	1399,480	3.1459669	264,8106
Augsburg .	Metzen	256,622	2.4092908	1444,14
— — . . .	Schaf zu 8 M.	2052,976	3.3123808	180,5142
Baiern . .	Metzen	370,597	2.5689022	1000
— — . . .	Schäffel	2223,582	3.3470535	166⅔
Baireuth .	Meß	322,1429	2.5080485	1150,413
— — . . .	Simra zu 16 M.	5154,286	3.7121685	71,9008
Bamberg. .	Simmer Korn	712,5845	2.8528363	520,075
— — . . .	Simmer Haber	965,326	2.9846739	383,909
Berlin. . .	Metzen	34,20478	1.5340867	10834,666
— — . . .	Schfl. zu 16 M	547,2764	2.7382067	677,166
Böhmen . .	Strich	936,0224	2.9712862	395,928
Breslau . .	Metzen	43,68964	1.6403784	8482,500
— — . . .	Schfl. zu 16 M.	669,0341	2.8444984	530,156
Eichſtätt . .	Metzen	374,9474	2.5739703	988,398
Gerſte u. Dinkel	Schfl. zu 19 M.	7124,000	3.8527239	52,02094
Korn u. Weitzen	— zu 16 M	5999,160	3.7780903	61,77487
Haber . . . (2 ſolche Schfl. ſind 1 Muth.)	— zu 20 M.	7498,948	3.8750003	49,4199
England . .	Bushel	357,2532	2.5529762	1037,35
— — . . .	Laſt zu 80 B.	28580,256	4.4560662	12,96689
Frankf. a. M.	Sechter	72,77127	1.8619599	5092,64
— — . . .	Simmer zu 4 S.	291,085	2.4640199	1273,16
Frankreich .	alter Boiſseau	126,9529	2.1036425	2919,17
— — . . .	Muid zu 144 B	18281,21	4.2620050	20,27203
— — . . .	Neuer Litro	10,0000	1.0000000	37.059,7
— — . . .	Décalitro	100,0000	2.0000000	3705,97
Fulda . . .	Maß	220,2196	2.3428559	1682,85
Gallizien .	Korſchetz	1229,99	3.0899015	301,301
Grätzer Viertl. in Steyermark	Viertl.	798,7864	2.9024306	463,9505
Hamburg .	Himmt	526,8545	2.7216966	703,380
— — . . .	Faß zu 2 H.	1053,709	3.0227266	351,690
Hanau. . .	Simmer	306,8054	2.4868630	1207,92
Heidelberg.	Vierntſel	278,3381	2.4445728	1331,46
Leipzig. . .	Schäffel	1066,801	3.0280833	347,391
— — . . .	Malter zu 12 S.	12801,61	4.1072645	28,94927

Man

Namen der Länder und Städte.	Namen der Maße.	1 ſolches hat naturl. Decilitres	Hiervon der Vergleich. Logarithm.	1000 bair. Metzen erfodern.
Manheim . . .	Simmer	152,5419	2.1833888	2429,48
— —.	Malter zu 8 Simmer	1220,3352	3.0864788	303,685
Mähren	Metzen	706,1370	2.8488890	524,823
Nürnberg . . .	Metzen	199,4112	2.2997496	1858,457
— —.	Simmer zu 16 Metz	3100,58	3.5038696	116,153
Portugall . . .	Alquiere	135,0857	2.1306069	2743,44
Regensburg . .	Metzen	183,2882	2.2631345	2021,93
Korn. Weitz. Gerſte	Schaf zu 32 M.	5865,223	3.7682845	63,18553
Haber	Schaf zu 56 M.	10264,14	4.0113225	36,10603
Salzburg . . .	Metzen	359,979	2.5562771	1029,50
Spanien. . . .	Cahiz Castigl.	571,4863	2.7570058	648,480
Schleſien . . .	Scheffel	763,7622	2.8829581	485,226
Schweden . . .	Tonne	1465,115	3.1658718	252,949
Schweinfurt . .	Metzen Korn	247,921	2.3943134	1494,82
— —.	— Haber	371,851	2.5703688	996,629
Tyrol	Star	305,7754	2.4854026	1211,99
Warſchau . . .	Korczek	511,3820	2.7087454	744,697
Wien und ganz Oeſtreich	Metzen	614,9949	2.7888715	602,609
	Muth zu 30 Metzen	18.449,85	4.2659928	20,08696
Wirtemberg . .	Simmer	221,534	2.3454402	1672,87
— —.	Schäffel zu 8 Sim.	1772,272	3.2485302	209,1087
Wirzburg . . .	Metzen Korn	217,1067	2.3366732	1706,98
— —.	Metzen Haber	223,0503	2.3484027	1661,49
Zürch	Muth	827,1774	2.9175986	448,926

VI. Tabelle.

G e w i ch t.

Namen der Länder und Städte.	Namen des Gewichtes.	1 ſolches Pfund hat naturl. Milligrammes.	Hiervon der Vergleich. Logarithm.	1 ſolches Pfund hat köllniſche Richtpfenn.	1000 bair. Pfund erfodern.
Amſterdam .	Pfd. Handelsg.	494.246	5.6939432	138.509	1133,04
— —. . .	Pfd. Troygew 16 Unz.	492.323	5.6922501	137.970	1137,46
— —. . .	Pfd. Apotheker Gew. à 12 U.	369.242	5.5673111	103.478	1516,62
— —. . .	Mark Münzge	246.161,5	5.3912201	68.985	2274,93
Ansbach . .	Pfd. Handelsg	509.633	5.7072575	142821	1098,83
Augsburg .	Pfd. Frohn oder				
— —. . .	Schwer.	491.361,3	5.6914010	137700,5	1139,69
— —. . .	Pfd. Krämer oder leicht Gew.	472.888	5.6747583	132.527	1184,21
— —. . .	Mark Münzg.	236.161,2	5.3732085	66.182,5	2371,26
Baiern . .	altes Pfd.	561.663	5.7494756	157.402	997,040
— —. . .	neues Pfd.	560.000	5.7481880	156.936	1000
— —. . .	neues Pfd. Apothek. Gew.	360.000	5.5563025	100.887	1555,56

Bam-

Namen der Länder und Städte.	Namen des Gewichtes.	1 ſolches Pfund hat naturl. Milligrammes.	Hiervon der Vergleich. Logarithm.	1 ſolches Pfund hat köllniſche Richtpfenn.	1000 bair. Pfund erfodern.
Bamberg . .	Pfd. Handelsg.	467.307	5.6696022	130.959	1198,36
Baireuth . .	Pfd. Handelsg.	510016	5.7075838	142.928	1098,005
Berlin und in Preußen überh	Pfd. Handelsg.	468.620	5.6708208	131.328	1195,000
	Pfd. Apoth. G.	357.607,3	5.5534063	100.217	1565,96
— — . . .	Mark Münzg.	233.853	5.3689430	65.536	2394,66
Böhmen. . .	Pfd. Handelsg.	514.690	5.7115457	144.238	1088,035
Eichſtätt. . .	Pfd. Handelsg	510.112	5.7076655	142.955	1097,79
England. . .	Pfd. Königsg.	680.887	5.8330750	190.814	822,457
— —	Pfd. Avoir du poids.	453.908	5.6569681	127.205	1230,89
— —	Pfd. Troygew. zu 12 Unz.	373.377	5.5721475	104.636	1499,83
Frankfurt a. M.	Pfd. Zentnerg.	509.391	5.7070513	142.753	1099,25
— — . . .	Pfd. Handelsg	467.322	5.6696164	130.964	1198,319
Frankreich					
— — . . .	altes Poids de Marc	489.509	5.6897580	137.180,1	1144,106
— — . . .	altes Münzgew.	244754,5	5.3887280	68.590	2288,212
— — . . .	neues Gramme	1000	3.0000000	280,242	560.000
— — . . .	Kilogramme	1'000.000	6,0000000	280.242	560
Hamburg . .	Pfd. Handelsg.	484.630	5.6854103	135.814	1155,52
Kölln. . . .	Mark	233.854	5.3689449	65.536	2394,66
Leipzig . . .	Pfd. Handelsg.	467.130	5.6694378	130.909	1198,81
Nürnberg. .	Pfd. Handelsg.	509.623	5.7072575	142.821	1098,83
— — . . .	deutſch. Apothg	357.947	5.5538187	100.312	1564,48
— — . . .	Mark Münzg.	238.593	5.3776577	66.864	2347,09
Regensburg .	Pfd. Handelsg	566.937	5.7535348	158.880	987,765
— — . . .	Mark Silberg.	246.194	5.3912777	68984	2274,63
Salzburg . .	Pfd. Handelsg.	560.375	5.7484788	157.041	999,331
Schleſien . .	Pfd. Handelsg	530.192	5.7244331	148.583	1056,22
Tyrol. . . .	Pfd. Handelsg	563.298	5.7507382	157.850	994,146
Ungarn und Siebenbürgen	Oka	1'276.501	6.1060231	357.732	438,697
Wien. . . .	Pfd. Handelsg.	560.375	[illegible]84788	157.041	999,331
— — . . .	Mark Münz u. Silbergew.	280.824	5.4484354	78.701	1994,08
— — . . .	Apothekergew.	420.280	5.6235387	117.780,3	1332,45
Wirtemberg .	Pfd. Handelsg	467.709	5.6699750	131.072	1197,33
Wirzburg . .	Pfd. Handelsg.	477226	5.6787241	133.739	1173,46
Zürch					
— — . . .	leichtes Pfund von 2 Mark	468.918	5.6710969	131.411	1194,24

VII. Ta-

VII. Tabelle.

M ü n z e n.

* G. bedeutet Gold; S. Silber, K. Kupfer, F. fingirte Münze.

Länder.	Münzen.	Metall	Werth im 20 fl. Fuß Thl.	gr.	Pfen.	Werth im 24 fl. Fuß fl.	kr.	Pfenn.
Baiern.	Gulden	F.	—	13	4	—	60	—
	Reichsthaler	F.	—	20	—	1	30	—
	Spec.thaler	S.	1	8	—	2	24	—
	Kronenthaler	S.	1	12	—	2	42	—
	Dukate	G.	3	—	—	5	24	—
	Maxd'or	G	4	1	$9\frac{1}{3}$	7	20	—
	Alte ſchwarze Münzen.							
	Pfenning	S.	—	—	$\frac{15}{21}$	—	—	$1\frac{1}{7}$
	Schilling zu 30 Pf.	F.	—	1	$10\frac{5}{7}$	—	8	$2\frac{2}{7}$
	Pfd. Pfenn. à 8 ßl.	F.	—	15	$2\frac{2}{4}$	1	8	2
Dänemark	Chriſtia. d'or	G.	5	2	0,624	9	9	0,936
	Reichsthaler Species	S.	1	10	—	2	33	—
	Mark Cour. à 16 ßl.	F.	—	4	8	—	21	—
England	Schilling	F.	—	7	$6\frac{1}{4}$	—	33	3,4
	Pfd. Sterl. à 20 ßl.	F.	6	6	5	11	17	—
	Krone	S	1	9	$1\frac{1}{4}$	2	49	1
	Guinee	G.	6	13	$11\frac{1}{4}$	11	50	3,4
Frankreich	Franc	S.	—	6	$2\frac{1}{4}$	—	27	$3\frac{3}{8}$
	Napoleons- thaler à 5 Fr.	S.	1	6	$11\frac{1}{4}$	2	19	$\frac{7}{8}$
	20 Frank. St.	G.	5	3	9	9	16	$3\frac{1}{2}$
	40 Frank St	G.	10	7	6	18	33	3
Gallizien u. Lodimirien	pohl. Groſch.	K.	—	—	1,6	—	—	$2\frac{2}{5}$
	— Gulden à 30 Gr.	S.	—	4	—	—	18	—
Italien Königreich	Neue Lira	S.	—	6	$2\frac{1}{4}$	—	27	$3\frac{3}{8}$
Malta . .	Scudi	S.	—	13	6,45	1	—	3,68
	Onzia à $2\frac{1}{2}$ Sc.	S.	1	10	1,125	2	32	1,2
	Doppia	G.	5	15	$4\frac{5}{16}$	10	9	0,8
Nordamerika .	Adler, Eagle	G.	13	12	7,2	24	20	2,8
	Dollar	S.	1	8	11,1	2	28	0,65
Oeſtreich	Kaiſergulden	f u. S.	—	16	—	1	12	—
Portugal	Millerées	F.	1	13	$\frac{5}{8}$	2	46	$3\frac{1}{4}$
	Crusado	S.	—	14	9,95	1	6	2,94
	Dobras	G.	22	4	4	39	55	2
Preußen	Pfenning	K.	—	—	1	—	—	$1\frac{1}{2}$
	Groſchen	S.	—	—	$11\frac{5}{12}$	—	4	$1\frac{1}{8}$
	Gulden	S.	—	7	$7\frac{1}{4}$	—	34	$1\frac{1}{3}$

Preu-

Länder.	Münzen.	Metall.	[illegible]			[illegible]		
			Thl.	gr.	Pf.	fl.	kr.	Pfen.
Preußen	Thaler	S.	—	22	5	1	42	3½
	Friedrichsd'or (mit Agio)	G.	5	—	—	9	—	—
Rußland	Kopeke	K. S.	—	—	3,62	—	1	0,43
	Rubel	S.	1	—	7⅓	1	50	3
	Dukate	G.	2	17	10	4	56	2,4
Sachsen.	Pfennig	K.	—	—	1	—	—	1½
	Groschen	S.	—	—	12	—	4	2
	Reichsthaler	F.	—	24	—	1	48	—
	Speciesthaler	S.	1	8	—	2	24	—
	Dukate	G.	2	20	—	5	6	—
	Augustd'or * beide mit Agio	G.	5	—	—	9	—	—
Sardinien	Soldo	K.	—	—	6,95	—	2	2,426
	Lira	S.	—	11	7,010	—	52	0,52
	Scudi	S.	1	16	1,2	3	—	1,8
	Carlino	G.	12	1	7½	21	43	1
Schweden.	Reichsthaler (Species)	S.	1	11	2,3	2	38	1,44
	Dukate seit 1777	G.	2	20	9,6	5	9	2,4
Sicilien	Onzie	G.	3	5	11,85	5	50	3,775
	Scudo	S.	1	7	1,76	2	20	0,64
Spanien	Maravedis	F.	—	—	0,478	—	—	0,716
	Réal de Vellon	S.	—	1	7,736	—	7	1 23/33
	Piastre	S.	1	8	10⅔	2	28	—
	Pistole (Doblon)	G.	5	11	6⅔	9	52	—
Türkey.	Asper guter	K. S.	—	—	1,46	—	—	2,195
	Paras	F.	—	—	3,655	—	1	1,4825
	Piastre	S.	—	12	2½	—	54	3½
	Zechine	S.	1	—	4⅔	1	49	3
	Zindsjerli	G.	1	12	11	2	44	2½
	Fonduc	G.	2	9	11,8	4	20	3,7
	Beutel Keser	F.	254	1	2⅔	457	17	2
	Beutel Gold Kitze	F.	15243	14	8	27437	30	—
Ungarn.	Ungar. Guld.	F.	—	11	8	—	52	2
	Szostak	S.	—	1	4	—	6	—
	Polturak	K. S.	—	—	4	—	1	2
Wirtemberg..	Reichsgulden à 28 fl.	F.	—	13	4	1	—	—
	Schilling à 6 Pf.	F.	—	—	6⅚	—	2	2⅔

VIII. Sp-

VIII. Syſtem des neuen franzöſiſchen Maßes.

Mètre. Grundeinheit der Maße und Gewichte, gleich dem zehnmillionteſten Theile von dem Quadranten des Erdmeridian.

=3,078444 alt franz. Fuß = 443,295936 alt franz. Linien = 3,426309 bair. Fuß.

Mètre carré. = 9,47681746136 alt fr. □ Fuß
= 11,739593363481 bair. □ Fuß.

Mètre cube = 29,17385185232935 2384 alt fr. Kubf.
= 50.412,41600082512091 9552 a. fr. Kbz.
= 40,2234743976352 21629 bair. Kubf.

Kilogramme. Livre das Gewicht des Regenwaſſers, im Zuſtande ſeiner größten Verdichtung beym vierten Grade des hunderttheiligen Thermometers, und bey dem Volumen des Décimètre Cube

= 280242 kölln. Richtpf.
= 20799,29 holl. Aß
= 1,7857142857 = $1\frac{11}{14}$ bair. Pfd.

a) Längenmaße.

Myriamètre. Lieue	= 10.000 Mètres	= 30784,44 Fuß	
Kilomètre. Mille	= 1000 Mètres	= 3078,444 Fuß	
Décamètre. Perche	= 10 Mètres	= 30,78444 Fuß	
Mètre		= 3,078444 Fuß	
Décimètre. Palme	= 0,1 Mètre	= 44,3295936 Linien	
Centimètre. Doigt	= 0,01 Mètre	= 4,43295936 Linien	
Millimètre. Trait	= 0,001 Mètre	= 0,443295936 Linien	

Anmerkung. Die griechiſchen Vorſylben Déca, Hecto, Kilo, Myria — bedeuten die Oberabtheilungen; die lateiniſchen: Déci, Centi, Milli die Unterabtheilungen jenes Maßes, bey dem ſie ſtehen. — Da ſich dieſes Maß auf die wirkliche Größe unſerer Erdkugel gründet, ſo heißt es auch das Natürliche.

b) Flächen- und Ackermaße.

Hectare. Arpent	= 10.000 Q. Mètres	= 94.768,17461136	Q. Fuß
Are. Perche carrée	= 100 Q. Mètres	= 947,6817461136	
Centiare. Mètre carré		= 9,47681746 1136	

 c) Kör-

c) Körpermaße für flüſſige Dinge.

Décalitre. Velte = 10 décimètres cubes = 504,12416 ⎫
Litre. Pinte = décimètre cube = 50,412416 ⎬ fr. Kubikzoll
Decilitre. Verre = 0,1 décimètre cube = 5,0412416 ⎭

d) Körpermaße für trockne Waaren.

Kilolitre. Muid = 1 Mètre cube = 1000 décimètres cubes = 50.412,416 franz. Kubikzoll.

Hectolitre. Setier = 100 décimètres cubes = 5041,2416 fr. Kbz.

Décalitre. Boiſseau = 10 décimètres cubes = 504,12416 fr. Kbz.

Litre. Pinte = décimètre cube = 50,412416 fr. Kbz.

e) Maße für feſte Körper.

Stère. Mètre cube = 29,17385185 fr. Kbf.

Décistère. Solive = 0,1 Mètre cube = 2,917385185 fr. Kbf.

f) Gewicht.

Myriagramme. 10 Livres = 2'802.420 Kölln. Richtpf.

Kilogramme. Livre = 280.242 Kölln. Richtpf.

Hectogramme. Once. 0,1 Livre = 10 Gros = 28.024,2 k. Richtpf.

Décagramme. Gros. 0,1 Once = 10 deniers = 2.802,42 — —

Gramme. Denier. 0,1 Gros = 10 grains = 280,242 — —

Décigramme. Grain. 0,1 denier . . . = 28,0242 — —

Centigramme. 0,1 Grain . . . . . . = 2,80242 — —

Milligramme . . . . =0,280242 — —

g) Münzen.

	Livre.	Sols.	Denier =	Kr.	Pf.	Hl.
Franc =	1.	0.	3.	27.	3.	0,75
Décime	0.	2.	0,3.	2.	3.	0,275.
Centime	0.	0.	2,43.	0.	1.	0,2275.

Anmerkungen.

1) Die Einheit des neuen in Frankreich eingeführten Münzſyſtems iſt eine Silbermünze, Franc d'argent genannt, am Gewichte von 5 Grammes, oder 1401 kölln. Richtpfennigen oder 104 holl. Aß. Die Legirung iſt ein Zehntel des ganzen Gewichtes. Daher enthält ein neuer geſetzmäßiger Silber-Frank an feinem Silber $4\frac{1}{2}$, und am Zuſatz $\frac{1}{2}$ Gramm. Nach der in Deutſchland üblichen Benennung iſt ein ſolcher Silberfrank ein Stück des $14\frac{2}{5}$ löthigen Silbers am Gewichte von 5 Grammen. — Achzig neue Silber-Franken gleichen genau 81 vormal. Livres.

2) Die

2) Die halben, doppelten und fünffachen Silberfranken ſollen genau den halben, doppelten und fünffachen Gehalt des erwähnten Silberfranks enthalten. Indeſſen ſind die genannten Unter- und Oberabtheilungen deſſelben, mit einem Ueber- oder Untergewicht von höchſtens $\frac{8}{1000}$ des ganzen vorgeſchriebenen Gewichtes, und mit einem Ueber- oder Untergehalte an feinem Silber von $\frac{7}{1000}$ des ganzen Gehaltes für annehmbar erkläret.

3) Das Gewicht der im Umlauf befindlichen Kupfermünzen von zwey- drey- und fünfhundertel Franken iſt: 4, 6, 10 Grammen.

4) Neuer Goldmünzen giebt es in Frankreich zweyerley Sorten, nemlich Goldſtücke von 20, und andere von 40 Franken. Das Gewicht des Zwanzigfrankenſtücks iſt durch das Geſetz dahin beſtimmt, daß jedes Stück 6452 Milligrammes halte, folglich 155 ſolche Stücke ein Kilogramme betragen. Das Vierzigfrankenſtück muß geſetzmäßig 12903 Milligrammes im Gewichte haben. (Vergl. Code de Police Administrative p. 228.)

Nach baierſchem Gelde beträgt das Zwanzigfrankenſtück 9 fl. 16 kr. 7 hl. — Ein Vierzigfrankenſtück 18 fl. 33 kr. 3 pf.

5) Das alte franzöſiſche Troygewicht, oder Poids de Marc, wird alſo eingetheilt:

1 Livre = 2 Marc = 16 Onces = 128 Gros = 384 Deniers = 9216 Grains = 221184 Primes. — Da das neue Kilogramme = 18827,15 Grains = 280242 kölln. Richtpf. iſt,

ſo beträgt ein alt franz. Grain oder Gran: 14,885 kölln. Richtpf.

* Reſultate.

α) 1000 baierſche Fuß = 291,859 } Mètres.
1000 baier. Ellen = 833,011 } Mètres.

1000 Mètres { = 3426,311 bair. Fuß.
= 1200,465 bair. Ellen.

1000 Myriamètres = 1348,621 } bair. Chauſſee-Meilen.
1000 Kilomètres = 134,8621 } bair. Chauſſee-Meilen.

1000 bair. Ch. Meilen { = 741,498 Myriamètres.
= 7414,980 Kilomètres.

β) 1000 Arpents = 293,489834 } baier. Tagw.
1000 Ares = 29,348934 } baier. Tagw.

1000 bair. Tagw. { = 3.407,2718 Arpents.
= 34.472,718 Ares.

γ) 1000

γ) 1000 Stères = 319,23 bair. Klafter.
1000 bair. Klafter = 3132,9 Stères.

δ) 1000 Décalitres = { 146,1608 bair. Viſireimer zu 64 Maß.
155,9048 Schenkeimer zu 60 Maß. }

1000 bair. Schenkeimer = 6414,180 } Décalitres.
1000 Viſireimer = 6841,792 }

ε) 1000 Kilolitres = 4497,244 bair. Schäffel.
1000 bair. Schffl. = 222,3582 Kilolitres.

ϛ) 1000 Kilogrammes = 1785,714285 } bair. Pfd.
1000 Myriagrammes = 17857,14285 }

1000 bair. Pfd. = { 560 Kilogrammes
56 Myriagrammes. }

Zwey-

Zweyte Abtheilung.

Maß- Gewichts- und Münz- System der alten Römer, Griechen und Hebräer.

Quellen:

1. Romé de l'Isle Métrologie. Paris 1789.
2. Bernardi Lamy. Adparatus biblicus.
3. Voyage du jeune Anacharsis en Grèce, par M. l'Abbé Barthélemy. Paris 1788.

Damit wurden Nieuport's, Eiſenſchmid's und Paucton's Angaben verglichen.

Vorausſetzungen:

1) Der alte Römiſche Fuß hielt 130,66 alte Pariſer Linien. Hiemit ſtimmen alle noch vorhandenen, oder aufgefundenen Exemplare überein, welche Barthélemy, Jacquier, Grignon, Stuart gemeſſen haben.

2) Der alte römiſche Fuß verhielt ſich zum griechiſch-olympiſchen wie: 24 : 25.

3) Der Römiſche Quadrantal oder Amphora war genau der Römiſche Kubikfuß, und wog mit Weine gefüllt 80 Römiſche Pfund.

4) Nach Plinius dem Aelteren (Nat. hist. Lib. 33. Cap. 3.) waren die erſten Goldmünzen Roms von der Art, daß der Scrupel Gold, oder der vierundzwanzigſte Theil der römiſchen Unze zu 20 Seſterzen, oder 5 Silberdenaren gerechnet wurde. Nun wogen viele ſolche Goldmünzen, die ſich noch ſo unverletzt erhalten haben, als man nur wünſchen kann, genau 21 alte Pariſer Gran; und die Dreyſcrupelſtücke 63 P. Gran. Da ferner von den letztern 96, von den erſtern aber 288 auf das römiſche Pfund giengen, ſo iſt die wahre Schwere dieſes Pfundes = 288 × 21 = 96 × 63 = 6048 Pariſer Gran.

5) Die Längenmaße der Alten waren Theile eines Erdgrades im Meridian.

6) Das griechiſche Gewicht wurde, unabhängig von dem Römiſchen, durch Abwägung vieler noch vorhandenen und gut erhaltenen griechiſchen Gold- und Silbermünzen beſtimmt.

A) Maße der Römer.

a) Linien= und Längenmaße.

Römiſche Benennung.	Milliare.	Στάδιον ὀλυμπικόν.	Passus.	Cubitus.	Pes.	Palmus.	Digitus.
	1	8	1000	$3333\frac{1}{3}$	5000	20.000	80.000
		1	125	$416\frac{2}{3}$	625	2.500	10.000
			1	$3\frac{1}{3}$	5	20	80
				1	$1\frac{1}{2}$	6	24
					1	4	16
						1	4
							1
Franz. Maß Dd.	4537' Fuß	567,125' —	4,537' —	1,3611' —	130,66''' Linien.	32,66''' —	8,166''' —
bair. Maß Dd.	5049,7' Fuß	631,2125' —	5,0497' —	1,51491' —	12,11928'' Zolle.	36,3578''' Linien.	9,08946''' —

b) Flä

b) Flächenmaße.

Röm. Benennung.	Saltus.	Centuria.	Haeredium.	Jugerum.	Actus quadratus(Acnua)	Clima.	Actus minimus.	Scripulum.
	1	4	400	800	1600	6400	48.000	230.400
		1	100	200	400	1600	12.000	57600
			1	2	4	16	120	576
				1	2	8	60	288
					1	4	30	144
						1	7,5	36
							1	4.8
								1
Römisches Maß.	Br. L. 4800 . 4800 23'040.000 □'	Br. L. 2400 . 2400 5'760.000 □'	Br. L. 240 . 240 57.600 □' —	Br. L. 120 . 240 28.800 □' —	Br. L. 120 . 120 14.400 □' —	Br. L. 60 . 60 3600 □' —	Br. L. 4' . 120 480 □' —	Br. L. 10' . 10' 100 □' —
Franz. Maß.	200,16 Hectares.	5004 Ares.	47.422,776 Fuß □'	23.711,338 □'	11.855,664 □'	2963,916 □'	395,18.. □' —	82,331 □' —
bair. Maß.	587,44 Tagw.	146,864 Tagw.	58.745,6 □' Fuß	29.372,8 □' —	14.686,4 □' —	3671,604 □' —	489,54 □' —	101,989 □' —

L. . Br

*) Versus war ein Kampanisches Fl. Maß = 100 . 100 = 10000 Röm. = 10 198,9 bair. Q. Fuß.

**) Ein römisches Haeredium beträgt alſo ungefähr 1½ bair. Tagwerk.

c) Maße

c) Maße für Flüſſigkeiten.

Röm. Benennung.	Culeus.	Amphora Quadrantal	Urna.	Congius.	Sextarius.	Hemina.	Quartarius.	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	20	40	160	960	1920	3840	7680	11.520	46.080
		1	2	8	48	96	192	384	576	2.304
			1	4	24	48	96	192	288	1152
				1	6	12	24	48	72	288
					1	2	4	8	12	48
						1	2	4	6	24
							1	2	3	12
								1	1½	6
									1	4
										1
franz. Maß.	25.820 franzöſiſche	1291 D.d. Kubz.	645,5	161,75	26,9	13,5	6,75	3,375	2,25	0,5625
bair. Maß.	8 Eimer	24 Maßkannen.	12 Maßk.	3 Maßk.	½ Maßk.	1 Quart.	1 Achterl.	½ Achterl.	⅓ Achterl.	$\frac{1}{12}$ Acht.

d) Maße

d) Maße für Getreide und trockne Waaren.

Röm. Benennung.	Quadrantal.	Modius.	Sextarius.	Hemina.	Quartarius.	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	3	48	96	192	384	576	2304
		1	16	32	64	128	192	768
			1	2	4	8	12	48
				1	2	4	6	24
					1	2	3	12
						1	$1\frac{1}{2}$	6
							1	4
								1
franz. Maß.	1291 Par. Kubz.	430,3 —	26,9 —	13,5	6,75 —	3,375 —	2,25 —	0,5625
bair. Maß.	11 Sechztl. Metzen.	7 Maßl o. zwey u. dreyß.	$\frac{1}{2}$ Maßkanne.	1 Quart —	1 Achterl. —	$\frac{1}{2}$ Achterl. —	$\frac{1}{3}$ Achterl. —	$\frac{1}{12}$ Achterl. —

e) Ge

e) Gewicht.

Römiſche Benennung.	Libra Pondo, As.	Uncia.	Semuncia	Duella.	Scilicus.	Sextula.	Drachma (Denarius.)	Scrupulus.	Obolus.	Semiobolus.	Siliqua	Lens.
	1	12	24	36	48	72	96	288	576	1152	1728	2304
		1	2	3	4	6	8	24	48	96	144	192
			1	1½	2	3	4	12	24	48	72	96
				1	1⅓	2	2⅔	8	16	32	48	64
					1	1½	2	6	12	24	36	48
						1	1⅓	4	8	16	24	32
							1	3	6	12	18	24
								1	2	4	6	8
									1	2	3	4
										1	1½	2
											1	1⅓
												1
alt franzöſ. Gran.	6048	504	252	168	126	84	63	21	10,5	5,25	3,5	2,625
Bair. Pfd. Handelsge. Gran.	4407	367,3	183,65	122,4	91,8	61,2	45,9	15,3	7,65	3,8	2,55	1,913
Köllniſches Markgew.	1 Mark 24488,5 Richtpf.	Richtpf. 7502	Rpf. 3751	Rpf. 2501	Rpf. 1875,5	Rpf. 1250,5	Rpf. 937,75	Rpf. 312,5	Rpf. 156,75	Rpf. 78,38	Rpf. 52,25	Rpf. 39,19

*) Die Italieniſche oder Römiſche Mine glich 1⅓ Röm. Pfd.

Anmer.

Anmerkungen.

1) Folgende Unterabtheilungen des römiſchen Pfundes wurden mit einem beſtimmten Namen bezeichnet.

Sextans = $\frac{1}{6}$ As. = 2 Unciis	Septunx = $\frac{7}{12}$ As. = 7 Unc.
Quadrans = $\frac{1}{4}$ As. = 3 Unc.	Bes = $\frac{2}{3}$ As. = 8 Unc.
Triens = $\frac{1}{3}$ As. = 4 Unc.	Dodrans = $\frac{3}{4}$ As. = 9 Unc.
Quincunx = $\frac{5}{12}$ As. = 5 Unc.	Dextans = $\frac{5}{6}$ As. = 10 Unc.
Sextunx / Semissis = $\frac{1}{2}$ As. = 6 Unc.	Deunx = $\frac{11}{12}$ As. = 11 Unc.

2) Das Geld der Alten iſt von ihrem Gewichte abhängig. Die Römer hatten Gold- Silber- und Kupfermünzen; aber das Verhältniß des Werths dieſer Metalle gegeneinander war nicht immer das nemliche, wiewohl die Haupteintheilung des Pfundes (im Silber oder Gold) in ſeine kleinern Theile faſt durchaus unverändert blieb.

3) Unter den Römiſchen Kupfermünzen war die Einheit der Aß (As), deſſen Vervielfachungen folgende ſind:

a) Dupondius = 2 Assibus	e) Sexis = 6 Assibus
b) Sestertius = $2\frac{1}{2}$ Assib.	f) Septussis = 7 Assib.
c) Tressis, seu Tripondius = 3 Assib.	g) Vigesis = 20 Assib.
d) Quinquessis = 5 Assib.	bis h) Centussis seu Centum pondium = 100 Assib.

Der römiſche Aß war anfänglich ein Pfund Kupfer, und würde nach baierſchem Gelde, wenn nach dem Münzfuß von 1762 die Köllner Mark Kupfer zu 100 Pfenning (im 20 fl. Fuß) ausgemünzt werden ſoll, 41,2 Kreuzer betragen haben. Bey den Römern war aber der Werth des Kupfers anfänglich viel geringer, und verhielt ſich zum Werthe des Silbers nur wie: 1 : 960. Doch hob ſich der Werth des Kupfers in der Folge, als man den Aß nach und nach bis auf eine Unze reducirte.

In den alten Zeiten der römiſchen Republik, wo der Aß ein Pfund wog, galt der Silberdenar 10 Aß, oder 10 Pfund Kupfer, der Quinar 5 Aß, die Seſterze $2\frac{1}{2}$ Aß. — Die Libelle, eine andere kleine Silbermünze, galt einen pfündigen Kupferaß; die Sembelle oder Selibelle einen Semiſſis oder halben Aß; der Teruncius einen Quadrans von drey Unzen.

Aber nach Verringerung des Aßes bis auf eine Unze Kupfers wurde beſchloſſen, daß der Denar 16 ſolcher Aß (16 Unzen Kupfer), der Quinar derer 8, und die Seſterze derer 4 gelten ſollte, daher die

letztere

letztere auch den Namen Quadrans führt. — Uebrigens iſt zu merken, daß man in allen Summen, wo Seſterzen oder Denare vorkommen, jederzeit nach altem Gebrauch die Seſterze zu $2\frac{1}{2}$ Aß, und den Denar zu 10 Aß zu verſtehen habe, wenn nicht die Schriftſteller ausdrücklich das Gegentheil ſagen.

* Der Denar, welcher unter den Kaiſern der tägliche Sold eines Soldaten war, hatte für dieſen allein den Werth von 10 Aß, auch nach der Reduction.

4) Um den Werth der römiſchen Gold- und Silbermünzen richtig beſtimmen zu können, muß man neun verſchiedene Perioden unterſcheiden, (angefangen vom Jahre V. C. 547, d. i. 207 Jahre vor Chriſtus, wo in Rom die erſten Goldmünzen geprägt wurden). Nimmt man nun an, daß nach oben bemeldten Münzfuß die kölniſche Mark Goldes zu 283,1 fl.; die Mark Silber aber zu 20 fl. ausgeprägt werden ſoll, ſo ergiebt ſich für den Werth der römiſchen Münzen, im Vergleiche mit unſerm (baierſchen) Gelde, folgende Berechnung.

Zeitraum.	Zahl der Aureus auf das Pfund Gold.	Zahl der Denarius auf das Pfd. Silber.	Zahl der Sestertius auf das Pfd. Geld.	Verhältniß des Silbers z. Golde	Werth eines Aureus oder Golddenars.	Werth eines Silberdenars
I. Zeitraum V.C. 547 — 560.	96	96	5760	1 : 15	5 fl. 9 kr.	20kr. 5hl.
II. 560 — 620.	48	84	4800	$1 : 14\frac{2}{7}$	9 fl. 48 kr.	23kr. 3pf.
III. 620 — 635.	45	84	4500	$1 : 13\frac{11}{28}$	9 fl. 48kr.	23kr. 3pf.
IV. 635 — 650.	42	84	4200	$1 : 12\frac{1}{2}$	9 fl. 48kr.	23kr. 3pf.
V. 650 — 715.	40	84	4000	$1 : 11\frac{19}{21}$	9 fl. 48kr.	23kr. 3pf.
VI. 715 — 767.	41	86	4100	$1 : 11\frac{69}{86}$	9 fl. 30kr.	23 kr.
VII. Vom Tode Auguſt's bis Nero.	41	88	4100	$1 : 11\frac{57}{88}$	9 fl. 16kr.	22kr. 2pf.
VIII. Vom Tode Nero's bis Caracalla.	45	96	4500	$1 : 11\frac{23}{32}$	8 fl. 35kr.	20kr. 5hl.
IX. Unter Conſtantin dem Großen.	72 (Solidi)	100	1440	$1 : 14\frac{2}{5}$	6fl. $35\frac{3}{4}$kr.	19kr. 3pf.

5) Die

5) Die Werthe der römiſchen Münzen aus der II. III. IV. Vten Epoche pflegt man die mittleren zu nennen, und darnach iſt auch die folgende Tabelle eingerichtet. — In der neunten Epoche trat an die Stelle des Golddenars der Solidus (Soud'or); auch gab es Quinar's oder halbe Solidi. — In der folgenden Tabelle iſt der mittlere Werth eines Denars zu 24 kr. bair. angenommen.

f) Römiſche Münzen.

(Nach ihrem mittlern Werthe.)

Römiſche Benennung.	Sestertium.	Aureus: Denarius.	Aureus: Quinarius (Victoriatus.)	Argenteus: Denarius.	Argenteus: Quinarius (Victoriatus.)	Sestertius.	Libella. (As.)	Sembella.	Terunicius.
	1	10	20	250	500	1000	2500	5000	10000
		1	2	25	50	100	250	500	1000
			1	12½	25	50	125	250	500
				1	2	4	10	20	40
					1	2	5	10	20
						1	2½	5	10
							1	2	4
								1	2
									1
Werth im bair. Gelde.	100 fl.	10 fl.	5 fl.	24 kr.	12 kr.	6 kr.	2⅖ kr.	1⅕ kr.	2⅖ pf.

Anmerkung. Die große Seſterze (Sestertium) war keine wirkliche, ſondern eine Rechnungsmünze, und galt 1000 kleine Seſterzen. Man bezeichnete die große Seſterze durch die Buchſtaben: HS. Z. B. CIIS = 100 große = 100.000 kleine Seſterzen. Hier iſt nun zu merken, daß wenn die Zahl über 100.000 ſteigt, die Worte: Centena millia von den Römern gewöhnlich ausgelaſſen worden, und alſo zu ſuppliren ſeyen. In einem ſolchen Falle ſtehen blos die Adverbia Numeralia mit Numûm, oder Sestertium. Z. B. Quinquagies Numûm = 50'000.000 kleine = 50.000 große Seſterzen.

B) Maße

B) Maße der Griechen.

a) Kleinere Linien- und Längenmaße.

				fr. Lin.	oder bair. Lin. Dd. Maß.
(α) Δάκτυλος	= 1		beträgt	7,7004 —	8,57 —
(β) Κόνδυλος	= 2 Δακτύλοις		—	15,4008 —	17,14 —
(γ) Παλαιστή	= 4	—	—	30,8016 —	34,28 —
(δ) Λιχάς	= 10	—	—	77,004 —	85,7 —
(ε) Ορθόδωρον	= 11	—	—	84,7044 —	94,27 —
(ς) Σπιθαμή	= 12	—	—	92,4048 —	102,84 —
Πȣ̃ς γεωμετρικός	= 16	—	—	123,2064 —	137,12 —
(ζ) Πυγμή	= 18	—	—	138,6072 —	154,26 —
(η) Πυγών	= 18 $\frac{14}{27}$	—	—	142,6052 —	158,7 —
(θ) Πῆχυς	= 24	—	—	1,2834 Fuß	1,4283 Fuß.
Βῆμα ἁπλȣ̃ν	= 40	—	—	2,139 —	2,366 —
Ξύλον	= 72	—	—	3,8502 —	4,285 —
Βῆμα διπλȣ̃ν	= 80	—	—	4,278 —	4,7333 —
Ὀργυιά, ἑξαποδής	= 96	—	—	5,1336 —	5,7133 —
(ι) Ἄκαινα δεκαποδής	= 160	—	—	8,556 —	9,466 —
Ἄκαινα δωδεκαποδής	= 192	—	—	10,2672 —	11,4266 —
Πλέθρον	= 1600	—	—	85,56 —	94,66 —
Σχοῖνος der Perſiſche	= 1920	—	—	102,672 —	114,266 —

* α. Fingerbreite.

β. Die halbe Querhand.

γ. Die Querhand oder Breite der vier Finger.

δ. Die Spanne zwiſchen Daum und Zeigefinger.

ε. Gerade Hand der Länge nach vom Gelenke bis zum äußerſten Finger.

ς. Spanne zwiſchen dem Daumen und kleinen Finger.

ζ. Die Länge von den eingelegten Fingern bis zum Ellenbogen, mittlerer griech. Fuß.

η. Großer griech. Fuß.

θ. Die gemeine oder lithiſche Elle, auch Mittel Elle Herodots genannt.

ι. Gemeine Ruthe.

Anmer-

Anmerkung. Außer dieſen gab es in den verſchiedenen Staaten Griechenlands noch folgende Fuß- und Ellenmaße:

			fr. Linien		bair. Linien
1. Der Fuß des kleinen Stadiums	=	$9\frac{9}{16}$ Δακτύλ.	= 73,6349	=	81,95
2. Der Fuß des Cleomediſchen Stadiums . . .		$12\frac{13}{16}$	— = 98,6613	=	109,8
3. Der Pythiſche oder Delphiſche Fuß (auch Fuß von Marſeille)		$14\frac{2}{5}$	— = 109,5168	=	121,88
4. Der Griechiſch-Olympiſche Fuß		17,69	— = 136,11	=	151,6033
5. Königl. oder Philetäriſche Fuß		20	— = 154,008	=	171,4
6. Die Pythiſche oder Delphiſche oder die kleine Elle von Aegypten und Samos		$21\frac{1}{3}$	— = 164,2752	=	182,83
7. Die königl. oder babyl. Elle des Herodot, ſchwarze Elle der Araber		27	— = 207,9108	=	231,39
8. Die heil. Elle, Elle von Kairo, Elle des Nilmeſſers, Hachemiſche Elle der Araber		32	— = 246,4128	=	274,24
9. Chebel, oder Feldmeſſerkette, halber Perſiſcher Σχοῖνος		960	— = 51,336 Fuß	=	57,133 Fuß
10. Die Ἄρουρα, oder das gewöhnliche Flächenmaß hatte 10 gem. Akänen in der Länge, und eben ſo viele in der Breite . .	=	franz. Fuß 85,16×85,16	= — 7252,2 □ Fuß fr. Maß.	=	— 8961,7 □ Fuß bair. Maß.

b) Reiſe-

b) Reiſemaße der Alten.

	franz. Fuß.	gehen auf die geograph. Meile.
1. Stadium des Ariſtoteles, (der Märſche Alexander des Großen)	306,812	74,323
2. Stadium des Cleomedes . .	411,09	55,47
3. Pythiſches oder Delph. Stadium	456,32	49,972
4. Stadium des Eratoſthenes . .	486	46,92
5. Nautiſches Stadium des Herodot und Poſſidonius	513,36	44,419
6. Griechiſch-Olympiſch. Stadium	567,13	40,208
7. Philetäriſches oder königl. Stadium	641,7	35,535
8. Das große Stadium, auch das Egyptiſche oder Alexandriniſche genannt.	684,09	33,333
9. Der Δίαυλος	1026,72	22,210
10. Das Ἱππικόν	2053,44	11,105
11. Die Perſiſche oder Aſiatiſche Meile	5133,6	4,4419
12. Die Indiſche Koß	7700,4	2,9613
13. Der Δολιχός	8221,8	2,7735
14. Die Paraſange des Herodot	15400,8	1,4306
15. Der Σχοῖνος von Delta oder Nieder-Aegypten	20534,4	1,1105
16. Der Σχοῖνος von Ober-Aegypten oder der Thebaiſche . . .	30801,6	0,7752
17. Der Heptanomiſche Σχ. von Mittel-Aegypten	61603,2	0,3876
18. Die Tagreiſe Δίαιτα	154008	0,14806

c) Maße für Flüſſigkeiten.

Griech. Benennung.	Μετρητής.	Χοῦς.	Ξέστης.	Κότυλος	Τέταρτον.	Ὀξύβαφον.	Κύαθος.	Κόγχη.	Μύστρον.	Χήμη.	Κοχλιάριον.
	1	12	72	144	288	576	864	1728	3456	4320	8640
		1	6	12	24	48	72	144	288	360	720
			1	2	4	8	12	24	48	60	120
				1	2	4	6	12	24	30	60
					1	2	3	6	12	15	30
						1	$1\frac{1}{2}$	3	6	$7\frac{1}{2}$	15
							1	2	4	5	10
								1	2	$2\frac{1}{2}$	5
									1	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
										1	2
											1
franz. Maß.	1540,8 Kubzoll.	128,4	21,4	10,7	5,35	2,675	1,79	0,895	0,452	0,358	0,179
bair. Maß.	28,6 bair. Maßkannen.	2,4	0,4	0,2	0,1	0,05	0,033	0,0166	0,00833	0,00666	0,00333

d) Ge

d) Getreidemaße.

Μέδιμνος.	Ἑκτεύς.	Χοῖνιξ.	Ξέστης.	Κότυλος.	Ὀξύβαφον.	Κύαθος.	Κοχλιάριον	franz. Kubz.
1	6	48	96	192	768	1152	11520	1540,8
	1	8	16	32	128	192	1920	256,6
		1	2	4	16	24	240	32,08
			1	2	4	6	60	16,04
				1	2	3	30	8,02
					1	$1\frac{1}{2}$	15	2,005
						1	10	1,336
							1	0,1336
$26\frac{1}{7}$ Dreyßiger	$4\frac{5}{12}$ —	$1\frac{12}{108}$ Sechziger.	$\frac{59}{100}$ —	0,15 Maßkanne.	0,075 —	0,05 —	0,005 —	bair. Maß.

Anmer.

Anmerkung 1. Der Μητρητής war ein Körpermaß, deſſen Länge, Breite, Höhe einen griechiſchen Fuß betrug. Er heißt manchmal auch Κάδος. διώτη. Es gab in Griechenland acht verſchiedene Metreten nach Verſchiedenheit der Fußmaße, welche zu Grunde gelegt wurden.

		fr. Kbz.	bair. Maß.
1.	Metretes oder Kubus des Delph. Fußes	= 760,21	= 14,074
2.	— — des geometr. Fußes	= 1082,4	= 20,082
3.	— — des griech. olymp. Fußes	= 1459,2	= 27,077
4.	— — der Pygme oder des mittlern griech. Fußes	= 1540,8	= 28,593
5.	— — des Pygon . . .	= 1678,4	= 31,145
6.	— — des königl. oder Philetäriſchen Fußes .	= 2113,6	= 39,13
7.	— — der Pythiſchen oder kleinen Elle (ägyptiſcher Metretes oder des Ptolemäus) . .	= 2564,3	= 47,584
8.	— — der Mittel-Elle von 24 Δακτύλ. oder Syriſcher Metretes . .	= 3652,9	= 67,784

Die vorangehenden Reduktionen beziehen ſich auf den mittlern attiſchen Metretes.

Anmerkung. 2. Das griechiſche Gewicht hatte mit dem Gelde einerley Eintheilung. Die folgende Reduktion bezieht ſich auf die attiſche Mitteldrachme von 78 Pariſer Gran.

e) Mün-

e) Münzen und Gewicht der Griechen.

	Τάλαντον	Μνᾶ	Τετράδραχμον	Δίδραχμον	Δραχμη	Γράμμα	Ὀβολός	Κεράτιον	Χαλκοῦς	Λεπτόν	Gewichtsbetrag: Köllniſches Markgewicht.	Gewichtsbetrag: Baierſches Handelsgew.
	1	60	1500	3000	6000	18000	36000	108.000	288000	1'728.000	106 Mark 19364 Richtpf.	44,4 Pfd.
		1	25	50	100	300	600	1800	4800	28.800	1 Mark 50567 Richtpf.	23,7 Loth
			1	2	4	12	24	72	192	1152	4644,12 R.	3,8 Qtl.
				1	2	6	12	36	96	576	2322,06 R.	1,9 Qtl.
					1	3	6	18	48	288	1161,03 R.	3,8 Pfgw.
						1	2	6	16	96	387,01 R.	1,266 Pfg.
							1	3	8	48	193,505 R.	9,5 Gran
								1	2⅔	16	64,50166 R.	3,166 Gr.
									1	6	24,1882 R.	1,185 Gr.
										1	4,04704 R.	0,1975 Gr.
Geldbetrag.	fl. 2551,68	fl. 42,5	fl. 1,7011	Kr. 51,13	Kr. 25,5	Kr. 8,5	Kr. 4,25	Kr. 1,416	Hl. 4,25	Hl. 0,708	—	—

Verſchiedene Talente und Drachmen der Griechen.

	Pariſ. Gran.	Als Gewicht.		Als Münzen.
		Kölln. Mark.	Richtpfenn.	
1. Drachme von Aegium, oder die Peloponneſ.	60	—	893,10	19,6 kr.
Talent	—	81	50184	1962,84 fl.
2. Drachme von Samos, oder kleine Attiſche (auch ὀλκή genannt)	63	—	937,755	20,6 kr.
Talent	—	85	55970	2060 fl.
3. Drachme von Chalcis und Euböa (Rhodus)	66	—	982,41	21,5 kr.
Talent	—	89	61756	2159,1 fl.
4. Drachme von Tyrus oder Phöniziſche	69	—	1027,065	22,5 kr.
Talent	—	94	2006	2257,26 fl.
5. Drachme von Ephesus oder die Joniſche	72	—	1071,72	23,5 kr.
Talent	—	98	7792	2355,42 fl.
6. Drachme von Creta oder Chios	75	—	1116,375	24,5 kr.
Talent	—	102	13578	2453,52 fl.
7. Attiſche oder Mitteldrachme	78	—	1161,03	25,5 kr.
Talent	—	106	19364	2551,68 fl.
8. Attiſch-ſiciliſche Drachme	81	—	1205,685	26,49 kr.
Talent	—	110	25150	2649,84 fl.
9. Große Attiſche oder Korinthiſche Drachme . . .	84	—	1250,34	27,4 kr.
Talent	—	119	3256	2747,94 fl.
10. Drachme von Abacöne oder Jſtros	90	—	1339,65	29,4 kr.
Talent	—	122	42508	2944,26 fl.
11. Drachme von Pylos oder Elis	96	—	1428,96	31,4 kr.
Talent	—	130	54080	3140,52 fl.
12. Drachme von Reggium od. Naxos	105	—	1562,925	34,3 kr.
Talent	—	143	5903	3434,94 fl.
13. Drachme von Alexandrien	126	—	1875,51	41,2 kr.
Talent (auch das Hebräiſche)	—	171	46404	4121,94 fl.
14. Drachme von Aegina . .	140	—	2083,9	45,7 kr.
Talent	—	190	51560	4579,92 fl.

C) Hebrä-

C) Hebräiſche Maße.

a) Längenmaße.

Sabbatherweg	Kaneh Ruthe.	Amah Elle.	Zereth Spanne	Tophach Palme.	Ezbeah Finger.	franz. Fußmaß.	bair. Fußmaß.
1	333⅓	2000	4000	12.000	48.000	3422,4 Fuß	3826,877 Fuß
	1	6	12	36	144	10,2672 Fuß	11,4266 Fuß
		1	2	6	24	20,5344 Zoll	22,8533 Zolle
			1	3	12	10,2672 Zoll	11,4266 Zolle
				1	4	3,4224 Zoll	3,8088 Zolle
					1	10,2672 Lin.	11,4266 Lin.

* Die Hebräiſche Meile betrug 4106,88 franz. Fuß.
** Der Gibrath = ½ Sabbatherweg = 1711,2 fr. Fuß.

b) Maße für Flüſſigkeiten.

Bathus	Hin	Logus.	Ovum Rabbin.	franz. Kubikzoll.	bair. Maßkannen.
1	6	72	432	1082,4	20,085
	1	12	72	180,4	3,314
		1	6	15,033	0,276
			1	2,505	0,046

* Der Bathus, Epha, oder hebräiſche Metretes war der kubirte Zereth.

c) Getreidmaße.

Hebräiſche Benennung.	Corus, s. Chomer.	Lethech	Epha	Seah, s. Satum	Homer, s. Gomor	Kabus.	Ovum Rabbin.
	1	2	10	30	100	180	4320
		1	5	15	50	90	2160
			1	3	10	18	432
				1	3⅓	6	144
					1	1⅕	43⅘
						1	24
							1
fr Kubikz.	10.824	5.412	1082,4	360,8	108,24	60,133	2,5055 frz. Kubz.
bair. Maß.	5.794 Metzen	2,897	0,5794	0,1931	0,05794	0,0322	0,00134 b. Metz.

d) Mün-

d) Münzen und Gewichte.

Kikar (Talent)	Maneh (Mine)	Sekel (Siclus)	Gerah (Obolus)	Minimum Λεπτὸν.	Als Gewicht. Köllniſches Markgewicht.	Als Geld.
1	50	3000	60.000	2592.000	171 Mk. 46404 Rpf.	4121,94 fl.
	1	60	1200	51.840	3 M. 28453,2 Rpf.	82,4308 fl.
		1	20	864	3751,02 Rpf.	1,37398 fl.
			1	43⅕	187,551 Rpf.	4,12194 kr.
				1	4,34143 Rpf.	0,76 Häll.

Vermiſchte Anmerkungen.

1. Die kleine attiſche Tetradrachme, oder der griechiſche Stater (Στατήρ) war zugleich der hebräiſche Sekel (Siclus, oder ſchlechthin argenteus), d. i. die alexandriniſche Didrachme.

2. Der attiſche Aureus (χρυσέος) wog eine ſilberne Didrachme, hatte aber dabey einen zehnfachen Werth.

3. Bey den Hebräern war das Verhältniß des Silbers zum Golde wie 1 : 12. Das Hebräiſche Talent Goldes betrug alſo nach unſerm Gelde 45.463,28 fl.

Tafeln

Tafeln

der Quadrat- und Kubikzahlen

von 1 bis 1000.

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
1	1	1	41	1681	68921
2	4	8	42	1764	74088
3	9	27	43	1849	79507
4	16	64	44	1936	85184
5	25	125	45	2025	91125
6	36	216	46	2116	97336
7	49	343	47	2209	103823
8	64	512	48	2304	110592
9	81	729	49	2401	117649
10	100	1000	50	2500	125000
11	121	1331	51	2601	132651
12	144	1728	52	2704	140608
13	169	2197	53	2809	148877
14	196	2744	54	2916	157464
15	225	3375	55	3025	166375
16	256	4096	56	3136	175616
17	289	4913	57	3249	185193
18	324	5832	58	3364	195112
19	361	6859	59	3481	205379
20	400	8000	60	3600	216000
21	441	9261	61	3721	226981
22	484	10648	62	3844	238328
23	529	12167	63	3969	250047
24	576	13824	64	4096	262144
25	625	15625	65	4225	274625
26	676	17576	66	4356	287496
27	729	19683	67	4489	300763
28	784	21952	68	4624	314432
29	841	24389	69	4761	328509
30	900	27000	70	4900	343000
31	961	29791	71	5041	357911
32	1024	32768	72	5184	373248
33	1089	35937	73	5329	389017
34	1156	39304	74	5476	405224
35	1225	42875	75	5625	421875
36	1296	46656	76	5776	438976
37	1369	50653	77	5929	456533
38	1444	54872	78	6084	474552
39	1521	59319	79	6241	493039
40	1600	64000	80	6400	512000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
81	6561	531441	121	14641	1771561
82	6724	551368	122	14884	1815848
83	6889	571787	123	15129	1860867
84	7056	592704	124	15376	1906624
85	7225	614125	125	15625	1953125
86	7396	636056	126	15876	2000376
87	7569	658503	127	16129	2048383
88	7744	681472	128	16384	2097152
89	7921	704969	129	16641	2146689
90	8100	729000	130	16900	2197000
91	8281	753571	131	17161	2248091
92	8464	778688	132	17424	2299968
93	8649	804357	133	17688	2352637
94	8836	830584	134	17956	2406104
95	9025	857375	135	18225	2460375
96	9216	884736	136	18496	2515456
97	9409	912673	137	18769	2571353
98	9604	941192	138	19044	2628072
99	9801	970299	139	19321	2685619
100	10000	1000000	140	19600	2744000
101	10201	1030301	141	19881	2803221
102	10404	1061208	142	20164	2863288
103	10609	1092727	143	20449	2924207
104	10816	1124864	144	20736	2985984
105	11025	1157625	145	21025	3048625
106	11236	1191016	146	21316	3112136
107	11449	1225043	147	21609	3176523
108	11664	1259712	148	21904	3241792
109	11881	1295029	149	22201	3307949
110	12100	1331000	150	22500	3375000
111	12321	1367631	151	22801	3442951
112	12544	1494928	152	23104	3511808
113	12769	1442897	153	23409	3581577
114	12996	1481544	154	23716	3652264
115	13225	1520875	155	24025	3723875
116	13456	1560896	156	24336	3796416
117	13689	1601613	157	24649	3869893
118	13924	1643032	158	24964	3944312
119	14161	1685159	159	25281	4019679
120	14400	1728000	160	25600	4096000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
161	25921	4173281	201	40401	8120601
162	26244	4251528	202	40804	8242408
163	26569	4330747	203	41209	83[illegible]5427
164	26896	4410944	204	41616	8489664
165	27225	4492125	205	42025	8615125
166	27556	4574296	206	42436	8741816
167	27889	4657463	207	42849	8869743
168	28224	4741632	208	43264	8998912
169	28561	4826809	209	43681	9129329
170	28900	4913000	210	44100	9261000
171	29241	5000211	211	44521	9393931
172	29584	5088448	212	44944	9528128
173	29929	5177717	213	45369	9663597
174	30276	5268024	214	45796	9800344
175	30625	5359375	215	46225	9938375
176	30976	5451776	216	46656	10077696
177	31329	5545233	217	47089	10218313
178	31684	5639752	218	47524	10360232
179	32041	5735339	219	47961	10503459
180	32400	5832000	220	48400	10648000
181	32761	5929741	221	48841	10793861
182	33124	6028568	222	49284	10941048
183	33489	6128487	223	49729	11089567
184	33856	6229504	224	50176	11239424
185	34225	6331625	225	50625	11390625
186	34596	6434856	226	51076	11543176
187	34969	6539203	227	51529	11697083
188	35344	6644672	228	51984	11852352
189	35721	6751269	229	52441	12008989
190	36100	6859000	230	52900	12167000
191	36481	6967871	231	53361	12326391
192	36864	7077888	232	53824	12487168
193	37249	7189057	233	54289	12649337
194	37636	7301384	234	54756	12812904
195	38025	7414875	235	55225	12977875
196	38416	7529536	236	55696	13144256
197	38809	7645373	237	56169	13312053
198	39204	7762392	238	56644	134812[illegible]2
199	39601	7880599	239	57121	13651919
200	40000	8000000	240	57600	13824000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
241	58081	13997521	281	78961	22188041
242	58564	14172488	282	79524	22425768
243	59049	14348907	283	80089	22665187
244	59536	14526784	284	80656	22906304
245	60025	14706125	285	81225	23149125
246	60516	14886936	286	81796	23393656
247	61009	15069223	287	82369	23639903
248	61504	15252992	288	82944	23887872
249	62001	15438249	289	83521	24137569
250	62500	15625000	290	84100	24389000
251	63001	15813251	291	84681	24642171
252	63504	16003008	292	85264	24897088
253	64009	16194277	293	85849	25153757
254	64516	16387064	294	86436	25412184
255	65025	16581375	295	87025	25672375
256	65536	16777216	296	87616	25934336
257	66049	16974593	297	88209	26198073
258	66564	17173512	298	88804	26463592
259	67081	17373979	299	89401	26730899
260	67600	17576000	300	90000	27000000
261	68121	17779581	301	90601	27270901
262	68644	17984728	302	91204	27543608
263	69169	18191447	303	91809	27818127
264	69696	18399744	304	92416	28094464
265	70225	18609625	305	93025	28372625
266	70756	18821096	306	93636	28652616
267	71289	19034163	307	94249	28934443
268	71824	19248832	308	94864	29218112
269	72361	19465109	309	95481	29503629
270	72900	19683000	310	96100	29791000
271	73441	19902511	311	96721	30080231
272	73984	20123648	312	97344	30371328
273	74529	20346417	313	97969	30664297
274	75076	20570824	314	98596	30959144
275	75625	20796875	315	99225	31255875
276	76176	21024576	316	99856	31554496
277	76729	21253933	317	100489	31855013
278	77284	21484952	318	101124	32157432
279	77841	21717639	319	101761	32461759
280	78400	21952000	320	102400	32768000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
321	103041	33076161	361	130321	47045881
322	103684	33386248	362	131044	47437928
323	104329	33698267	363	131769	47832147
324	104976	34012224	364	132496	48228544
325	105625	34328125	365	133225	48627125
326	106276	34645976	366	133956	49027896
327	106929	34965783	367	134689	49430863
328	107584	35287552	368	135424	49836032
329	108241	35611289	369	136161	50243409
330	108900	35937000	370	136900	50653000
331	109561	36264691	371	137641	51064811
332	110224	36594368	372	138384	51478848
333	110889	36926037	373	139129	51895117
334	111556	37259704	374	139876	52313624
335	112225	37595375	375	140625	52734375
336	112896	37933056	376	141376	53157376
337	113569	38272753	377	142129	53582633
338	114244	38614472	378	142884	54010152
339	114921	38958219	379	143641	54439939
340	115600	39304000	380	144400	54872000
341	116281	39651821	381	145161	55306341
342	116964	40001688	382	145924	55742968
343	117649	40353607	383	146689	56181887
344	118336	40707584	384	147456	56623104
345	119025	41063625	385	148225	57066625
346	119716	41421736	386	148996	57512456
347	120409	41781923	387	149769	57960603
348	121104	42144192	388	150544	58411072
349	121801	42508549	389	151321	58863869
350	122500	42875000	390	152100	59319000
351	123201	43243551	391	152881	59776471
352	123904	43614208	392	153664	60236288
353	124609	43986977	393	154449	60698457
354	125316	44361864	394	155236	61162984
355	126025	44738875	395	156025	61629875
356	126736	45118016	396	156816	62099136
357	127449	45499293	397	157609	62570773
358	128164	45882712	398	158404	63044792
359	128881	46268279	399	159201	63521199
360	129600	46656000	400	160000	64000000

Z. 401

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
401	160801	64481201	441	194481	85766121
402	161604	64964808	442	195364	86350888
403	162409	65450827	443	196249	86938307
404	163216	65939264	444	197136	87528384
405	164025	66430125	445	198025	88121125
406	164836	66923416	446	198916	88716536
407	165649	67419143	447	199809	89314623
408	166464	67917312	448	200704	89915392
409	167281	68417929	449	201601	90518849
410	168100	68921000	450	202500	91125000
411	168921	69426531	451	203401	91733851
412	169744	69934528	452	204304	92345408
413	170569	70444997	453	205209	92959677
414	171396	70957944	454	206116	93576664
415	172225	71473375	455	207025	94196375
416	173056	71991296	456	207936	94818816
417	173889	72511713	457	208849	95443993
418	174724	73034632	458	209764	96071912
419	175561	73560059	459	210681	96702579
420	176400	74088000	460	211600	97336000
421	177241	74618461	461	212521	97972181
422	178084	75151448	462	213444	98611128
423	178929	75686967	463	214369	99252847
424	179776	76225024	464	215296	99897344
425	180625	76765625	465	216225	100544625
426	181476	77308776	466	217156	101194696
427	182329	77854483	467	218089	101847563
428	183184	78402752	468	219024	102503232
429	184041	78953589	469	219961	103161709
430	184900	79507000	470	220900	103823000
431	185761	80062991	471	221841	104487111
432	186624	80621568	472	222784	105154048
433	187489	81182737	473	223729	105823817
434	188356	81746504	474	224676	106496424
435	189225	82312875	475	225625	107171875
436	190096	82881856	476	226576	107850176
437	190969	83453453	477	227529	108531333
438	191844	84027672	478	228484	109215352
439	192721	84604519	479	229441	109902239
440	193600	85184000	480	230400	110592000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
481	231361	111284641	521	271441	141420761
482	232324	111980168	522	272484	142236648
483	233289	112678587	523	273529	143055667
484	234256	113379904	524	274576	143877824
485	235225	114084125	525	275625	144703125
486	236996	114791256	526	276676	145531576
487	237169	115501303	527	277729	146363183
488	238144	116214272	528	278784	147197952
489	239121	116930169	529	279841	148035889
490	240100	117649000	530	280900	148877000
491	241081	118370771	531	281961	149721291
492	242064	119095488	532	283024	150568768
493	243049	119823157	533	284089	151419337
494	244036	120553784	534	285156	152273304
495	245025	121287375	535	286225	153130375
496	246016	122023936	536	287296	153990656
497	247009	122763473	537	288369	154854153
498	248004	123505992	538	289444	155720872
499	249001	124251499	539	290521	156590819
500	250000	125000000	540	291600	157464000
501	251001	125751501	541	292681	158340421
502	252004	126506008	542	293764	159220088
503	253009	127263527	543	294849	160103007
504	254016	128024064	544	295936	160989184
505	255025	128787625	545	297025	161878625
506	256036	129554216	546	298116	162771336
507	257049	130323843	547	299209	163667323
508	258064	131096512	548	300304	164566592
509	259081	131872229	549	301401	165469149
510	260100	132651000	550	302500	166375000
511	261121	133432831	551	303601	167284151
512	262144	134217728	552	304704	168196608
513	263169	135005697	553	305809	169112377
514	264196	135796744	554	306916	170031464
515	265225	136590875	555	308025	170953875
516	266256	137388096	556	309136	171879616
517	267289	138188413	557	310249	172808693
518	268324	138991832	558	311364	173741112
519	269361	139798359	559	312481	174676879
520	270400	140608000	560	313600	175616000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
561	314721	176558481	601	361201	217081801
562	315844	177504328	602	362404	218167208
563	316969	178453547	603	363609	219256227
564	318096	179406144	604	364816	220348864
565	319225	180362125	605	366025	221445125
566	320356	181321496	606	367236	222545016
567	321489	182284263	607	368449	223648543
568	322624	183250432	608	369664	224755712
569	323761	184220009	609	370881	225866529
570	324900	185193000	610	372100	226981000
571	326041	186169411	611	373321	228099131
572	327184	187149248	612	374544	229220928
573	328329	188132517	613	375769	230346397
574	329476	189119224	614	376996	231475544
575	330625	190109375	615	378225	232608375
576	331776	191102976	616	379456	233744896
577	332929	192100033	617	380689	234885113
578	334084	193100552	618	381924	236029032
579	335241	194104539	619	383161	237176659
580	336400	195112000	620	384400	238328000
581	337561	196122941	621	385641	239483061
582	338724	197137368	622	386884	240641848
583	339889	198155287	623	388129	241804367
584	341056	199176704	624	389376	242970624
585	342225	200201625	625	390625	244140625
586	343396	201230056	626	391876	245314376
587	344569	202262003	627	393129	246491883
588	345744	203297472	628	394384	247673152
589	346921	204336469	629	395641	248858189
590	348100	205379000	630	396900	250047000
591	349281	206425071	631	398161	251239591
592	350464	207474688	632	399424	252435968
593	351649	208527857	633	400689	253636137
594	352836	209584584	634	401956	254840104
595	354025	210644875	635	403225	256047875
596	355216	211708736	636	404496	257259456
597	356409	212776173	637	405769	258474853
598	357604	213847192	638	407044	259694072
599	358801	214921799	639	408321	260917119
600	360000	216000000	640	409600	262144000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
641	410881	263374721	681	463761	315821241
642	412164	264609288	682	465124	317214568
643	413449	265847707	683	466489	318611987
644	414736	267089984	684	467856	320013504
645	416025	268336125	685	469225	321419125
646	417316	269586136	686	470596	322828856
647	418609	270840023	687	471969	324242703
648	419904	272097792	688	473344	325660672
649	421201	273359449	689	474721	327082769
650	422500	274625000	690	476100	328509000
651	423801	275894451	691	477481	329939371
652	425104	277167808	692	478864	331373888
653	426409	278445077	693	480249	332812557
654	427716	279726264	694	481636	334255384
655	429025	281011375	695	483025	335702375
656	430336	282300416	696	484416	337153536
657	431649	283593393	697	485809	338608873
658	432964	284890312	698	487204	340068392
659	434281	286191179	699	488601	341532099
660	435600	287496000	700	490000	343000000
661	436921	288804781	701	491401	344472101
662	438244	290117528	702	492804	345948408
663	439569	291434247	703	494209	347428927
664	440896	292754944	704	495616	348913664
665	442225	294079625	705	497025	350402625
666	443556	295408296	706	498436	351895816
667	444889	296740963	707	499849	353393243
668	446224	298077632	708	501264	354894912
669	447561	299418309	709	502681	356400829
670	448900	300763000	710	504100	357911000
671	450241	302111711	711	505521	359425431
672	451584	303464448	712	506944	360944128
673	452929	304821217	713	508369	362467097
674	454276	306182024	714	509796	363994344
675	455625	307556875	715	501225	365525875
676	456976	308915776	716	512656	367061696
677	458329	310288733	717	514089	368601813
678	459684	311665752	718	515524	370146232
679	461041	313046839	719	519661	371694959
680	462400	314432000	720	518400	373248000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr	Cub.
721	519841	374805361	761	579121	440711081
722	521284	376367048	762	580644	442450728
723	522729	377933067	763	582169	444194947
724	524176	379503424	764	583696	445943744
725	525625	381078125	765	585225	447697125
726	527076	382657176	766	586756	449455096
727	528529	384240583	767	588289	451217663
728	529984	385828352	768	589824	452984832
729	531441	387420489	769	591361	454756609
730	532900	389017000	770	592900	456533000
731	534361	390617891	771	594441	458314011
732	535824	392223168	772	595984	460099648
733	537289	393832837	773	597529	461889917
734	538756	395446904	774	599076	463684824
735	540225	397065375	775	600625	465484375
736	541696	398688256	776	602176	467288576
737	543169	400315553	777	603729	469097433
738	544644	401947272	778	605284	470910952
739	546121	403583419	779	606841	472729139
740	547600	405224000	780	608400	474552000
741	549081	406869021	781	609961	476379541
742	550564	408518488	782	611524	478211768
743	552049	410172407	783	613089	480048687
744	553536	411830784	784	614656	481890304
745	555025	413493625	785	616225	483736625
746	556516	415160936	786	617796	485587656
747	558009	416832723	787	619369	487443403
748	559504	418508992	788	620944	489303872
749	561001	420189749	789	622521	491169069
750	562500	421875000	790	624100	493039000
751	564001	423564751	791	625681	494913671
752	565504	425259008	792	627264	496793088
753	567009	426957777	793	628849	498677257
754	568516	428661064	794	630436	500566184
755	570025	430368875	795	632025	502459875
756	571536	432081216	796	633616	504358336
757	573049	433798093	797	635209	506261573
758	574564	435519512	798	636804	508169592
759	576081	437245479	799	638401	510082399
760	577600	438976000	800	640000	512000000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
801	641601	513922401	841	707281	594823321
802	643204	515849608	842	708964	596947688
3	644809	517781627	843	710649	599077107
804	646416	519718464	844	712336	601211584
805	648025	521660125	845	714025	603351125
806	649636	523606616	846	715716	605495736
807	651249	525557943	847	717409	607645423
808	652864	527514112	848	719104	609800192
809	654481	529475129	849	720801	611960049
810	656100	531441000	850	722500	614125000
811	657721	533411731	851	724201	616295051
812	659344	535387328	852	725904	618470208
813	660969	537367797	853	727609	620650477
814	662596	539353144	854	729316	622835864
815	664225	541343375	855	731025	625026375
816	665856	543338496	856	732736	627222016
817	667489	545338513	857	734449	629422793
818	669124	547343432	858	736164	631628712
819	670761	549353259	859	737881	633839779
820	672400	551368000	860	739600	636056000
821	674041	553387661	861	741321	638277381
822	675684	555412248	862	743044	640503928
823	677329	557441767	863	744769	642735647
824	678976	559476224	864	746496	644972544
825	680625	561515625	865	748225	647214625
826	682276	563559976	866	749956	649461896
827	683929	565609283	867	751689	651714363
828	685584	567663552	868	753424	653972032
829	687241	569722789	869	755161	656234909
830	688900	571787000	870	756900	658503000
831	690561	573856191	871	758641	660776311
832	692224	575930368	872	760384	663054848
833	693889	578009537	873	762129	665338617
834	695556	580093704	874	763876	667627624
835	697225	582182875	875	765625	669921875
836	698896	584277056	876	767376	672221376
837	700569	586376253	877	769129	674526133
838	702244	588480472	878	770884	676836152
839	703921	590589719	879	772641	679151439
840	705600	592704000	880	774400	681472000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
881	776161	683797841	921	848241	781229961
882	777924	686128968	922	850084	783777448
883	779689	688465387	923	851929	786330467
884	781456	690807104	924	853776	788889024
885	783225	693154125	925	855625	791453125
886	784996	695506456	926	857476	794022776
887	786769	697864103	927	859329	796597983
888	788544	700227072	928	861184	799178752
889	790321	702595369	929	863041	801765089
890	792100	704969000	930	864900	804357000
891	793881	707347971	931	866761	806954491
892	795664	709732288	932	868624	809557568
893	797449	712121957	933	870489	812166237
894	799236	714516984	934	872356	814780504
895	801025	716917375	935	874225	817400375
896	802816	719323136	936	876096	820025856
897	804609	721734273	937	877969	822656953
898	806404	724150799	938	879844	825293672
899	808201	726572692	939	881721	827936019
900	810000	729000000	940	883600	830584000
901	811801	731432701	941	885481	833237621
902	813604	733870808	942	887364	835896888
903	815409	736314327	943	889249	838561807
904	817216	738763264	944	891136	841232384
905	819025	741217625	945	893025	843908625
906	820836	743677416	946	894916	846590536
907	822649	746142643	947	896809	849278123
908	824464	748613312	948	898704	851971392
909	826281	751089429	949	900601	854670349
910	828100	753571000	950	902500	857375000
911	829921	756058031	951	904401	860085351
912	831744	758550528	952	906304	862801408
913	833569	761048497	953	908209	865523177
914	835396	763551944	954	910116	868250664
915	837225	766060875	955	912025	870983875
916	839056	768575296	956	913936	873722816
917	840889	771095213	957	915849	876467493
918	842724	773620632	958	917764	879217912
919	844561	776151559	959	919681	881974079
920	846400	778688000	960	921600	884736000

Z.	Quadr.	Cub.	Z.	Quadr.	Cub.
961	923521	887503681	981	962361	944076141
962	925444	890277128	982	964324	946966168
963	927369	893056347	983	966289	949862087
964	929296	895841344	984	968256	952763904
965	931225	898632125	985	970225	955671625
966	933156	901428696	986	972196	958585256
967	935089	904231063	987	974169	961504803
968	937024	907039232	988	976144	964430272
969	938961	909853209	989	978121	967361669
970	940900	912673000	990	980100	970299000
971	942841	915498611	991	982081	973242271
972	944784	918330048	992	984064	976191488
973	946729	921167317	993	986049	979146657
974	948676	924010424	994	988036	982107784
975	950625	926859375	995	990025	985074875
976	952576	929714176	996	992016	988047936
977	954529	932574833	997	994009	991026973
978	956484	935441352	998	996004	994011992
979	958441	938313739	999	998001	997002999
980	960400	941192000	1000	1000000	1000000000

Anmerkung 1.

Mit Hülfe dieſer Tafeln wird es ſehr leicht, eine vier- und fünfzifferige Wurzel zum Quadrate oder Kubus zu erheben, oder aus ſolchen Quadrat- und Kubikzahlen die Wurzel zu finden.

Aufgaben.

a) Welches iſt der Kubus von 8836?

Operation. $(8836)^3 = (8830 + 6)^3 = (a + b)^3$

$$a^3 = 688.465'387.000$$

$$b^3 = \quad 216$$

$$3a^2b = 3 \times 77968900 \times 6 = 1.403'440.200$$

$$3ab^2 = 3 \times 8830 \times 36 \quad = 953640$$

$$C \quad = 689.869'781.056.$$

b) Welches iſt die Kubikwurzel aus: 606.355'001.344?

Operation. Man theile dieſen Kubus von der Rechten zur Linken in Klaſſen nach der Regel, und ziehe von den drey erſten Klaſſen den Kubus einer dreyzifferigen Wurzel ab, welcher der abgeſchnittenen Reihe van Ziffern am nächſten kommt.

Der

Der nächſte Kubus iſt: 605495736. — Wurzel 846.

Dieſen Kubus ziehe man von den drey erſten Klaſſen der obigen Kubikzahl ab; Reſt 859265344.

Das Quadrat von 846 iſt nach den Tafeln: 715716, und deſſen Dreyfaches 2147148. Dadurch erhält man auf dem bekannten Wege (§. 168.) den vierten Theil der Kubikwurzel 8464.

c) $\sqrt[3]{25'419.964'033.827}$, (wo vorausgeſetzt wird, daß dieſe Zahl ein reiner Kubus ſey).

Operation. Die erſten vier Stellen der Wurzel 2940 erhält man auf die eben gezeigte Weiſe; die fünfte Stelle erkenne ich aus dem Endziffer des Kubus 27, deſſen Wurzel 3 iſt. Die verlangte Kubikwurzel iſt alſo: 29.403.

Anmerkung 2. In den folgenden Tabellen ſind die Quadrat- und Kubikwurzeln aller natürlichen ganzen Zahlen von 1 bis 1000 enthalten. Will man nun dieſe Tafeln auch auf die Ausziehung der doppelten Wurzel aus Decimalzahlen, die nicht über drey Stellen haben, anwenden; ſo muß man vor Allem die Quadratzahlen zu je zwey, und die Kubikzahlen zu je drey Decimalſtellen compliren, und dann bey Abſchneidung der Ganzen die nöthigen Regeln beobachten.

Beyſpiele.

a) $\sqrt{316} = 17{,}7763888.$
Folglich auch $\sqrt{3{,}16} = 1{,}77763888.$

b) $\sqrt{3{,}5} = \sqrt{3{,}50} = 1{,}87082869.$

c) $\sqrt[3]{0{,}9} = \sqrt[3]{0{,}900} = 0{,}99966655.$

d) $\sqrt[3]{316} = 6{,}8112846.$

e) $\sqrt[3]{0{,}316} = 0{,}68112846.$

f) $\sqrt[3]{3{,}16} = \sqrt[3]{3{,}160} = \sqrt[3]{8 \times 0{,}395} = 2\sqrt[3]{0{,}359}$
$= 2 \times 0{,}73372339 = 1{,}46744678.$

Tafeln

Tafeln

der Quadrat- und Kubikwurzeln

aller natürlichen Zahlen

von 1 bis 1000.

Z.	Q.Wurzel	C.Wurzel	Z.	Q.Wurzel	C.Wurzel
1	1.0000000	1.0000000	41	6.4031242	3.4482172
2	1 4142136	1.2599205	42	6.4807407	3.4760266
3	1.7320508	1.4422496	43	6.5574385	3.5033981
4	2.0000000	1.5874011	44	6.6332496	3.5303483
5	2.2360680	1.7099759	45	6.7082039	3.5568933
6	2.4494897	1.8171206	46	6.7823300	3.5830479
7	2.6457513	1.9129312	47	6.8556547	3.6088261
8	2.8284271	2.0000000	48	6.9282032	3.6342411
9	3.0000000	2.0800837	49	7.0000000	3.6593057
10	3.1622777	2.1544347	50	7.0710678	3.6840314
11	3.3166248	2.2239801	51	7.1414284	3.7084298
12	3.4641016	2.2894286	52	7.2111026	3.7325111
13	3.6055513	2.3513347	53	7.2801099	3.7562858
14	3.7416574	2.4101422	54	7.3484692	3.7797631
15	3.8729833	2.4662121	55	7.4161985	3.8029525
16	4.0000000	2.5198421	56	7.4833148	3.8258624
17	4.1231056	2.5712816	57	7.5498344	3.8485011
18	4.2426407	2.6207414	58	7.6157731	3.8708766
19	4.3588989	2.6684016	59	7.6811458	3.8929965
20	4.4721359	2.7144177	60	7.7459667	3.9148676
21	4.5825757	2.7589243	61	7.8102497	3.9364972
22	4.6904158	2.8020393	62	7.8740078	3.9578915
23	4.7958315	2 8438670	63	7.9372539	3.9790571
24	4.8989795	2.8844991	64	8.0000000	4.0000000
25	5.0000000	2.9240177	65	8.0622577	4.0207256
26	5.0990195	2.9624960	66	8.1240384	4.0412401
27	5.1961524	3.0000000	67	8.1853527	4.0615480
28	5.2915026	3.0365889	68	8.2462112	4.0816551
29	5.3851648	3.0723168	69	8.3066239	4.1015661
30	5.4772256	3.1072325	70	8.3666003	4.1212853
31	5.5677644	3.1413806	71	8.4261497	4.1408178
32	5.6568543	3.1748021	72	8.4852814	4.1601676
33	5.7445626	3.2075343	73	8.5440037	4.1793390
34	5.8309519	3.2396118	74	8.6023253	4.1983364
35	5.9160798	3.2710663	75	8.6602540	4.2171633
36	6.0000000	3.3019272	76	8.7177978	4.2358236
37	6.0827625	3.3322218	77	8.7749644	4.2543210
38	6.1644140	3.3619754	78	8 8317609	4.2726586
39	6.2449980	3.3912114	79	8.8881944	4.2908404
40	6.3245553	3.4199519	80	8.9442719	4.3088695

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel
81	9.0000000	4.3267487	121	11.0000000	4.9460874
82	9.0553851	4.3444815	122	11.0453610	4.9596756
83	9.1104336	4.3620707	123	11.0905365	4.9731898
84	9.1651514	4.3795191	124	11.1355287	4.9866309
85	9.2195445	4.3968296	125	11.1803399	5.0000000
86	9.2736185	4.4140049	126	11.2249722	5.0132980
87	9.3273791	4.4310476	127	11.2694276	5.9265257
88	9.3808315	4.4479602	128	11.3137085	5.0396842
89	9.4339811	4.4647451	129	11.3578167	5.0527744
90	9.4868330	4.4814047	130	11.4017542	5.0657970
91	9.5393919	4.4979414	131	11.4455231	5.0787531
92	9.5916630	4.5143574	132	11.4891253	5.0916434
93	9.6436507	4.5306549	133	11.5325626	5.1044687
94	9.6953597	4.5468359	134	11.5758369	5.1172299
95	9.7467943	4.5629026	135	11.6189500	5.1299275
96	9.7979589	4.5788570	136	11.6619038	5.1425632
97	9.8488578	4.5947009	137	11.7046999	5.1551368
98	9.8994949	4.6104363	138	11.7473401	5.1676492
99	9.9498744	4.6260650	139	11.7898261	5.1801013
100	10.0000000	4.6415888	140	11.8321596	5.1924941
101	10.0498756	4.6570095	141	11.8743421	5.2048279
102	10.0995049	4.6723288	142	11.9163753	5.2171034
103	10.1488915	4.6875481	143	11.9582607	5.2293215
104	10.1980390	4.7026694	144	12.0000000	5.2414828
105	10.2469507	4.7176940	145	12.0415945	5.2535878
106	10.2956301	4.7326234	146	12.0830460	5.2656374
107	10.3440804	4.7474594	147	12.1243556	5.2776321
108	10.3923048	4.7622032	148	12.1655251	5.2895725
109	10.4403065	4.7768562	149	12.2065556	5.3014592
110	10.4880885	4.7914199	150	12.2474487	5.3132928
111	10,5356537	4.8058956	151	12.2882057	5.3250740
112	10.5830052	4.8202845	152	12.3288280	5.3368033
113	10.6301458	4.8345881	153	12.3693169	5.3484812
114	10.6770782	4.8488075	154	12.4096737	5.3601085
115	10.7238053	4.8629441	155	12.4498996	5.3716853
116	10.7703296	4.8769989	156	12.4899960	5.3832126
117	10.8166538	4.8909730	157	12.5299641	5.3946907
118	10.8627805	4.9048681	158	12.5698051	5.4061202
119	10.9087121	4.9186847	159	12.6095202	5.4175016
120	10.9544511	4.9324242	160	12.6491106	5.4288352

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
161	12.6885775	5.4401218
162	12.7279220	5.4513618
163	12.76714 3	5.4625556
164	12.80 2485	5.4737036
165	12.8452326	5.4848065
166	12.8840987	5.4958647
167	12.9228180	5.5068784
168	12.9614814	5.5178484
169	13.0000000	5.5287748
170	13.0384048	5.5396583
171	13.0766968	5.5504993
172	13.1148770	5.5612979
173	13.1529464	5.5720547
174	13.1909059	5.5827701
175	13.2287565	5.5934447
176	13.2664992	5.6040787
177	13.3041347	5.6146724
178	13.3416641	5.6252263
179	13.3790882	5.6357408
180	13.4164078	5.6462162
181	13 4536240	5.6566528
182	13.4907376	5.6670511
183	13.5277492	5.6774114
184	13.5646599	5.6877340
185	13.6014705	5.6980192
186	13.6381817	5.7082670
187	13.6747943	5.7184790
188	13.7113092	5.7286544
189	13.7477271	5.7387937
190	13.7840487	5.7488970
191	13.8202749	5.7589652
192	13.8564064	5.7689986
193	13.8924440	5.7789965
194	13.9283883	5 7889603
195	13.9642400	5.7988907
196	14.0000000	5.8087857
197	14.0356688	5.8186478
198	14.0712473	5.8284766
199	14.1067356	5.8382724
200	14.1421356	5.8480354
201	14.1774468	5.8577661
202	14.2126704	5.8674643
203	14 2 78069	5.8771306
204	14.2828569	5.8867653
205	14.3178210	5.8963688
206	14.3527000	5.9059405
207	14.3874946	5.9154817
208	14.4 22051	5.9249921
209	14.4 68323	5.9344721
210	1 .4913767	5.9439218
211	14.5258390	5.9533418
212	14.5602197	5.9627320
213	14.5945195	5 9720926
214	14.6287387	5.9814240
215	14.6628783	5.9907264
216	14.6969385	6.0000000
217	14.7309199	6.0092449
218	14.7648231	6.0184616
219	14.7986485	6.0276501
220	14.8323969	6.0368106
221	14.8660687	6.0459436
222	14.8996644	6.0550489
223	14.9331845	6.0641270
224	14.9666295	6.0731780
225	15.0000000	6.0822019
226	15.0332964	6.0911994
227	15.0665192	6.1001704
228	15.0996689	6.1091148
229	15.1327459	6.1180332
230	15.1657509	6.1269256
231	15.1986841	6.1357924
232	15.2315462	6.1446336
233	15.2643375	6.1534494
234	15.2970585	6.1622401
235	15.3297097	6.1710058
236	15.3622915	6.1797466
237	15.3948043	6.1884628
238	15.4272486	6.1971543
239	15.4596248	6.2058218
240	15.4919333	6.2144650

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
241	15.5241747	6.2230843	281	16.7630546	6.5499116
242	15.5563492	6.2316796	282	16.7928553	6.5576722
243	15.5884573	6.2402515	283	16.8226039	6.5654144
244	15.6204993	6.2487999	284	16.8522995	6.5731392
245	15.6524759	6.2573247	285	16.8819430	6.5808444
246	15.6843871	6.2658265	286	16.9115345	6.5885323
247	15.7162337	6.2743053	287	16.9410743	6.5962023
248	15.7480157	6.2827613	288	16.9705628	6.6038545
249	15.7797339	6.2911946	289	17.0000000	6.6114890
250	15.8113883	6.2996052	290	17.0293864	6.6191059
251	15.8429795	6.3079935	291	17.0587221	6.6267054
252	15.8745079	6.3163596	292	17.0880075	6.6342874
253	15.9059737	6.3247035	293	17.1172427	6.6418523
254	15.9373775	6.3330255	294	17.1464283	6.6493997
255	15.9687194	6.3413257	295	17.1755640	6.9569301
256	16.0000000	6.3496042	296	17.2046505	6.6644437
257	16.0312195	6.3578612	297	17.2336879	6.6719403
258	16.0623784	6.3660968	298	17.2626765	6.6794200
259	16.0934769	6.3743111	299	17.2916164	6.6868831
260	16.1245155	6.3825043	300	17.3205081	6.6943296
261	16.1554944	6.3906765	301	17.3493516	6.7017594
262	16.1864140	6.3988279	302	17.3781472	6.7091728
263	16.2172747	6.4069586	303	17.4068952	6.7165699
264	16.2480768	6.4150686	304	17.4355958	6.7239508
265	16.2788206	6.4231583	305	17.4642492	6.7313155
266	16.3095064	6.4312275	306	17.4928557	6.7386641
267	16.3401346	6.4392767	307	17.5214155	6.7459972
268	16.3707055	6.4473057	308	17.5499288	6.7533128
269	16.4012195	6.4553148	309	17.5783958	6.7606143
270	16.4316767	6.4633041	310	17.6068168	6.7678994
271	16.4620776	6.4712736	311	17.6351921	6.7751689
272	16.4924225	6.4792236	312	17.6635217	6.7824228
273	16.5227116	6.4871547	313	17.6918060	6.7896613
274	16.5529453	6.4950653	314	17.7200452	6.7968843
275	16.5831239	6.5029571	315	17.7482393	6.8040921
276	16.6132477	6.5108301	316	17.7763888	6.8112846
277	16.6433170	6.5186840	317	17.8044938	6.8184620
278	16.6733320	6.5265188	318	17.8325545	6.8256242
279	16.7032931	6.5343349	319	17.8605711	6.8327714
280	16.7332005	6.5421326	320	17.8885438	6.8399037

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
321	17.9164729	6.8470212
322	17.9443584	6.8541240
323	17.9722008	6.8612120
324	18.0000000	6.8682855
325	18.0277564	6.8753444
326	18.0554701	6.8823887
327	18.0831413	6.8894186
328	18.1107703	6.8964344
329	18.1383571	6.9034360
330	18.1659021	6.9104232
331	18.1934054	6.9173964
332	18.2208671	6.9243555
333	18.2482876	6.9313007
334	18.2756669	6.9382321
335	18.3030055	6.9451495
336	18.3303029	6.9520533
337	18.3575598	6.9589434
338	18.3847763	6.9658198
339	18.4119526	6.9726827
340	18.4390889	6.9795321
341	18.4661853	6.9863680
342	18.4932420	6.9931906
343	18.5202592	7.0000000
344	18.5472370	7.0067961
345	18.5741756	7.0135791
346	18.6010752	7.0203489
347	18.6279360	7.0271058
348	18.6547584	7.0338496
349	18.6815416	7.0405800
350	18.7082869	7.0472980
351	18.7349939	7.0540040
352	18.7616630	7.0606966
353	18.7882942	7.0673766
354	18.8148876	7.0740439
355	18.8414436	7.0806987
356	18.8679622	7.0873411
357	18.8944436	7.0939709
358	18.9208879	7.1005883
359	18.9472953	7.1071936
360	18.9736659	7.1137866
361	19.0000000	7.1203673
362	19.0262976	7.1269359
363	19.0525589	7.1334923
364	19.0787840	7.1400369
365	19.1049734	7.1465694
366	19.1311265	7.1530901
367	19.1572441	7.1595988
368	19.1833261	7.1660958
369	19.2093727	7.1725808
370	19.2353841	7.1790543
371	19.2614603	7.1855162
372	19.2873015	7.1919663
373	19.3132079	7.1984050
374	19.3390796	7.2048321
375	19.3649167	7.2112478
376	19.3907194	7.2176522
377	19.4164878	7.2240451
378	19.4422221	7.2304267
379	19.4679224	7.2367972
380	19.4935887	7.2431564
381	19.5192213	7.2495045
382	19.5448204	7.2558415
383	19.5703858	7.2621674
384	19.5959180	7.2684823
385	19.6214169	7.2747863
386	19.6468827	7.2810794
387	19.6723156	7.2873616
388	19.6977156	7.2936330
389	19.7230829	7.2998936
390	19.7484176	7.3061436
391	19.7737199	7.3123828
392	19.7989899	7.3186114
393	19.8242276	7.3248294
394	19.8494332	7.3310369
395	19.8746069	7.3372339
396	19.8997487	7.3434204
397	19.9248588	7.3495966
398	19.9499373	7.3557622
399	19.9749844	7.3619177
400	20.0000000	7.3680630

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
401	20.0249844	7.3741979	441	21.0000000	7.6116626
402	20.0499376	7.3803227	442	21.0237960	7.6174116
403	20.0748599	7.3864373	443	21.0475652	7.6231519
404	20.0997512	7.3925416	444	21.0713075	7.6288836
405	20.1246118	7.3986362	445	21.0950231	7.6346067
406	20.1494417	7.4047206	446	21.1187121	7.6403212
407	20.1742410	7.4107950	447	21.1423745	7.6460272
408	20.1990099	7.4168595	448	21.1660105	7.6517247
409	20.2237484	7.4229141	449	21.1896201	7.6574137
410	20.2484567	7.4289588	450	21.2132034	7.6630940
411	20.2731349	7.4349937	451	21.2367606	7.6687664
412	20.2977831	7.4410189	452	21.2602916	7.6744304
413	20.3224014	7.4470342	453	21.2837966	7.6800862
414	20.3469899	7.4530399	454	21.3072757	7.6857333
415	20.3715488	7.4590359	455	21.3307290	7.6913716
416	20.3960780	7.4650223	456	21.3541565	7.6970022
417	20.4205779	7.4709992	457	21.3775581	7.7026242
418	20.4450483	7.4769662	458	21.4009345	7.7082391
419	20.4694895	7.4829241	459	21.4242853	7.7138448
420	20.4939015	7.4888723	460	21.4476106	7.7194426
421	20.5182845	7.4948112	461	21.4709105	7.7250324
422	20.5426386	7.5007406	462	21.4941852	7.7306140
423	20.5669638	7.5066607	463	21.5174348	7.7361877
424	20.5912603	7.5125715	464	21.5406592	7.7417533
425	20.6155281	7.5184729	465	21.5638587	7.7473107
426	20.6397677	7.5243652	466	21.5870331	7.7528605
427	20.6639784	7.5302482	467	21.6101828	7.7584022
428	20.6881609	7.5361220	468	21.6333076	7.7639360
429	20.7123152	7.5419867	469	21.6564078	7.7694620
430	20.7364413	7.5478423	470	21.6794834	7.7749806
431	20.7605395	7.5536889	471	21.7025344	7.7804903
432	20.7846097	7.5595260	472	21.7255609	7.7859931
433	20.8086520	7.5653548	473	21.7485631	7.7914875
434	20.8326667	7.5711742	474	21.7715410	7.7969745
435	20.8566539	7.5769848	475	21.7944947	7.8024537
436	20.8806130	7.5827865	476	21.8174242	7.8079253
437	20.9045450	7.5885793	477	21.8403297	7.8133892
438	20.9284495	7.5943633	478	21.8632111	7.8188450
439	20.9523269	7.6001385	479	21.8860686	7.8242942
440	20.9761770	7.6059050	480	21.9089022	7.8297353

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
481	21.9317122	7.8351687
482	21.9544984	7.8405949
483	21.9772609	7.8460133
484	22.0000000	7.8514240
485	22.0227155	7.8568280
486	22.0454077	7.8622241
487	22.0680765	7.8676130
488	22.0907220	7.8729944
489	22.1133444	7.8783684
490	22.1359436	7.8837352
491	22.1585198	7.8890946
492	22.1810730	7.8944468
493	22.2036033	7.8997917
494	22.2261107	7.9051294
495	22.2485955	7.9104599
496	22.2710575	7.9157832
497	22.2934968	7.9210994
498	22.3159136	7.9264085
499	22.3383079	7.9317104
500	22.3606798	7.9370058
501	22.3830292	7.9422931
502	22.4053565	7.9475737
503	22.4276615	7.9528476
504	22.4499443	7.9581144
505	22.4722051	7.9633742
506	22.4944437	7.9686271
507	22.5166605	7.9738731
508	22.5388553	7.9791122
509	22.5610283	7.9843583
510	22.5831795	7.9895697
511	22.6053091	7.9947883
512	22.6274170	8.0000000
513	22.6495033	8.0052049
514	22.6715681	8.0104031
515	22.6936114	8.0155945
516	22.7156334	8.0207793
517	22.7376340	8.0259574
518	22.7596136	8.0311282
519	22.7815715	8.0362934
520	22.8035085	8.0414515
521	22.8254244	8.0466030
522	22.8473193	8.0517479
523	22.8691932	8.0568862
524	22.8910463	8.0620180
525	22.9128785	8.0671432
526	22.9346898	8.0722625
527	22.9564805	8.0773743
528	22.9782505	8.0824800
529	23.0000000	8.0875794
530	23.0217288	8.0926723
531	23.0434372	8.0977588
532	23.0651252	8.1028385
533	23.0867928	8.1079128
534	23.1084400	8.1129830
535	23.1300670	8.1180413
536	23.1516738	8.1230962
537	23.1732604	8.1281448
538	23.1948270	8.1331870
539	23.2163735	8.1382230
540	23.2379000	8.1432528
541	23.2594067	8.1482764
542	23.2808935	8.1532939
543	23.3023604	8.1583056
544	23.3238076	8.1633102
545	23.3452350	8.1683091
546	23.3666429	8.1733020
547	23.3880311	8.1782887
548	23.4093998	8.1832694
549	23.4307490	8.1882441
550	23.4520788	8.1932127
551	23.4733892	8.1981752
552	23.4946802	8.2031318
553	23.5159520	8.2080824
554	23.5372046	8.2130271
555	23.5584379	8.2179657
556	23.5796522	8.2228985
557	23.6008474	8.2278253
558	23.6220236	8.2327463
559	23.6431803	8.2376614
560	23.6643191	8.2425706

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
561	23.6854385	8.2474739	601	24.5153013	8.4390098
562	23.7065392	8.2523715	602	24.5356883	8.4436877
563	23.7276210	8.2572632	603	24.5560583	8.4483605
564	23.7486841	8.2621492	604	24.5764114	8.4530281
565	23.7697286	8.2670294	605	24.5967477	8.4576905
566	23.7907545	8.2719038	606	24.6170672	8.4623478
567	23.8117618	8.2767725	607	24.6373699	8.4670001
568	23.8327506	8.2816355	608	24.6576560	8.4716472
569	23.8537209	8.2864927	609	24.6779253	8.4762891
570	23.8746727	8.2913443	610	24.6981781	8.4809261
571	23.8956063	8.2961902	611	24.7184140	8.4855580
572	23.9165215	8.3010305	612	24.7386337	8.4901847
573	23.9374184	8.3058651	613	24.7588368	8.4948055
574	23.9582971	8.3106941	614	24.7790234	8.4994232
575	23.9791576	8.3155175	615	24.7991935	8.5040349
576	24.0000000	8.3203352	616	24.8193473	8.5086417
577	24.0208241	8.3251475	617	24.8394847	8.5132434
578	24.0416305	8.3299542	618	24.8596058	8.5178402
579	24.0624188	8.3347553	619	24.8797106	8.5224321
580	24.0831891	8.3395508	620	24.8997992	8.5270189
581	24.1039416	8.3443410	621	24.9198716	8.5316009
582	24.1246761	8.3491256	622	24.9399278	8.5361779
583	24.1453929	8.3539047	623	24.9599679	8.5407501
584	24.1660919	8.3586783	624	24.9799919	8.5453173
585	24.1867732	8.3634465	625	25.0000000	8.5498797
586	24.2074368	8.3682094	626	25.0199920	8.5544372
587	24.2280829	8.3729667	627	25.0399680	8.5589899
588	24.2487113	8.3777187	628	25.0599281	8.5635377
589	24.2693222	8.3824652	629	25.0798724	8.5680807
590	24.2899156	8.3872065	630	25.0998007	8.5726188
591	24.3104916	8.3919424	631	25.1197133	8.5771522
592	24.3310500	8.3966729	632	25.1396102	8.5816808
593	24.3515913	8.4013981	633	25.1594912	8.5862048
594	24.3721152	8.4061180	634	25.1793566	8.5907238
595	24.3926218	8.4108326	635	25.1992063	8.5952380
596	24.4131112	8.4155423	636	25.2190404	8.5997476
597	24.4335834	8.4202460	637	25.2388587	8.6042524
598	24.4540385	8.4249447	638	25.2586619	8.6087526
599	24.4744765	8.4296383	639	25.2784493	8.6132480
600	24.4948974	8.4343266	640	25.2982213	8.6177388

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
641	25.3179778	8.6222248	681	26.0959767	8.7979679
642	25.3377189	8.6267062	682	26.1151297	8.8022721
643	25.3574446	8.6311829	683	26.1342687	8.8065722
644	25.3771551	8.6356551	684	26.1533936	8.8108681
645	25.3968502	8.6401226	685	26.1725047	8.8151598
646	25.4165300	8.6445855	686	26.1916017	8.8194473
647	25.4361946	8.6490437	687	26.2106848	8.8237307
648	25.4558441	8.6534974	688	26.2297541	8.8280099
649	25.4754784	8.6579465	689	26.2488095	8.8322850
650	25.4950975	8.6623901	690	26.2678511	8.8365559
651	25.5147014	8.6668310	691	26.2868789	8.8408227
652	25.5342906	8.6712665	692	26.3058929	8.8450853
653	25.5538646	8.6756974	693	26.3248931	8.8493446
654	25.5734237	8.6801238	694	26.3438797	8.8535985
655	25.5929678	8.6845456	695	26.3628526	8.8578489
656	25.6124969	8.6889630	696	26.3818119	8.8620951
657	25.6320112	8.6933758	697	26.4007575	8.8663373
658	25.6515107	8.6977842	698	26.4196896	8.8705757
659	25.6709953	8.7021882	699	26.4386081	8.8748099
660	25.6904651	8.7065876	700	26.4575131	8.8790400
661	25.7099203	8.7109827	701	26.4764046	8.8832616
662	25.7293606	8.7153733	702	26.4952825	8.8874882
663	25.7487864	8.7197595	703	26.5141471	8.8917062
664	25.7681974	8.7241414	704	26.5329983	8.8969204
665	25.7875939	8.7285184	705	26.5518361	8,9001304
666	25.8069756	8.7328917	706	26.5706605	8.9043365
667	25.8263431	8.7372604	707	26.5894716	8.9085387
668	25.8456959	8.7416247	708	26.6082694	8.9127368
669	25.8650343	8.7459846	709	26.6270539	8.9169311
670	25.8843582	8.7503401	710	26.6458252	8.9211214
671	25.9036677	8.7546915	711	26.6645832	8.9253077
672	25.9229628	8.7590383	712	26.6833281	8.9294902
673	25.9422435	8.7633809	713	26.7020598	8.9336686
674	25.9615099	8.7677192	714	26.7207784	8.9378433
675	25.9807621	8.7720532	715	26.7394839	8.9420140
676	26.0000000	8.7763829	716	26.7581763	8.9461808
677	26.0192236	8.7807084	717	26.7768556	8.9503438
678	26.0384331	8.7850296	718	26.7955220	8.9545033
679	26.0576284	8.7893466	719	26.8141753	8.9586581
680	26.0768096	8.7936593	720	26.8328157	8.9628[illegible]

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
721	26.8514431	8.9669570	761	27.5862284	9.1298060
722	26.8700577	8.9711007	762	27.6043475	9.1338033
723	26.8886593	8.9752406	763	27.6224547	9.1377971
724	26.9072481	8.9793766	764	27.6405499	9.1417874
725	26.9258240	8.9835088	765	27.6586334	9.1457742
726	26.9443871	8.9876370	766	27.6767050	9.1497576
727	26.9629375	8.9917623	767	27.6947648	9.1537375
728	26.9814751	8.9958829	768	27.7128129	9.1577139
729	27.0000000	9.0000000	769	27.7308492	9.1616869
730	27.0185121	9.0041133	770	27.7488739	9.1656564
731	27.0370117	9.0082229	771	27.7668867	9.1696225
732	27.0554985	9.0123287	772	27.7848879	9.1735852
733	27.0739727	9.0164309	773	27.8028775	9.1775444
734	27.0924344	9.0205292	774	27.8208555	9.1815003
735	27.1108832	9.0246239	775	27.8388218	9.1854527
736	27.1293199	9.0287148	776	27.8567765	9.1894018
737	27.1477439	9.0328021	777	27.8747199	9.1933447
738	27.1661554	9.0368856	778	27.8926514	9.1972896
739	27.1845544	9.0409655	779	27.9105714	9.2012289
740	27.2029410	9.0450418	780	27.9284801	9.2051641
741	27.2213151	9.0491142	781	27.9463770	9.2090962
742	27.2396769	9.0531831	782	27.9642629	9.2130251
743	27.2580263	9.0572482	783	27.9821371	9.2169505
744	27.2763634	9.0613098	784	28.0000000	9.2208726
745	27.2946883	9.0653677	785	28.0178514	9.2247914
746	27.3130006	9.0694219	786	28.0356915	9.2287068
747	27.3313007	9.0734726	787	28.0535203	9.2326189
748	27.3495887	9.0775197	788	28.0713377	9.2365278
749	27.3678645	9.0815631	789	28.0891438	9.2404333
750	27.3861277	9.0856030	790	28.1069386	9.2443355
751	27.4043792	9.0896392	791	28.1247222	9.2482344
752	27.4226184	9.0936718	792	28.1424945	9.2521300
753	27.4408455	9.0977009	793	28.1602556	9.2560224
754	27.4590604	9.1017265	794	28.1780056	9.2599111
755	27.4772633	9.1057485	795	28.1957443	9.2637972
756	27.4954541	9.1097668	796	28.2134719	9.2676798
757	27.5136330	9.1137818	797	28.2311884	9.2715792
758	27.5317998	9.1177931	798	28.2488938	9.2754352
759	27.5499546	9.1218009	799	28.2665880	9.2793081
760	27.5680975	9.1258053	800	28.2842712	9.2831776

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
801	28.3019434	9.2870440	841	29.0000000	9.4391307
802	28.3196045	9.2909072	842	29.0172362	9.4428704
803	28.3372546	9.2947671	843	29.0344623	9.4466072
804	28.3548937	9.2986239	844	29.0516781	9.4503410
805	28.3725219	9.3024775	845	29.0688837	9.4540719
806	28.3901391	9.3063277	846	29.0860791	9.4577999
807	28.4077454	9.3101750	847	29.1032644	9.4615249
808	28.4253408	9.3140190	848	29.1204395	9.4652469
809	28.4429253	9.3178599	849	29.1376045	9.4689661
810	28.4604989	9.3216975	850	29.1547595	9.4726825
811	28.4780617	9.3255320	851	29.1719045	9.4763959
812	28.4956137	9.3293634	852	29.1890390	9.4801061
813	28.5131548	9.3331916	853	29.2061637	9.4838136
814	28.5306850	9.3370163	854	29.2232784	9.4875182
815	28.5482048	9.3408386	855	29.2403830	9.4912199
816	28.5657137	9.3446574	856	29.2574777	9.4949188
817	28.5832118	9.3484731	857	29.2745623	9.4986147
818	28.6006993	9.3522857	858	29.2916370	9.5023078
819	28.6181760	9.3560952	859	29.3087018	9.5059980
820	28.6356421	9.3599022	860	29.3257566	9.5096854
821	28.6530977	9.3637049	861	29.3428015	9.5133700
822	28.6705423	9.3675051	862	29.3598365	9.5170519
823	28.6879766	9.3713022	863	29.3768616	9.5207303
824	28.7054002	9.3750963	864	29.3938769	9.5244063
825	28.7228131	9.3788873	865	29.4108823	9.5280798
826	28.7402157	9.3826752	866	29.4278779	9.5317497
827	28.7576077	9.3864600	867	29.4448637	9.5354172
828	28.7749891	9.3902418	868	29.4618397	9.5390818
829	28.7923601	9.3940207	869	29.4788059	9.5427436
830	28.8097206	9.3977964	870	29.4957624	9.5464027
831	28.8270706	9.4015691	871	29.5127091	9.5500589
832	28.8444102	9.4053387	872	29.5296461	9.5537123
833	28.8617393	9.4091054	873	29.5465734	9.5573629
834	28.8790581	9.4128691	874	29.5634910	9.5610108
835	28.8963666	9.4166296	875	29.5803989	9.5646560
836	28.9136646	9.4203872	876	29.5972972	9.5682982
837	28.9303523	9.4241419	877	29.6141858	9.5719377
838	28.9482296	9.4278936	878	29.6310648	9.5755745
839	28.9654967	9.4316423	879	29.6479341	9.5792085
840	28.9827535	9.4353880	880	29.6647939	9.5828397

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
881	29.6816442	9.5864682
882	29.6984848	9.5900939
883	29.7153159	9.5937169
884	29.7321375	9.5973372
885	29.7489495	9.6009548
886	29.7657521	9.6045695
887	29.7825452	9.6081817
888	29.7993288	9.6117913
889	29.8161030	9.6153977
890	29.8328678	9.6190017
891	29.8496231	9.6226029
892	29.8663690	9.6262015
893	29.8831056	9.6297974
894	29.8998328	9.6333907
895	29.9165506	9.6369812
896	29.9332591	9.6405690
897	29.9499582	9.6441542
898	29.9666481	9.6477367
899	29.9833287	9.6513166
900	30.0000000	9.6548938
901	30.0166620	9.6584684
902	30.0333145	9.6620403
903	30.0499584	9.6656096
904	30.0665927	9.6691762
905	30.0832179	9.6727402
906	30.0998339	9.6763017
907	30.1164407	9.6798604
908	30.1330383	9.6834166
909	30.1496268	9.6869702
910	30.1662062	9.6905211
911	30.1827765	9.6940694
912	30.1993377	9.6976151
913	30.2158898	9.7011583
914	30.2324329	9.7046988
915	30.2489669	9.7082369
916	30.2654919	9.7117723
917	30.2820078	9.7153051
918	30.2985148	9.7188351
919	30.3150128	9.7223631
920	30.3315018	9.7258883
921	30.3479818	9.7294108
922	30.3644529	9.7329309
923	30.3809150	9.7364487
924	30.3973683	9.7399634
925	30.4138126	9.7434758
926	30.4302481	9.7469856
927	30.4466748	9.7504931
928	30.4630924	9.7539979
929	30.4795013	9.7575002
930	30.4959013	9.7610001
931	30.5122926	9.7644973
932	30.5286750	9.7679922
933	30.5450487	9.7714845
934	30.5614136	9.7749742
935	30.5777697	9.7784616
936	30.5941171	9.7819465
937	30.6104557	9.7854288
938	30.6267857	9.7889087
939	30.6431069	9.7923863
940	30.6594194	9.7958611
941	30.6757233	9.7993335
942	30.6920187	9.8028036
943	30.7083051	9.8062711
944	30.7245829	9.8097362
945	30.7408523	9.8131986
946	30.7571130	9.8166591
947	30.7733651	9.8201169
948	30.7896086	9.8235723
949	30.8058436	9.8270252
950	30.8220700	9.8304757
951	30.8382879	9.8339238
952	30.8544972	9.8373695
953	30.8706981	9.8408127
954	30.8868904	9.8442536
955	30.9030742	9.8476920
956	30.9192497	9.8511283
957	30.9354166	9.8545620
958	30.9515751	9.8579929
959	30.9677251	9.8614217
960	30.9838668	9.8648483

Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	C. Wurzel.
961	31.0000000	9.8682724	981	31.3209179	9.9362616
962	31.0161248	9.8716941	982	31.3368792	9.9396363
963	31.0322413	9.8751130	983	31.3528308	9.9430092
964	31.0483494	9.8785305	984	31.3687743	9.9463797
965	31.0644492	9.8819451	985	31.3847097	9.9497469
966	31.0805405	9.8853574	986	31.4006369	9.9531138
967	31.0966236	9.8887673	987	31.4165561	9.9564775
968	31.1126983	9.8921749	988	31.4324673	9.9598389
969	31.1287648	9.8955801	989	31.4483704	9.9631980
970	31.1448230	9.8989830	990	31.4642654	9.9665543
971	31.1608729	9.9023835	991	31.4801525	9.9699095
972	31.1769145	9.9057817	992	31.4960315	9.9732619
973	31.1929479	9.9091776	993	31.5119025	9.9766120
974	31.2089731	9.9125712	994	31.5277655	9.9799599
975	31.2249899	9.9159624	995	31.5436206	9.9833054
976	31.2409987	9.9193513	996	31.5594677	9.9866486
977	31.2569992	9.9227379	997	31.5753068	9.9899899
978	31.2729915	9.9261222	998	31.5911380	9.9933288
979	31.2889757	9.9295042	999	31.6069611	9.9966655
980	31.3049517	9.9328838	1000	31.6227766	10.0000000

Weigl, Johann Baptist,

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum öffentlichen Gebrauche und Selbstunterrichte mit metrologischen Tafeln über die Maße, Gewichte und Mü nzen verschiedener Staaten, besonders des Königreichs Baiern, und des alten Roms und Griechenlands

Sulzbach 1812

Math.p. 633
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083069-8